Zur Minkowskischen Elektrodynamik der bewegten Körper.

Von

M. v. LAUE.

(Eingegangen am 19. Juli 1950.)

In dieser Elektrodynamik ist bisher noch keine Entscheidung gefallen zwischen dem MINKOWSKIschen Welttensor und anderen Ansätzen dafür. Ersterer ist unsymmetrisch und widerspricht daher der PLANCKschen Fassung für das Gesetz der Trägheit der Energie: Impulsdichte gleich Energieströmung, dividiert durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. Die anderen Ansätze sollen gerade die Symmetrie des Tensors, also jene Fassung des Trägheitsgesetzes, retten. Diese Arbeit will nachweisen, daß der MINKOWSKIsche Ansatz der richtige ist.

§ 1. Da wir zu unseren Ausführungen auf die bekannten, von MINKOWSKI der Elektrodynamik der Körper gegebenen Grundlagen zurückgreifen müssen, stellen wir zunächst das Erforderliche daraus zusammen.

Das elektromagnetische Feld beschreiben zwei Sechservektoren, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$; sie und die zu ihnen dualen Sechservektoren, $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}^*$, hängen mit den Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, sowie mit der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ durch die Gleichungen zusammen:

$$\left.\begin{array}{lll|lll|lll}
\mathfrak{M}_{10} = \mathfrak{M}^*_{23} & = -i\,\mathfrak{E}_1 & & \mathfrak{M}_{20} = \mathfrak{M}^*_{31} & = -i\,\mathfrak{E}_2 & & \mathfrak{M}_{30} = \mathfrak{M}^*_{12} & = -i\,\mathfrak{E}_3 & \\
\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{M}^*_{10} & = \mathfrak{B}_1 & & \mathfrak{M}_{31} = \mathfrak{M}^*_{20} & = \mathfrak{B}_2 & & \mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}^*_{30} & = \mathfrak{B}_3 & \\
\mathfrak{B}_{10} = \mathfrak{B}^*_{23} & = -i\,\mathfrak{D}_1 & & \mathfrak{B}_{20} = \mathfrak{B}^*_{31} & = -i\,\mathfrak{D}_2 & & \mathfrak{B}_{30} = \mathfrak{B}^*_{12} & = -i\,\mathfrak{D}_3 & \\
\mathfrak{B}_{23} = \mathfrak{B}^*_{10} & = \mathfrak{H}_1 & & \mathfrak{B}_{31} = \mathfrak{B}^*_{20} & = \mathfrak{H}_2 & & \mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}^*_{30} & = \mathfrak{H}_3 . &
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Dann gelten die vierdimensional geschriebenen, aber sonst unverändert von MAXWELL übernommenen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll}
\operatorname{Div} \mathfrak{M}^* = 0, & \text{d. h.} & \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathfrak{M}^*_{\alpha\beta} = 0, \\
\operatorname{Div} \mathfrak{B} = P, & \text{d. h.} & \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathfrak{B}_{\alpha\beta} = P_\alpha,
\end{array}\right\} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 0) \qquad (2)$$

in denen P den Vierervektor des elektrischen Stromes bedeutet. Zu diesen Feldgleichungen treten die Materiegleichungen, welche die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ einführen. Sie enthalten die Vierergeschwindigkeit Y des Körpers und lauten:

$$[Y\,\mathfrak{B}] = \varepsilon\,[Y\,\mathfrak{M}], \qquad [Y\,\mathfrak{M}^*] = \mu\,[Y\,\mathfrak{B}^*]. \qquad (3)$$

Das hier auftretende Vektorprodukt aus einem Vierervektor A und einem Sechservektor $\mathfrak{F}$ aber ist definiert durch die Gleichungen:

$$[A\,\mathfrak{F}]_\alpha = \sum_\beta A_\beta\, \mathfrak{F}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 0)\,. \tag{4}$$

Der Welttensor T hat nach jeder Auffassung die aus dem folgenden Schema zu ersehenden Komponenten:

$$T = \left\{\begin{array}{cccc} \boldsymbol{p}_{11} & \boldsymbol{p}_{12} & \boldsymbol{p}_{13} & i\,c\,\mathfrak{g}_1 \\ \boldsymbol{p}_{21} & \boldsymbol{p}_{22} & \boldsymbol{p}_{23} & i\,c\,\mathfrak{g}_2 \\ \boldsymbol{p}_{31} & \boldsymbol{p}_{32} & \boldsymbol{p}_{33} & i\,c\,\mathfrak{g}_3 \\ \frac{i}{c}\mathfrak{S}_1 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_2 & \frac{i}{c}\mathfrak{S}_3 & -W. \end{array}\right\} \tag{5}$$

$\boldsymbol{p}$ ist der Tensor der MAXWELLschen Spannungen, $\mathfrak{g}$ die Impulsdichte, $\mathfrak{S}$ die Dichte des Energiestroms, W die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Die Gleichung

$$-\varDelta\,i\,v\,T = F \quad \text{oder} \quad -\sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = F_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 0) \tag{6}$$

enthält die Viererkraft F und formuliert, wenn man sie ins Dreidimensionale übersetzt, den Impuls- und den Energiesatz. Die auf die Volumeneinheit des Körpers wirkende Kraft $\mathfrak{F}$, deren Komponenten mit den gleichindizierten Komponenten von F zusammenfallen, erhält danach den Wert:

$$\mathfrak{F} = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{p} - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} = \varrho\,\mathfrak{E}^* + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{J}\,\mathfrak{B}]\,, \tag{7}$$

wobei ϱ die Ladungsdichte, $\mathfrak{J}$ den Leitungsstrom und

$$\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{q}\,\mathfrak{B}] \tag{8}$$

die „treibende elektrische Kraft" bezeichnet, sofern man den MAXWELLschen Ansatz für $\boldsymbol{p}$ von ruhenden Körpern, für die MAXWELL ihn aufstellte, mit MINKOWSKI auf bewegte Körper überträgt. Er lautet:

$$\boldsymbol{p}_{\alpha\beta} = -\,\mathfrak{E}_\alpha\,\mathfrak{D}_\beta - \mathfrak{H}_\alpha\,\mathfrak{B}_\beta + \tfrac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\left\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\right\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)\,. \tag{9}$$

Er ist symmetrisch für den ruhenden isotropen Körper, bei welchem $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, dieselbe Richtung haben, aber weder für (nichtkubische) Kristalle noch für bewegte Körper überhaupt, bei denen die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ verschieden gerichtet sind. Schon H. HERTZ[1] hat ihn durch den symmetrischen Teil $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{p}_{\beta\alpha})$ zu ersetzen versucht. Dem widersprechen allerdings die zahlreichen Nachweise der Richtkraft

[1] HERTZ, H.: Wiedemanns Ann. **41**, 369 (1890). Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, S. 282. HERTZ verweist auch auf H. V. HELMHOLTZ, Wiedemanns Ann. **13**, 400 (1881).

eines homogenen Magnetfeldes auf Kristallkugeln[1]; das Drehmoment rührt von dem antisymmetrischen Teil $\frac{1}{2}(p_{\alpha\beta} - p_{\beta\alpha})$ her. Außerdem aber gibt es ein Kriterium für den Welttensor, dem der MINKOWSKIsche Ansatz und keiner der anderen genügt: *Die Strahlgeschwindigkeit* $\mathfrak{w} = \mathfrak{S}/W$ *einer ebenen Welle muß dem* EINSTEIN*schen Additionstheorem der Geschwindigkeiten genügen.* Denn läuft in einer begrenzten ebenen Welle ein Massenpunkt mit ($\mathfrak{w}$ ist eine Unterlichtgeschwindigkeit), so bleibt er dauernd „im Licht"; dieses Faktum aber läßt sich nicht durch Übergang zu anderen Bezugssystemen forttransformieren[2].

Der MINKOWSKIsche Ansatz führt den Tensor T auf die Sechservektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ mittels der Gleichung zurück:

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{B}_{\beta\gamma} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}). \qquad (10)$$

Dies bedeutet nach (5), gültig für alle Bezugssysteme:

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}], \qquad W = \frac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\}. \qquad (11)$$

Es stimmt außerdem mit (9) überein. Eine ebene Welle hat also die Strahlgeschwindigkeit:

$$\mathfrak{w} = \frac{c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]}{\frac{1}{2}\{(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})\}}. \qquad (12)$$

Im Zähler wie im Nenner tritt hier das Quadrat des in (13) auftretenden Sinus auf. Aber $\mathfrak{w}$ selbst ist von den vier Weltkoordinaten unabhängig.

§ 2. Zur Darstellung der linear polarisierten, monakromatischen, ebenen Welle führt es, wenn wir $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ mit je einem konstanten Sechservektor als Proportionalitätsfaktor zu

$$\sin\left(2\pi \sum_{\alpha} A_\alpha\, x_\alpha\right) \qquad (13)$$

proportional setzen. Das Argument des Sinus ist dabei LORENTZ-invariant, und zwar für alle Werte der Koordinaten x_α; folglich bilden die A_α einen Vierervektor, den wir „*Impulsvektor*" benennen. Aus den MAXWELLschen Gl. (2) mit $P = 0$ folgt dann nach (4):

$$[A\,\mathfrak{M}^*] = 0, \qquad [A\,\mathfrak{B}] = 0. \qquad (14)$$

---

[1] VOIGT, W.: Lehrbuch der Kristallphysik, S. 487. Die von VOIGT angeführten Originalarbeiten waren unter den heutigen Bibliotheksverhältnissen nicht zu beschaffen.

[2] Auf diesen Gedanken hat der Verfasser [Ann. Phys. **23**, 989 (1907)] die Transformation der Strahlgeschwindigkeit und die Theorie des FRESNELschen Mitführungskoeffizienten gegründet, aber ohne Bezugnahme auf einen Welttensor. A. SCHEYE [Ann. Phys. **30**, 805 (1909)] gibt an, daß nur der MINKOWSKIsche Tensor diesem Kriterium genügt; doch dürfte sein nur angedeuteter Beweis dafür umständlicher gewesen sein, als der hier geführte.

Ein Sechservektor ist im allgemeinen durch zwei zueinander senkrechte, ebene Flächenstücke mit Umlaufsinn dargestellt. Nach (14) sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}$ aber nur durch je ein solches Flächenstück gegeben; das algebraische Kennzeichen für solche Sechservektoren lautet:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}^*) &= \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \mathfrak{M}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{M}^*_{\alpha\beta} = 0 \\ (\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}^*) &= \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \mathfrak{B}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{B}^*_{\alpha\beta} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

Denn legen wir das Koordinatensystem so, daß von den sechs Komponenten von $\mathfrak{M}^*$ nur $\mathfrak{M}^*_{23}$ und $\mathfrak{M}^*_{10}$ von Null verschieden sind, so sagt (14) aus:

$$[A\,\mathfrak{M}^*]_1 = A_0\,\mathfrak{M}^*_{10} = 0\,, \qquad [A\,\mathfrak{M}^*]_2 = A_3\,\mathfrak{M}^*_{23} = 0$$
$$[A\,\mathfrak{M}^*]_0 = A_1\,\mathfrak{M}^*_{01} = 0\,, \qquad [A\,\mathfrak{M}^*]_3 = A_2\,\mathfrak{M}^*_{32} = 0\,.$$

Diese Gleichungen lassen nur zwei Möglichkeiten zu: Entweder ist

$$\mathfrak{M}^*_{10} = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = A_3 = 0$$

oder

$$\mathfrak{M}^*_{23} = 0 \quad \text{und} \quad A_1 = A_0 = 0\,.$$

In beiden Fällen ist unsere Behauptung erwiesen. Zugleich sieht man, daß der Forervektor A auf $\mathfrak{M}^*$ senkrecht steht. Da nun dasselbe für $\mathfrak{B}$ gilt, ist A das gemeinsame Lot der $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}$ repräsentierenden Flächen, diese liegen also beide in dem zu A senkrechten dreidimensionalen Raum und haben folglich eine Schnitt*linie*, welche ihrerseits bis auf einen skalaren Faktor einen Vierervektor A^* festlegt. Diesen bezeichnen wir nach geeigneter Normierung als den *Strahlvektor* der ebenen Welle. Es gilt:

$$[A^*\,\mathfrak{M}] = 0\,, \qquad [A^*\,\mathfrak{B}^*] = 0\,, \qquad (A\,A^*) = 0\,. \tag{15}$$

Denn die Schnittlinie der $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}$ darstellenden ist das gemeinsame Lot der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{B}^*$ darstellenden Flächen und gehört dem zu A senkrechten dreidimensionalen Raume an.

Aus (14) folgt aber weiterhin das Verschwinden des skalaren Produktes

$$(\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}) = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \mathfrak{M}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{B}_{\alpha\beta}\,. \tag{16}$$

Denn hat A die Richtung von x_3, so liegen die Flächen, welche $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}$ darstellen, im $x_0 x_1 x_2$-Raum, so daß von ihren Komponenten alle diejenigen verschwinden, unter deren Indizes die 3 auftritt. Wir können dann in dem genannten Raum das Koordinatensystem so drehen, daß von den Komponenten von $\mathfrak{B}$ nur $\mathfrak{B}_{12}$ von Null verschieden ist. Dann wird

$$(\mathfrak{M}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{M}_{12}\,\mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{M}^*_{30}\,\mathfrak{B}_{12} = 0\,, \tag{17}$$

weil $\mathfrak{M}^*_{30}$ Null ist. Nach (1) und (11) bedeutet diese Gleichung

$$(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) = (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}) = W\,. \tag{18}$$

In (11) ist die Energiedichte W in einen elektrischen Anteil $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D})$ und einen magnetischen Anteil $\frac{1}{2}(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B})$ zerlegt. Beide sind für die ebene Welle einander gleich. Aus (14a) folgt nach (1)

$$(\mathfrak{E}\,\mathfrak{B}) = (\mathfrak{H}\,\mathfrak{D}) = 0. \tag{18a}$$

§ 3. *Der Impulsvektor A ist notwendig raumartig.* Denn stellen wir die ebene Welle dreidimensional dar durch

$$\sin\left(2\pi\left\{\nu\,t - \frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{3} e_\alpha\, x_\alpha\right\}\right) \tag{19}$$

(ν Schwingungszahl, λ Wellenlänge, $\mathfrak{e}$ Einheitsvektor in Richtung der Wellennormale), so zeigt der Vergleich mit (13):

$$A_\alpha = -\frac{e_\alpha}{\lambda} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad A_0 = -\frac{i\,\nu}{c}. \tag{20}$$

Danach ist das Quadrat des Absolutwertes von A,

$$A^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{c^2} \tag{21}$$

und im Ruhsystem K^0 des Körpers, in welchem nach MAXWELL $\left(\frac{\nu^0\,\lambda^0}{c}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon\,\mu} < 1$ ist,

$$A^2 = \frac{1}{\lambda^{0\,2}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\right) > 0. \tag{22}$$

Der Strahlvektor A^* hingegen ist notwendig zeitartig. Das geht aus den Materiegleichungen (3) hervor.

Zum Beweis legen wir das Bezugsystem K', zugrunde, in welchem A die x_3-Richtung hat und zudem x_1 und x_2 auf der Vierergeschwindigkeit Y des Körpers senkrecht stehen. In diesem haben die Feldvektoren $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}$ sicher nur die folgenden Komponenten:

$$\mathfrak{M}^*_{10} = \mathfrak{M}_{23}, \qquad \mathfrak{M}^*_{20} = \mathfrak{M}_{31}, \qquad \mathfrak{M}^*_{12} = \mathfrak{M}_{30}$$

$$\mathfrak{B}_{10} = \mathfrak{B}^*_{23}, \qquad \mathfrak{B}_{20} = \mathfrak{B}^*_{31}, \qquad \mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}^*_{30}.$$

Als Schnitt der sie darstellenden Flächen muß A^* den auch aus (15) folgenden Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} A_1^*\,\mathfrak{M}^*_{20} + A_2^*\,\mathfrak{M}^*_{01} + A_0^*\,\mathfrak{M}^*_{12} &= 0 \\ A_1^*\,\mathfrak{B}_{20} + A_2^*\,\mathfrak{B}_{01} + A_0^*\,\mathfrak{B}_{12} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Nun aber sagen die Materiegleichungen (3) für diesen Fall aus:

$$Y_0\,\mathfrak{B}_{10} = \varepsilon\,Y_3\,\mathfrak{M}_{13}, \qquad Y_0\,\mathfrak{B}_{20} = \varepsilon\,Y_3\,\mathfrak{M}_{23}, \qquad 0 = \varepsilon\,Y_3\,\mathfrak{M}_{30}$$

$$Y_0\,\mathfrak{M}_{31} = \mu\,Y_3\,\mathfrak{B}_{10}, \qquad Y_0\,\mathfrak{M}_{32} = \mu\,Y_3\,\mathfrak{B}_{20}, \qquad 0 = \mu\,Y_3\,\mathfrak{B}_{12}.$$

Außer $\varepsilon \mu Y_3^2 = -Y_0^2$ folgt daraus das Verschwinden von $\mathfrak{B}_{12}$ und $\mathfrak{M}_{30} = \mathfrak{M}^*_{12}$; nach (23) ist also $A_1^* = A_2^* = 0$; nach der letzten Gl. (15) ist zudem noch $A_3^* = 0$, also ist nur die Komponente A_0^* von Null verschieden. Ihr Wert bleibt hier noch unbestimmt.

Weil aber der Vektor A^* zeitartig ist, läßt er sich für jedes Bezugssystem auf einen Raumvektor $\mathfrak{s}$ durch die Gleichungen zurückführen:

$$A_\alpha^* = \frac{\nu \lambda \mathfrak{s}_\alpha}{\sqrt{c^2 - (\nu \lambda \mathfrak{s})^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad A_0^* = \frac{i c}{\sqrt{c^2 - (\nu \lambda \mathfrak{s})^2}}, \tag{24}$$

in denen wir die Wurzel als positiv ansehen; ihnen zufolge ist nämlich

$$A^{*2} = -1, \tag{25}$$

also negativ. Damit ist dann auch der noch unbestimmte Faktor für A^* *festgelegt.* Aus (20) und der letzten Gl. (15) geht unter diesen Umständen hervor:

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{s}) = 1. \tag{25 a}$$

§ 4. Mit Hilfe von (1) und (20) folgt aus (14):

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{\lambda \nu} [\mathfrak{e}\,\mathfrak{E}], \qquad \mathfrak{D} = -\frac{c}{\lambda \nu} [\mathfrak{e}\,\mathfrak{H}]. \tag{26}$$

Ebenso folgt nach (1) und (24) aus den beiden ersten Gl. (15):

$$\mathfrak{E} = -\frac{\lambda \nu}{c} [\mathfrak{s}\,\mathfrak{B}], \qquad \mathfrak{H} = \frac{\lambda \nu}{c} [\mathfrak{s}\,\mathfrak{D}]. \tag{27}$$

Nach dem MINKOWSKIschen Ansatz [Gl. (10)] und nach (18) wird folglich Impulsdichte und Energieströmung

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \frac{1}{c} [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}] = \frac{1}{\lambda \nu} [\mathfrak{D}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{E}]] = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda \nu} (\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) = \frac{\mathfrak{e}}{\lambda \nu} W \\ \mathfrak{S} &= c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] = \lambda \nu [\mathfrak{E}\,[\mathfrak{s}\,\mathfrak{D}]] = \lambda \nu \mathfrak{s}\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D}) = \lambda \nu \mathfrak{s}\, W, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

d. h. die Strahlgeschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \lambda \nu \mathfrak{s}. \tag{29}$$

Sie hängt wegen (24) mit dem Strahlvektor A^* zusammen durch die Beziehungen

$$A_\alpha^* = \frac{\mathfrak{w}_\alpha}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{w}^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad A_0^* = \frac{i c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{w}^2}}, \tag{30}$$

welche genau dieselbe Form haben, wie die Beziehungen zwischen der dreidimensionalen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ *eines Massenpunktes und dessen Vierergeschwindigkeit* Y. Es ist damit erwiesen, daß für $\mathfrak{w}$ nach MINKOWSKIs Ansatz für den Welttensor T das EINSTEINsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt.

Weiter aber zeigt Gl. (28): *Der Impuls der ebenen Welle hat in jedem Bezugssystem die Richtung der Wellennormale* $\mathfrak{e}$. *Diese hängt ihrerseits* *nach (20) mit dem Viererveklor A zusammen, dem wir deshalb den Namen Impulsvektor gaben. Die durch je eine Fläche darstellbaren Sechservektoren* $\mathfrak{M}^*$ *und* $\mathfrak{B}$ *zeichnen unter allen Richtungen der vierdimensionalen Welt ihr gemeinsames Lot, d. h. die Richtung von A, und ihre Schnittlinie, d. h. die Richtung von* A^*, *aus. Diesen beiden Vierervektoren entsprechen in jedem Bezugssystem die ausgezeichneten räumlichen Richtungen der ebenen Welle, die des Impulses und die des Strahls.*

Der obige Gedankengang ist bis zu den Gl. (27) einschließlich von jedem Ansatz für T unabhängig. Nicht nur hinreichend für unseren Beweis, sondern auch notwendig ist die Gl. (29), weil ja zunächst der Vektor $\mathfrak{s}$ mit A^* verknüpft ist [Gl. (24)]. Aus (27) folgt, daß $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht steht. Dies überträgt sich durch (29) auf die Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{S}$, führt also, bis auf den Proportionalitätsfaktor c, auf den MINKOWSKIschen Ansatz für $\mathfrak{S}$. Nach dem ABRAHAMschen Ansatz[1] hingegen,

$$\mathfrak{S} = c^2\,\mathfrak{g} = c\left\{[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{q}\,\frac{(\mathfrak{q},[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}])}{c^2 - q^2}\right\},$$

hat $\mathfrak{S}$ im allgemeinen eine andere Richtung; er führt also nicht zu dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten für die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$.

Bei der ebenen Welle im leeren Raum gibt es nur einen ausgezeichneten Vierervektor; dieser ist singulär und steht somit auf sich selbst senkrecht. Hier spaltet er auf in den raumartigen Vektor A und den zeitartigen Vektor A^*, die nach (15) aufeinander senkrecht stehen.

§ 5. Wir betrachten die ebene Welle nochmals in dem vorübergehend benutzten Bezugssystem K'. In ihm sind nach § 3 nur die je zwei Komponenten von $\mathfrak{M}^*$ und $\mathfrak{B}$ von Null verschieden:

$$\mathfrak{M}^*_{10} = \mathfrak{B}_1, \qquad \mathfrak{M}^*_{20} = \mathfrak{B}_2$$
$$\mathfrak{B}_{10} = -i\,\mathfrak{D}_1, \qquad \mathfrak{B}_{20} = -i\,\mathfrak{D}_2.$$

Die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, aber auch die x_3-Komponenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, sind Null. Die Wellennormale hat die Richtung x_3, weil dies für A gilt. Die Energieströmung $\mathfrak{S}$ hingegen und die Strahlgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ sind Null, weil alle räumlichen Komponenten von A^* in diesem Bezugssystem verschwinden. Außerdem ist die Energiedichte W wegen des Verschwindens der Feldstärken Null. Für die Vierergeschwindigkeit des Körpers gilt, wie erwähnt:

$$Y_1 = Y_2 = 0, \qquad Y_3^2 = -\frac{1}{\varepsilon\mu}\,Y_0^2,$$

[1] ABRAHAM, M.: Rendiconti Palermo **28** (1909); **30**, 33 (1910). — Phys. Z. **10**, 737 (1909). — Ann. Phys. **44**, 537 (1914). — GRAMMEL, R.: Ann. Phys. **41**, 517 (1913). — KAFKA, H.: Ann. Phys. **58**, 1 (1919).

d. h. für seine räumliche Geschwindigkeit

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 = 0\,, \qquad \mathfrak{q}_3^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,.$$

$c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ ist aber die Strahlgeschwindigkeit im ruhenden Körper. In K' läuft also der Körper mit dieser Geschwindigkeit der Wellennormale entgegen. Schließlich folgt aus $A_0 = 0$ nach (20) das Verschwinden der Schwingungszahl ν, während die Wellenlänge λ nach (21) den endlichen Wert A_3^{-1} annimmt.

In K' besteht also eine stehende Sinuswelle ohne Feldstärken und mit zeitlich unveränderlicher Verschiebung $\mathfrak{D}$ und Induktion $\mathfrak{B}$. Ihre Energie ist Null. Durch sie läuft der Körper mit der der Wellennormale entgegengesetzten Geschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ hindurch.

Vergrößern wir $\mathfrak{q}$ über diesen Wert hinaus unter Beibehaltung seiner zu $\mathfrak{e}$ entgegengesetzten Richtung, so wird die einzige, nach Symmetrie von Null verschiedene Komponente der Strahlgeschwindigkeit, nämlich $\mathfrak{w}_3$, negativ. Da nun weder die Wellenlänge λ noch [nach (25a)] die zu $\mathfrak{e}$ parallele Komponente $\mathfrak{s}_3$ des Vektors $\mathfrak{s}$ ihr Vorzeichen wechseln können, wird dann nach (20) die Schwingungszahl $\nu < 0$, was bedeutet, daß die Phasen nunmehr der Wellennormale $\mathfrak{e}$ entgegen laufen. Nach (27) überträgt sich dieser Zeichenwechsel auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, nicht aber auf die in K' ja nicht verschwindenden Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$. Also wird jetzt nach (18) W negativ. Der POYNTINGsche Vektor $\mathfrak{S}$ hingegen behält seine Richtung [nach (11)]. Der Zeichenwechsel von $\mathfrak{w}_3$ rührt von dem Zeichenwechsel des in (12) auftretenden Nenners W her.

Zusammenfassung.

Da der unsymmetrische MINKOWSKIsche Welttensor T der allein mögliche für die Elektrodynamik der Materie ist, läßt sich die Fassung $\mathfrak{g} = \mathfrak{S}/c^2$ des Satzes von der Trägheit der Energie nicht als allgemeingültig aufrechterhalten. Dies paßt zu dem Nachweis, den G. U. SCHUBERT[1] für die phänomenologische Theorie der Supraleitung erbracht hat, daß der mit der Supraströmung verknüpfte Welttensor unsymmetrisch ist, also ebenfalls jener Form des Trägheitssatzes widerspricht.

[1] SCHUBERT, G. U.: Ann. Phys. **6**, 163 (1949).