3. *Zur Frage der Symmetrie des elektromagnetischen Spannungstensors;*
von Max Abraham.

In einer vor kurzem in diesen Annalen erschienenen Notiz[1]) behauptet Hr. K. Schapownikow, hinsichtlich der ponderomotorischen Drehwirkungen einer Lichtwelle auf Kristalle bestehe ein Widerspruch zwischen der Maxwellschen Theorie einerseits und gewissen Sätzen der Elektronentheorie andererseits. Diese Behauptung muß von vornherein als befremdlich erscheinen; denn der wesentliche Unterschied der beiden Theorien liegt nicht sowohl in ihren Aussagen über die fiktiven Spannungen, als vielmehr darin, daß zu der von diesen Spannungen ausgeübten Kraft in der Elektronentheorie noch eine von der zeitlichen Abnahme der elektromagnetischen Bewegungsgröße herrührende Kraft tritt, welche der Maxwell-Hertzschen Theorie fremd ist. Diese elektromagnetische Trägheitskraft spielt jedoch nur bei nichtstationären Vorgängen eine Rolle. In stationären Strahlungsfeldern ist ihr zeitlicher Mittelwert gleich Null, so daß die Kräfte, welche auf die Elektronen eines Körpers wirken, die gleiche Resultierende und das gleiche resultierende Moment haben, wie die an seiner Oberfläche angreifenden Maxwellschen Flächenkräfte. Der Widerspruch zwischen den beiden Theorien, den Hr. Schapownikow findet, beruht denn auch, wie wir zeigen werden, lediglich auf einer Verkennung des Sinnes der betreffenden Sätze der Elektrodynamik; er liefert ein lehrreiches Beispiel dafür, wie man mit den fiktiven Spannungen nicht operieren darf. Ich will dieses Beispiel im folgenden kurz behandeln und einige allgemeinere Bemerkungen über die Frage der Symmetrie des elektromagnetischen Spannungstensors anknüpfen.

1) K. Schapownikow, Ann. d. Phys. **43**. p. 473. 1914.

Wir verstehen unter $\mathfrak{E}^i$ die elektrische Feldstärke, unter $\mathfrak{D}^i$ die elektrische Erregung im Innern des Kristalls; zwischen den Komponenten dieser beiden Vektoren bestehen bei geeigneter Wahl des Achsensystems die Gleichungen

$$(1) \qquad \mathfrak{D}_x^{\,i} = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x^{\,i}, \quad \mathfrak{D}_y^{\,i} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y^{\,i}, \quad \mathfrak{D}_z^{\,i} = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z^{\,i}.$$

Man denke sich nun im Innern des Kristalls ein Plättchen von der Dicke dz, dessen Grundebenen zur (xy)-Ebene parallele Quadrate vom Flächeninhalt 1 qcm sind, während die Seitenebenen senkrecht zur x-Achse, bzw. zur y-Achse, stehen. Übt ein elektrisches Feld ein Drehmoment auf dieses Plättchen aus?

Um diese Frage zu beantworten, hat der Theoretiker in Gedanken ebenso zu verfahren wie ein Experimentator, der untersuchen will, ob drehende Kräfte auf das Plättchen wirken. Er hat nämlich zunächst das Plättchen von dem Kristallkörper abzutrennen, so daß es, unabhängig von jenem, beweglich wird. Nachdem so der mechanische Zusammenhang mit dem Rest des Kristalls aufgehoben ist, ist das Plättchen rings von einer dünnen Vakuumschicht umhüllt. In dieser Schicht konstruiere man eine das Plättchen einschließende Fläche; der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ zeige die Richtung der äußeren Normalen an. Dann ist die auf die Einheit der Fläche bezogene elektrische Flächenkraft

$$(2) \qquad \mathfrak{T}^e = \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_n - \mathfrak{n}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2;$$

das resultierende Moment dieser Flächenkräfte ergibt die gesuchte Drehkraft.

In Gleichung (2) bedeutet demnach $\mathfrak{E}$ die *elektrische Feldstärke* und gleichzeitig die *elektrische Erregung im Vakuum* und *nicht*, wie Hr. Schapownikow zu glauben scheint, die *Feldstärke im Innern des Kristalls.* Den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$ einerseits, den elektrischen Vektoren $\mathfrak{E}^i$, $\mathfrak{D}^i$ im Innern des Kristalls andererseits vermitteln die bekannten Grenzbedingungen der Elektrodynamik, welche Stetigkeit der Normalkomponenten der Erregung und der Tangentialkomponenten der Feldstärke verlangen. Sie ergeben, mit Rücksicht auf die Gleichungen (1):

Wir verstehen unter $\mathfrak{E}^i$ die elektrische Feldstärke, unter $\mathfrak{D}^i$ die elektrische Erregung im Innern des Kristalls; zwischen den Komponenten dieser beiden Vektoren bestehen bei geeigneter Wahl des Achsensystems die Gleichungen

$$(1)\qquad \mathfrak{D}_x^{\,i} = \varepsilon_1 \mathfrak{E}_x^{\,i}, \quad \mathfrak{D}_y^{\,i} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_y^{\,i}, \quad \mathfrak{D}_z^{\,i} = \varepsilon_3 \mathfrak{E}_z^{\,i}.$$

Man denke sich nun im Innern des Kristalls ein Plättchen von der Dicke dz, dessen Grundebenen zur (xy)-Ebene parallele Quadrate vom Flächeninhalt 1 qcm sind, während die Seitenebenen senkrecht zur x-Achse, bzw. zur y-Achse, stehen. Übt ein elektrisches Feld ein Drehmoment auf dieses Plättchen aus?

Um diese Frage zu beantworten, hat der Theoretiker in Gedanken ebenso zu verfahren wie ein Experimentator, der untersuchen will, ob drehende Kräfte auf das Plättchen wirken. Er hat nämlich zunächst das Plättchen von dem Kristallkörper abzutrennen, so daß es, unabhängig von jenem, beweglich wird. Nachdem so der mechanische Zusammenhang mit dem Rest des Kristalls aufgehoben ist, ist das Plättchen rings von einer dünnen Vakuumschicht umhüllt. In dieser Schicht konstruiere man eine das Plättchen einschließende Fläche; der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ zeige die Richtung der äußeren Normalen an. Dann ist die auf die Einheit der Fläche bezogene elektrische Flächenkraft

$$(2)\qquad \mathfrak{T}^e = \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_n - \mathfrak{n}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2;$$

das resultierende Moment dieser Flächenkräfte ergibt die gesuchte Drehkraft.

In Gleichung (2) bedeutet demnach $\mathfrak{E}$ die *elektrische Feldstärke* und gleichzeitig die *elektrische Erregung im Vakuum* und *nicht*, wie Hr. Schapownikow zu glauben scheint, *die Feldstärke im Innern des Kristalls.* Den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$ einerseits, den elektrischen Vektoren $\mathfrak{E}^i$, $\mathfrak{D}^i$ im Innern des Kristalls andererseits vermitteln die bekannten Grenzbedingungen der Elektrodynamik, welche Stetigkeit der Normalkomponenten der Erregung und der Tangentialkomponenten der Feldstärke verlangen. Sie ergeben, mit Rücksicht auf die Gleichungen (1):

halb des homogenen Kristalls der elektromagnetische Spannungstensor symmetrisch sei, und daß somit die einzelnen Kristallteilchen von seiten ihrer Nachbarn im ganzen keine Drehkräfte erfahren, so treten doch solche Drehkräfte auf, sobald man ein Teilchen abtrennt und so auf seiner Oberfläche freie elektrische Ladungen hervorruft. Mithin folgt aus der Existenz solcher Drehmomente keineswegs die Asymmetrie des Spannungstensors im Innern des Kristalls.

Die Frage der Symmetrie oder Asymmetrie des elektromagnetischen Spannungstensors ist darum noch heute eine strittige zu nennen. Maxwell[1]) macht für die elektromagnetische Flächenkraft den Ansatz

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{D}_n + \mathfrak{H}\,\mathfrak{B}_n - \mathfrak{n}\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\}; \tag{8}$$

derselbe führt in Kristallen zu einem unsymmetrischen System von neun Spannungskomponenten. Nach H. Hertz[2]) dagegen ist

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}_n + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}_n + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}_n + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\,\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\}. \tag{9}$$

Hier werden auch dann, wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ nicht parallel sind, die Schubspannungen einander paarweise gleich:

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x; \tag{9a}$$

es verschwinden somit im Innern des Kristalls die Drehmomente der elektromagnetischen Kräfte; der Spannungstensor reduziert sich auf ein symmetrisches System von nur sechs Größen.

Bei der Darstellung der *Maxwell-Hertzschen Theorie* wird meist dem Hertzschen symmetrischen Spannungstensor der Vorzug gegeben.[3]) Der Maxwellsche asymmetrische Tensor ergibt, daß auf die Kristallteilchen von seiten ihrer Nachbarn im Innern des Kristalls Drehkräfte im elektrischen Felde ausgeübt werden; diese Drehkräfte müßten durch drehende elastische Kräfte im Gleichgewicht gehalten werden, welche die gewöhnliche Elastizitätstheorie nicht kennt. Ein

---

1) J. Cl. Maxwell, Treatise II. Art. 641.

2) H. Hertz, Ges. Werke II. p. 280. Die Ergänzungsspannungen, die von der Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Konstanten vom Deformationstensor herrühren, sind hier außer Betracht geblieben.

3) Vgl. Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Art. V, 13 (H. A. Lorentz). Nr. 23; Art. V, 16 (F. Pockels). Nr. 1.

asymmetrischer elektromagnetischer Tensor wäre aber nur im Rahmen einer entsprechend erweiterten Elastizitätstheorie zulässig. Wie das oben behandelte Beispiel zeigt, ist aus der Tatsache, daß auf Kristalle im elektrischen Felde Drehkräfte wirken, keineswegs auf die Existenz innerer elektrischer Drehmomente zu schließen.

Die *Elektronentheorie* geht von den „mikroskopischen" Feldern aus, welche die einzelnen Elektronen im Vakuum erzeugen; in diesen Feldern ist der elektromagnetische Spannungstensor stets symmetrisch, wie aus dem Ausdruck der elektromagnetischen Flächenkraft hervorgeht:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_n + \mathfrak{H}\,\mathfrak{H}_n - \mathfrak{n}\left\{\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\right\}. \tag{10}$$

Nach H. A. Lorentz entstehen, aus den Feldstärken der mikroskopischen Felder im Vakuum, durch Bildung der Mittelwerte für physikalisch unendlich kleine Bereiche, die Vektoren des makroskopischen Feldes in der Materie. Um nun zu den Spannungen des makroskopischen Feldes zu gelangen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen:

A. Man berechnet zuerst die resultierende Kraft und Drehkraft für ein physikalisch unendlich kleines Volumelement, indem man die auf seine Elektronen wirkenden Kräfte nach den Regeln der Statik zusammensetzt. Diese Kraft und Drehkraft sucht man sodann aus fiktiven Flächenkräften abzuleiten. Dieser von H. A. Lorentz[1]) eingeschlagene Weg scheint bisweilen zu einem asymmetrischen Spannungstensor zu führen.

B. Man definiert jede Komponente des makroskopischen Spannungstensors durch Bildung des Mittelwertes der betreffenden Tensorkomponente des mikroskopischen Feldes über physikalisch unendlich kleine Bereiche; alsdann überträgt sich die Symmetrieeigenschaft des durch (10) bestimmten Tensors des mikroskopischen Feldes auf das makroskopische Feld, da die Symmetriebedingungen

$$X_y = Y_x\,,\quad Y_z = Z_y\,,\quad Z_x = X_z\,, \tag{10a}$$

1) H. A. Lorentz, Encyclopädie der mathem. Wissenschaften, Art. V, 14. Nr. 53.

bei der Mittelwertsbildung über den gleichen Bereich bestehen bleiben. Die wirkliche Berechnung der sechs Spannungskomponenten als Funktionen der Vektorkomponenten des makroskopischen Feldes auf diesem Wege, erfordert ein genaueres Eingehen auf die elektrische Konstitution der Moleküle.[1]) Doch erscheint der zweite Weg als der direktere; er führt auf die Forderung eines symmetrischen Spannungstensors als die vom Standpunkte der Elektronentheorie aus nächstliegende.

In der Elektronentheorie ist die ponderomotorische Kraft pro Volumeinheit nicht durch die örtlichen Ableitungen der Spannungskomponenten allein bestimmt; es gehen vielmehr die zeitlichen Ableitungen der Komponenten der elektromagnetischen Impulsdichte ($\mathfrak{g}$) ein. Der Vektor der Impulsdichte ist mit dem Poyntingschen Energiestrom durch die Beziehung verknüpft:

$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}, \tag{11}$$

die ich den „*Satz vom Impulse des Energiestromes*" nennen möchte.[2]) Dieser Satz bezieht sich zunächst auf die mikroskopischen Elektronenfelder im Vakuum. Er bleibt indessen im Innern der ponderablen Körper gültig, wenn man hier die makroskopischen Werte des Energiestromes und der Impulsdichte durch Mittelung über die gleichen raumzeitlichen Bereiche definiert. Auch in der Elektrodynamik bewegter Körper gelten nach dieser Auffassung die Beziehungen

$$c\,\mathfrak{g}_x = \frac{1}{c}\,\mathfrak{S}_x, \quad c\,\mathfrak{g}_y = \frac{1}{c}\,\mathfrak{S}_y, \quad c\,\mathfrak{g}_z = \frac{1}{c}\,\mathfrak{S}_z. \tag{11a}$$

Endlich setzt die Elektronentheorie für die Energiedichte den Ausdruck

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2. \tag{12}$$

---

1) Natürlich ist der Tensor, welcher durch Mittelwertsbildung aus dem Tensor des mikroskopischen Feldes entsteht, nicht ohne weiteres mit demjenigen der Maxwell-Hertzschen Theorie zu vergleichen, da er nicht, wie jener, mit dem makroskopischen Felde zugleich verschwindet.

2) M. Laue (Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. p. 164) nennt die Gleichung (11) den „Satz von der Trägheit der Energie". Ich möchte es vorziehen, diesen Namen für die aus ihr durch Integration über „vollständige statische Systeme" sich ergebende Beziehung zwischen Energie und träger Masse zu verwenden.

Aus ihm und aus (10) folgt die Relation

$$X_x + Y_y + Z_z + \psi = 0\,; \tag{12a}$$

dieselbe bleibt ebenfalls bestehen, wenn man durch Mittelung von dem mikroskopischen Felde im Vakuum zu dem makroskopischen Felde in der Materie übergeht, auch wenn es sich um bewegte oder kristallinische Körper handelt.

In dem Schema der *Relativitätstheorie* werden die neun Spannungskomponenten, die sechs Komponenten der Impulsdichte und des Energiestromes, und die Energiedichte als 16 Komponenten eines vierdimensionalen Tensors gedeutet. Ob dieser Tensor symmetrisch oder asymmetrisch ist, darüber sagt das Relativitätsprinzip nichts aus. H. Minkowski[1]) nimmt ihn als unsymmetrisch an, eine Auffassung, die kürzlich von J. Ishiwara[2]) befürwortet worden ist. Ich habe dagegen eine Theorie der Elektrodynamik bewegter isotroper Körper entwickelt[3]), in welcher der Welttensor symmetrisch ausfällt. Die Symmetrie in bezug auf die Diagonale bringt das Bestehen der Relationen (10a, 11a) mit sich, und reduziert die Zahl der Tensorkomponenten auf 10; die Diagonalglieder sind dabei durch die Relation (12a) miteinander verknüpft. Es bestehen mithin hier zwischen den Tensorkomponenten alle diejenigen Beziehungen, welche man auf dem angedeuteten Wege der Mittelung aus der Elektronentheorie gewinnt. Dieser Umstand spricht zugunsten meiner Theorie. Ihre Richtigkeit läßt sich natürlich ebensowenig eindeutig nachweisen, wie die Gültigkeit der Maxwellschen Energieverteilung oder des Poyntingschen Energiestromes im elektromagnetischen Felde. Wenn auch die Wahl des elektromagnetischen Welttensors bis zu einem gewissen Grade willkürlich ist, so sollte man doch meines Erachtens die Forderung der Symmetrie, welche den Satz vom Impulse des Energiestromes einschließt, nicht ohne

---

1) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 53.

2) J. Ishiwara, Ann. d. Phys. 42. p. 986. 1913.

3) M. Abraham, Rendiconti del circolo mat. di Palermo 28. p. 1. 1909[1]; 30. p. 33. 1910[2].

zwingenden Grund aufgeben. Dieser Satz, welchen M. Planck[1]) für Energieströme beliebiger Art als gültig postuliert, und den ich auf das Gravitationsfeld übertragen habe[2]), enthält den Keim einer allgemeinen Energetik physikalischer Felder.

Mailand, 12. März 1914.

---

1) M. Planck, Phys. Zeitschr. **9**. p. 828. 1908.
2) M. Abraham, Phys. Zeitschr. **13**. p. 1. 1912.

(Eingegangen 15. März 1914.)