

**2. Die Einführung
eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in
die Einsteinsche Gravitationstheorie und das
Gravitationsfeld einer schweren Kugel;
von Gustav Mie.**

1. Die Einsteinsche Gravitationstheorie bringt die eigentümliche Schwierigkeit mit sich, daß die gewöhnlichen praktischen Definitionen der geraden Linie und der Längengleichheit unbrauchbar werden. Die praktische Durchführbarkeit der ganzen Geometrie beruht auf der Existenz unveränderlicher Körper, die man an den verschiedensten Orten und zu den verschiedensten Zeiten als Maßstäbe benutzen kann, um die zu messenden Abstände irgendwelcher Raumpunkte mit ihrer Länge zu vergleichen. Ebenso braucht man zur Vergleichung von Zeitintervallen unveränderliche physikalische Vorgänge (Schwingungen). Daß man solche unveränderlichen Maßstäbe für Längen und Zeiten praktisch einwandfrei herstellen kann, beruht letzten Grundes auf der Unveränderlichkeit der Atome und der Unabhängigkeit ihrer Beschaffenheit von Ort und Zeit.

Die Existenz absolut unveränderlicher Atome galt als eine Selbstverständlichkeit, solange man glaubte, zwischen den „von Materie erfüllten“ Teilchen und dem sie umgebenden „absolut leeren Raum“ scharf unterscheiden zu können. Nun wissen wir aber, daß diese Auffassung nicht richtig ist, daß vielmehr der sogenannte leere Raum als Weltäther selber der Schauplatz mannigfacher physikalischer Vorgänge ist und daß er überall auch in die Vorgänge, die man speziell als materielle Vorgänge bezeichnet, ganz wesentlich mit eingreift. Sobald man aus diesen Erkenntnissen die notwendige Konsequenz zieht und die scharfe Abgrenzung zwischen „Materie“ und „leerem Raum“ fallen läßt, gelangt man dazu, in einer nunmehr zu erstrebenden „Theorie der Materie“ die materiellen Teilchen nur als Stellen im Äther aufzufassen, an welchen eine Zusammen-

ziehung ganz enormer Energiemengen auf einen winzigen Raumteil stattfindet. Sie können dann keine absolut unveränderlichen Atome sein. Man muß vielmehr mit Bestimmtheit erwarten, daß diese Energieknoten im Äther sich verändern, wenn sie von Gegenden, wo der Äther an und für sich feldfrei ist, in Gebiete überführt werden, wo von vornherein starke elektromagnetische oder Gravitationsfelder vorhanden sind. Es ist eines der wichtigsten Probleme der „Theorie der Materie“, eine Erklärung dafür zu finden, daß sich trotzdem in Wirklichkeit die materiellen Teilchen fast wie feste harte Partikelchen verhalten, die von dem Vorhandensein irgendwelcher Felder so wenig beeinflußt werden, daß man ihre Veränderungen mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden experimentellen Hilfsmitteln noch nicht beobachtet hat.¹⁾ Für die Gravitationsfelder ist dieses Problem durch die Einsteinsche Gravitationstheorie vollständig gelöst. Nach dieser Theorie sind die Veränderungen der materiellen Teilchen in einem Gravitationsfeld ganz allein durch das Gravitationspotential bedingt. Die Feldstärke des Gravitationsfeldes kommt lediglich als Gefälle des Gravitationspotentials in dem Teilchen zur Geltung, so daß in einem Gravitationsfeld nach Maßgabe dieses Gefälles die Veränderung des Teilchens mehr oder weniger inhomogen ist. Die Veränderungen selber bestehen nach der Einsteinschen Theorie nur in einer Veränderung sämtlicher Maßeinheiten, man kann sagen: sie bestehen in einer Deformation des von dem Teilchen und den in ihm sich abspielenden Vorgängen erfüllten kleinen Raum-Zeitgebietes. Das Gravitationspotential selber ist ein vierdimensionaler Tensor, seine Komponenten seien im folgenden mit $\omega^{\mu\nu}$ bezeichnet. Ich will die aus diesen $\omega^{\mu\nu}$ gebildete Determinante mit ω bezeichnen, ferner seien die Größen $\omega_{\mu\nu}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{wo} \\ \sum_i \omega_{\mu i} \cdot \omega^{i\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \\ \delta_{\mu}^{\mu} = 1 \text{ und } \delta_{\mu}^{\nu} = 0, \mu \neq \nu. \end{array} \right.$$

Endlich führe ich noch ein:

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 551. 574. 596. 1917.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} = \sqrt{\omega} \cdot \omega_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} = \frac{\omega^{\mu\nu}}{\sqrt{\omega}}, \end{array} \right.$$

so daß also auch

$$\sum g_{\mu i} \cdot g^{i\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \text{.)}$$

Ein Raum-Zitelement, das im gravitationsfreien Gebiet die Form einer vierdimensionalen Kugel vom Radius 1 hat, bekommt durch den Einfluß des Gravitationspotentials $\omega^{\alpha\nu}$ die Form eines Ellipsoides, dessen Gleichung lautet:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \cdot \xi_1^2 + g_{22} \cdot \xi_2^2 + g_{33} \cdot \xi_3^2 + g_{44} \cdot \xi_4^2 + 2g_{23} \cdot \xi_2 \xi_3 \\ + 2g_{31} \cdot \xi_3 \xi_1 + 2g_{12} \cdot \xi_1 \xi_2 + 2g_{14} \cdot \xi_1 \xi_4 \\ + 2g_{24} \cdot \xi_2 \xi_4 + 2g_{34} \cdot \xi_3 \xi_4 = \pm 1. \end{array} \right.$$

Das Vorzeichen ist, je nachdem es sich um raumartige oder um zeitartige Radienvektoren handelt, als + oder als - zu wählen. Im gravitationsfreien Gebiet nimmt das Gravitationspotential den skalaren Wert 1 an, $\omega^{\alpha\nu} = \delta_{\alpha}^{\nu}$, entsprechend ist dann auch $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$.

Sollen in einem Gravitationsfeld Längen und Zeiten bestimmt werden, so muß man an den mit den deformierten Atomen direkt gemessenen Werten nach Maßgabe des Gravitationspotentials an der betreffenden Stelle erst noch Korrekturen anbringen. Man muß also zur Bestimmung der richtigen Werte von Längen und Zeiten das Gravitationspotential schon haben. Dazu aber muß man ein Koordinatensystem besitzen, denn das Potential kann nur als Funktion der Raum-Zeitkoordinaten gegeben sein. Da man nun dieses Koordinatensystem nicht durch praktisch-geometrische Messungen, die sich auf die Annahme unveränderlicher Atome stützen, bekommen kann, so muß man sich fürs erste mit einer willkürlichen Nummerierung der Raum-Zeitpunkte begnügen. Um ein für die physikalischen Anwendungen brauchbares Koordinatennetz zu ge-

1) Da ich im folgenden öfters das Buch von H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, zitiere, sei hier gleich bemerkt, daß meine $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ das umgekehrte Vorzeichen haben, wie die entsprechend bezeichneten Größen bei Weyl. Ferner ist in diesem Buch, wie auch in den Einsteinschen Veröffentlichungen die Determinante der $g_{\mu\nu}$ mit g bezeichnet, es ist leicht zu sehen, daß $\omega = g$.

winnen, geht man am besten von der fundamentalen Tatsache aus, daß das Tensorpotential $\omega^{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes auch in den stärksten Feldern, die in der Wirklichkeit vorkommen, nur um ganz winzig kleine Beträge von dem skalaren Wert 1 abweicht. Es sind also auch die vier Werte g_{11} , g_{22} , g_{33} , g_{44} von der 1, und die $g_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, von der 0 praktisch kaum zu unterscheiden. Wir legen nun durch einen geeignet gewählten Koordinatenanfang vier aufeinander senkrechte Koordinatenachsen, indem wir die Methoden der praktischen Geometrie, die auf der Annahme der Unveränderlichkeit der Atome beruhen, zur Konstruktion der Geraden und der senkrechten Winkel benutzen. Die so konstruierten Geraden und Winkel werden wir mit Einstein als die natürlichen Geraden und Winkel bezeichnen. Die Konstruktionsmethoden sind für räumliche Geraden jedem, der einmal geometrisch gezeichnet hat, so geläufig, daß ich sie hier wohl nicht zu erörtern brauche. Eine zeitliche natürliche Gerade wird von dem Schwerpunkt eines materiellen Körpers beschrieben, wenn auf ihn keine Kräfte wirken. Ruht der Punkt in dem Koordinatenanfang, so beschreibt er eine zeitliche Gerade, die auf den drei zur Zeit $t = 0$ konstruierten räumlichen Koordinatenachsen senkrecht steht. Wir denken uns nun weiter die Koordinatenachsen in lauter „natürlich“ gleiche Teile geteilt, beispielsweise die drei räumlichen Achsen in Zentimeter, die zeitliche Achse in die entsprechende Zeiteinheit: $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Sek. Wir können uns diese Teilung immer so fein denken, daß in dem kleinen vierdimensionalen Einheitswürfel am Koordinatenanfang die Geometrie auch mit den feinsten jeweils praktisch zur Verfügung stehenden Mitteln von der Euklidischen bzw. Minkowskischen Geometrie nicht zu unterscheiden ist. Schreitet die Verfeinerung der Meßmethoden fort, so macht man die Teilung entsprechend feiner, so daß unsere Bedingung für den Würfel im Koordinatenanfang immer erfüllt bleibt. Wir wollen nun zunächst die beiden Koordinatenachsen 1 und 2 betrachten. In der Nähe des Koordinatenanfanges bestimmen sie eine Ebene, in welcher die eine quadratische Seitenfläche des Würfels liegt. Wir verlängern die beiden anderen Seiten dieses Quadrates zu beliebigen langen, natürlichen Geraden 1' und 2' und bringen auf diesen beiden zu den Achsen 1 und 2 „parallel“ laufenden Geraden eine ganz gleiche Teilung an, wie auf den Achsen

selber. Legen wir durch je zwei entsprechende Punkte von 1 und 1' und ebenso von 2 und 2' immer je eine natürliche Gerade, so bekommen wir eine Art ebenes Koordinatennetz.¹⁾ Jedoch wird sich in etwas größeren Entfernungen vom Koordinatenanfang der Einfluß der Deformationen durch das Gravitationsfeld in der Weise bemerkbar machen, daß sich die Netzfäden in den Netzknoten nicht richtig schneiden, sondern nur dicht aneinander vorbeikreuzen. Da das Gravitationspotential nur sehr wenig von dem skalaren Wert 1 verschieden ist, so sind die Mängel des unter der Annahme unveränderlicher Atome konstruierten Netzes auch in weiten Gebieten des Raumes nur sehr klein. Man denke sich nun an jedem der etwas mangelhaften Netzknoten einen Punkt zwischen den beiden sich kreuzenden Geraden, an welchem beide sehr dicht vorbeigehen, und betrachte diesen mit einer gewissen Willkürlichkeit gewählten Punkt als den eigentlichen Netzknoten. Die so festgelegten Netzknoten definieren dann zusammen, wenn man das Netz unendlich dicht macht, die Koordinatenebene (1. 2.). Wir wollen die wirklich durch die Netzknoten hindurchlaufenden Linien als die „richtigen“ korrigierten Koordinatengeraden auffassen im Gegensatz zu den unkorrigierten „natürlichen Geraden“. In derselben Weise konstruieren wir mit ähnlichen Willkürlichkeiten Koordinatenebenen (1. 3.) und (2. 3.) mit Koordinatennetzen darin, ferner drei sehr benachbarte Ebenen (1' 2') sowie (1' 3') und (2' 3'), welche in der Nähe des Koordinatenanfanges in die entsprechenden Seitenflächen des kleinen vierdimensionalen Einheitswürfels übergehen. Auch in diesen drei sehr benachbarten Ebenen denken wir uns Koordinatennetze ausgeführt. Legen wir schließlich durch je zwei entsprechende Punkte der Ebenen (1. 2.) und (1' 2'), ebenso (1. 3.) und (1' 3'), endlich auch (2. 3.) und (2' 3'), je eine natürliche Gerade, so bekommen wir ein dreidimensionales Koordinatennetz, welches aber denselben Mangel

1) Ich beschränke mich in dieser Untersuchung der Einfachheit halber auf den Fall, daß der leere Raum an sich euklidisch ist. Bekanntlich hat Einstein seine Theorie in der Abhandlung „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“ (Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin, Jahrgang 1917, S. 142) auf den Fall ausgedehnt, daß der dreidimensionale leere Raum sphärisch ist. Die Übertragung meiner Betrachtungen auf diesen Fall bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

richtiger Netzknoten aufweist, wie das aus natürlichen Geraden vorhin konstruierte zweidimensionale Netz. Die natürlichen Geraden des dreidimensionalen Netzes schneiden sich wenigstens in größeren Entfernungen von den Achsen nicht mehr genau in Netzknoten, sondern sie kreuzen nur an den Knotenstellen dicht aneinander vorbei. Man wählt nun wieder mit einiger Willkür an jeder Knotenstelle einen Punkt, an welchem die drei Koordinatenlinien sehr dicht vorbeigehen, als den eigentlichen Netzknoten, legt durch das so bestimmte System von Netzknoten Linien, die man im Gegensatz zu den natürlichen Geraden als die richtigen korrigierten Geraden des Koordinatennetzes zu bezeichnen hat. Macht man die Maschen des Netzes unendlich klein, so bilden die gewählten Netzknotenpunkte die dreidimensionale Koordinatenebene (1. 2. 3.). Genau ebenso kann man die anderen dreidimensionalen Ebenen, nämlich (2. 3. 4.), ferner (3. 1. 4.) und (1. 2. 4.) mit ihrem ganzen Koordinatennetz konstruieren. Es ist leicht zu sehen, wie man von da aus weiter zu einem vierdimensionalen Koordinatennetz kommt, in welchem überall in einem ziemlich weiten Bereich um den Koordinatenanfang herum, die korrigierten geraden Koordinatenlinien nur wenig von natürlichen Geraden abweichen, in welchem also auch die natürlichen Geraden an den Netzknoten überall sehr nahe vorbeikreuzen.

Hat man auf diese Weise, nicht ohne einige Willkürlichkeit, ein Koordinatennetz konstruiert, so kann man weiter so verfahren, daß man die Deformationen der Atome und der Atomvorgänge bestimmt, indem man die gewählten Koordinatenlinien als die richtigen Geraden betrachtet. Die Abweichungen der natürlichen unkorrigierten Geraden von ihnen geben die Möglichkeit, überall den Deformationstensor, dessen Komponenten ich $g_{\mu\nu}$ nennen will, zu berechnen. Für die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) einer natürlichen Geraden bestehen nämlich die vier Differentialgleichungen¹⁾:

$$(4) \quad \frac{d^2 x_i}{d p^2} + \sum_{h, k} \begin{Bmatrix} h k \\ i \end{Bmatrix} \frac{d x_h}{d p} \cdot \frac{d x_k}{d p} = 0,$$

wo p ein den Punkten der Kurve zugeordneter Parameter ist, z. B. die Bogenlänge von einem bestimmten Kurvenpunkt an,

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 102.

wo ferner die $\left\{ \begin{smallmatrix} h k \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ die Christoffelschen Symbole¹⁾ bedeuten:

$$(5) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} h k \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_j g^{ij} \cdot \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j}.$$

Im folgenden werde ich mich in allen Formeln, die ich gelegentlich noch brauche, der von Einstein eingeführten einfacheren Schreibweise bedienen, in welcher die Summenzeichen einfach weggelassen werden. Es soll also ein für allemal festgesetzt sein, daß ein Ausdruck, in welchem ein Indexzeichen doppelt vorkommt, über diesen Index von 1 bis 4 zu summieren ist. Nach dieser Schreibweise sehen die Gleichungen (4) und (5) folgendermaßen aus:

$$(4) \quad \frac{d^2 x_i}{d p^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} h k \\ i \end{smallmatrix} \right\} \cdot \frac{d x_h}{d p} \cdot \frac{d x_k}{d p} = 0.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} h k \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ij} \cdot \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} \right).$$

Um noch ein Beispiel zu bringen, sei angeführt:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \mu r \\ r \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mu 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}.$$

In den Formeln (4) und (5) bedeuten, um es noch einmal deutlich hervorzuheben, die $g_{\mu\nu}$ die Komponenten des Tensors der Deformation der Atome und der Atomvorgänge in bezug auf das von uns konstruierte und als geradlinig-orthogonal angenommene Koordinatensystem, die $g^{\mu\nu}$ sind Funktionen der $g_{\mu\nu}$, die sich aus den Gleichungen

$$g_{i\mu} \cdot g^{i\nu} = \delta_\mu^\nu$$

berechnen lassen. Wir wollen nun sehen, wie man die Werte $g_{\mu\nu}$ finden kann. Da die natürlichen Geraden uns empirisch gegeben sind, so sind auch die Differentialquotienten dx_i/dp und $d^2 x_i/dp^2$ durch Messungen zu ermitteln, und die Gleichungen (4) geben uns, wenn wir eine bestimmte natürliche Gerade herausgreifen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchten Tensorkomponenten $g_{\mu\nu}$ mit empirisch bestimmten Koeffizienten. Gehört die herausgegriffene Gerade zu einer Schar von Geraden, die Raum und Zeit lückenlos ausfüllen, etwa zu der Schar aller natürlichen Ge-

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 98.

raden, die auf einer dreidimensionalen Koordinatenebene senkrecht stehen, so bekommt man die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4) als Funktionen der Koordinaten, die man aus den Ergebnissen der praktischen Messungen bestimmen kann. Wenn man in derselben Weise andere Scharen von natürlichen unkorrigierten Geraden benutzt, so bekommt man andere Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$, und man kann sich so immer eine genügende Zahl von Gleichungen verschaffen, um schließlich die $g_{\mu\nu}$ vollständig als Funktionen der (x_1, x_2, x_3, x_4) zu gewinnen. Wie man diese Berechnung des Deformationstensors $g_{\mu\nu}$ wirklich durchführen kann, werden wir weiter unten an einem einfachen Beispiel sehen.

Aus den so erhaltenen Werten $g_{\mu\nu}$ kann man nun aber ohne weiteres nach (1) und (2) das Gravitationspotential berechnen:

$$\omega^{ik} \cdot g_{ih} = \sqrt{g} \cdot \delta_h^k.$$

Denn bei Annahme dieses Gravitationspotentials sind zunächst einmal die Deformationen der von dem Gravitationsfeld erfüllten Raum-Zeitgebiete gerade die, welche die Einsteinsche Gravitationstheorie verlangt. Außerdem aber erfüllen die $\omega^{\mu\nu}$ auch die Grundgleichungen des Gravitationsfeldes, immer vorausgesetzt natürlich, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie zutrifft, denn nach dieser Theorie müssen die Abweichungen der Geometrie der natürlichen Geraden von der Minkowskischen Geometrie folgendermaßen mit der Anwesenheit schwerer Körper verknüpft sein: Man berechne 40 Größen $\mathfrak{f}_{\mu\nu}^a$, die wir späterhin als die 40 Komponenten des Gravitationsfeldes bezeichnen werden, nach den Formeln:

$$(6) \quad \mathfrak{f}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} - \frac{1}{4} \delta_\nu^a \cdot \left\{ \begin{matrix} \mu \tau \\ \tau \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \delta_\mu^a \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu \tau \\ \tau \end{matrix} \right\},$$

wo die Christoffelschen Symbole nach (5) zu berechnen sind, dann ist:

$$(7) \quad \frac{\partial \mathfrak{f}_{\mu\nu}^a}{\partial x_a} = -h_{\mu\nu},$$

wo $h_{\mu\nu}$ die $\mu\nu$ -Komponente des Tensors „Dichtigkeit der schweren Masse“ bedeutet. Diese Dichtigkeit der schweren Masse kann man aus der Weltfunktion H des gesamten Ätherzustandes an der betreffenden Stelle berechnen als:

$$(8) \quad h_{\mu\nu} = - \frac{\partial H}{\partial \omega^{\mu\nu}}.$$

Das von uns ziemlich willkürlich, angenommene Koordinatensystem ist also für die Physik sofort brauchbar, insofern in ihm die Grundgleichungen der Physik die einfachste Form annehmen, die sie haben können. Denn auch die Gleichungen für das elektromagnetische Feld haben in ihm die bekannte einfache Form. Es ist eben die charakteristische Eigentümlichkeit der Einsteinschen Theorie, daß die Grundgleichungen für jedes ganz beliebig gewählte Koordinatensystem ihre Form unverändert behalten. Oder mit anderen Worten: Die Grundgleichungen der Physik sind, wenn man das Gravitationspotential in der eben beschriebenen Weise definiert, für jede beliebige Koordinatentransformation invariant.

2. Danach könnte es so scheinen, als ob jedes beliebige Koordinatensystem für Raum und Zeit völlig gleichberechtigt wäre. Wir haben aber schon im vorhergehenden eine wesentliche Beschränkung eingeführt, deren Notwendigkeit jeder ohne weiteres zugeben wird, indem wir verlangten, daß die korrigierten Geraden des anzunehmenden Koordinatensystems in einem weiten Gebiet um den Nullpunkt herum von den natürlichen Geraden nur äußerst wenig abweichen dürfen. Würde man diese Beschränkung nicht machen, so würde man zu solchen physikalischen Monstra geführt werden, wie ich in meinen Göttinger Vorträgen¹⁾ eines in dem sich ohne alle reelle Ursachen schlängelnden Stabe geschildert habe, oder es würden Wellen vorkommen können, die sich, ohne Energie zu übertragen, durch den Raum fortpflanzen²⁾, dergleichen Unsinnigkeiten kann es noch mehr geben. Wir müssen das Koordinatensystem so wählen, daß auch die allerwinzigsten Spuren solcher physikalischer Sinnlosigkeiten ausgeschlossen werden.

Wie notwendig für die Physik die Wahl eines in dieser Beziehung einwandfreien Koordinatensystems ist, erkennt man besonders gut an einem einfachen Beispiel, an welchem ich zugleich das bisher Gesagte erläutern will, nämlich dem Gravitationsfeld einer im Raume ruhenden Kugel.

Als Koordinatenanfang wähle ich den Kugelmittelpunkt O . Dieser Punkt liefert, wenn man sich ihn im Ablauf der Zeit

1) G. Mie, Physik, Zeitschr. 18. S. 599. 1917.

2) A. Einstein, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 696.

vorstellt, eine zeitartige Gerade, welche wir als Zeitachse wählen. Außerdem konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ nach den Methoden der praktischen Geometrie drei aufeinander senkrechte Gerade durch O , welche die x -, y - und z -Achse darstellen. Weiter konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ein vollständiges Koordinatennetz. Erfahrungsgemäß wird die räumliche Geometrie von dem Gravitationsfeld so wenig beeinflusst, daß man auch mit den allerfeinsten Mitteln von der Unvollkommenheit der Netzknoten des natürlich konstruierten Koordinatensystems nichts bemerken kann. Das korrigierte Koordinatennetz in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ist also praktisch völlig identisch mit dem unkorrigierten natürlichen Netz. Ich teile nun mit Hilfe einer Uhr die Zeitachse in lauter gleiche Abschnitte und lege durch jeden Teilpunkt einen Raum $t = \text{const.}$ mit einem Koordinatennetz, das genau so liegt, wie das im Raume $t = 0$. Ein Punkt $(x, y, z) = \text{const.}$ beschreibt dann eine zeitartige Linie, die überall von der Zeitachse gleichen Abstand hat, eine „Parallele“ zur Zeitachse. Aber diese Parallele ist nicht identisch mit einer natürlichen Geraden. Beobachten wir einen freischwebenden schweren Massepunkt, der zur Zeit $t = 0$ im Punkte (x, y, z) ruht, so nähert er sich, wenn keine Kräfte (selbstverständlich außer der Schwerkraft) auf ihn wirken, wenn er also eine natürliche zeitartige Gerade beschreibt, nach dem Fallgesetz beschleunigt dem Kugelzentrum O . Wollen wir also das vierdimensionale Koordinatennetz nach den natürlichen Methoden konstruieren, so finden wir, daß in einiger Entfernung von der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ die unkorrigierten zweiartigen Koordinatenlinien an den ihnen entsprechenden Netzknoten des raumartigen Netzes in der dreidimensionalen Ebene $t = \text{const.}$ vorbeikreuzen. Die zeitartigen natürlichen Koordinatenlinien werden von solchen schweren Punkten beschrieben, die bis zur Zeit $t = 0$ aufwärts steigen, im Punkte $t = 0$ ihre größte Höhe erreichen, und von da an fallen. Die so definierten Zeitlinien stehen auf der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ senkrecht, weil zur Zeit $t = 0$ der Punkt die Geschwindigkeit Null hat, d. h. die von ihm beschriebene zeitartige Linie keine raumartigen Komponenten hat. Zu den $t = 0$ unendlichen benachbarten Zeiten gehen diese zeitartigen Linien durch die entsprechenden

Netzknoten genau hindurch, wenn man von unendlich kleinen Abweichungen zweiter Ordnung absieht.

Daß die zeitartigen Linien gegenüber den raumartigen Linien eine besondere Rolle spielen, liegt an der Konstitution der Welt, wenn man sie vierdimensional betrachtet. Die materiellen Körper bilden in der Raum-Zeit massive Zylinder, die sich in zeitartiger Richtung beiderseits ins Unendliche erstrecken, während ihre raumartigen Querschnitte (die von den Körpern erfüllten dreidimensionalen Raumgebiete) verhältnismäßig sehr eng begrenzt sind. Man muß dabei beachten, daß eine Zeitstrecke von nur 1 Sekunde Länge gleich zu setzen ist einer raumartigen Strecke von 300000 km. Danach ist es leicht zu verstehen, daß an zeitlichen Linien, die in unbegrenzter Ausdehnung nahe an dem schweren Körper verlaufen, die Abweichungen der natürlichen Geometrie von der Minkowskischen Geometrie viel eher zu beobachten sind, als an raumartigen Linien, die nur über eine kurze Strecke dem Gravitationszentrum nahe sind und im allgemeinen in fast gravitationsfreien Gebieten verlaufen.

Wollte man nun einfach nach der oben gegebenen Anweisung zur Konstruktion des vierdimensionalen Koordinatennetzes verfahren, so hätte man als Netzknoten irgendwelche Punkte zu wählen, die zwischen den Punkten, wo sich die raumartigen natürlichen Geraden ungefähr schneiden, und zwischen der daran vorbeikreuzenden zeitartigen natürlichen Geraden liegen. So willkürlich darf man nun aber in der Physik nicht verfahren. Man *muß* vielmehr als korrigierte zeitartige Geraden die vorhin als Parallelkurven zur Zeitachse definierten Linien wählen, die überall durch entsprechende Netzknoten der durch die Punkte der Zeitachse hindurchgelegten dreidimensionalen ebenen Koordinatennetze gehen. Das heißt mit anderen Worten, man *muß* die Punkte der schweren Kugel selbst und alle Punkte, die, natürlich gemessen, relativ zu ihr ruhen, als ruhend ansehen. Wollte man das Koordinatennetz anders konstruieren, so würden sich die Punkte der Kugel selber bewegen, ohne daß diese Bewegung eine andere Ursache hätte, als die Wahl des Koordinatennetzes. Diese Wahl des Koordinatennetzes verstieße gegen den obersten Grundsatz der Vernunft, keine anderen Veränderungen in der Welt und im Weltgeschehen anzunehmen, als solche, die durch den objektiven Tatbestand

unbedingt notwendig begründet sind. Diesen Grundsatz nennt Kant die *Maxime der Vernunft*. Sie ist es, die uns zwingt, den ohne reelle Ursache sich schlängelnden Stab und die Gravitationswellen ohne Energieübertragung zu verwerfen. Ebenso zwingt sie uns, ein Koordinatennetz, in welchem sich die Punkte unserer Kugel noch bewegen, als „unvernünftig“ zu verwerfen.

3. Das Koordinatennetz im Felde einer ruhenden schweren Kugel ist danach schon so weit festgelegt, daß wir „praktisch“ keine Wahl mehr haben. In der Tat sind denn auch praktisch im Felde der Erde Ort und Zeit überall ganz eindeutig zu definieren. Ich will nun zeigen, wie man das Gravitationspotential aus den Abweichungen der natürlichen von den vernünftig korrigierten Zeitgeraden berechnen kann. Eine vernünftig korrigierte Zeitgerade beschreibt ein Punkt (x_0, y_0, z_0) , der sich relativ zur Kugel immer an derselben Stelle befindet. Dieser Punkt (x_0, y_0, z_0) sei der Kulminationspunkt eines senkrecht aufwärts geworfenen Massenteilchens, welches sich zur Zeit t im Punkte (x, y, z) befinde, zur Zeit $t = 0$ gerade (x_0, y_0, z_0) erreiche und dann wieder frei herunterfalle. Dieses Massenteilchen beschreibt eine natürliche Zeitgerade, welche die vernünftige Gerade in dem Punkt $(x_0, y_0, z_0, 0)$ berührt. In einem unendlich benachbarten Punkt $(x_0, y_0, z_0, i dt)$ hat die natürliche Zeitgerade von der vernünftigen Geraden eine Abweichung, die unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wir haben demnach an dieser Stelle in die Gleichung (4) einzusetzen:

$$d x_1 = d x_2 = d x_3 = 0, \quad d x_4 = i \cdot d t.$$

Wir bekommen so für das Gravitationspotential die Gleichungen:

$$d^2 x = \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} \cdot d t^2, \quad d^2 y = \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 2 \end{matrix} \right\} \cdot d t^2, \quad d^2 z = \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 3 \end{matrix} \right\} \cdot d t^2,$$

$$d^2 t = \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 4 \end{matrix} \right\} \cdot d t^2.$$

Beachtet man nun, daß in außerordentlich guter Näherung $g^{ij} = \delta_i^j$, daß ferner alle Differentialquotienten nach $x_4 = i \dot{t}$ Null sind, so ergibt sich:

$$\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x}, \quad \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial y}, \quad \left\{ \begin{matrix} 44 \\ 3 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial z},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 44 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0,$$

wenigstens mit äußerst guter Näherung. $-\frac{1}{2}g_{44}$ ist also das, was man das Newtonsche Gravitationspotential nennen könnte, sein Gradient ist die Fallbeschleunigung. Setzt man die in der Nähe einer schweren Kugel empirisch ermittelten Werte für d^2x/dt^2 usw. in die Gleichungen ein, so bekommt man für g_{44} Differentialgleichungen, durch welche es vollkommen bestimmt ist. Bekanntlich ergibt sich, jedenfalls mit einer Annäherung, welche die Beobachtungen durchweg mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo a eine Konstante ist, die von der schweren Masse der Kugel abhängt. Praktisch ist a/r immer winzig klein gegen 1. Die anderen Komponenten des Deformationstensors lassen sich aus praktischen physikalischen oder geometrischen Messungen noch nicht ermitteln, aber nur aus dem Grunde, weil die räumlichen Deformationen unmeßbar klein sind und deswegen die empirischen Unterlagen für die Aufstellung der zur Berechnung notwendigen Gleichungen zur Zeit noch fehlen. Sehen wir über diesen Mangel zunächst hinweg, so haben wir die auf S. 52 allgemein gestellte Aufgabe der Ermittlung der $g_{\mu\nu}$ in unserm Spezialfall wirklich gelöst.

4. Ich will jetzt annehmen, die Meßkunst sei so weit fortgeschritten, daß man die räumlichen Deformationen ebenfalls erkennen kann, daß man also feststellen kann, in welchen Entfernungen die natürlichen unkorrigierten räumlichen Koordinatenlinien an den Knotenstellen aneinander vorbeikreuzen, anstatt sich wirklich zu schneiden. Dann wäre die Wahl des Koordinatensystems nicht mehr so eindeutig, wie wir bisher angenommen haben. Denn dann müßte man erst noch über die Lage der „richtigen korrigierten“ Netzknoten des räumlichen Koordinatensystems Annahmen machen, die bis zu einem gewissen Grade wieder willkürlich wären. Daß man aber auch hier nicht völlig willkürlich vorgehen kann, sieht man daraus, daß die Koordinatengeraden in der Umgebung eines Körpers, der als kugelsymmetrisch beschrieben werden kann, auch so definiert werden müssen, daß der Körper in dem Koordinatensystem wirklich kugelsymmetrisch ist. Denn im anderen Falle handelte man wieder gegen die oben ausgesprochene Maxime unserer Vernunft, indem man lediglich durch die Wahl des Koordinaten-

systems eine Unsymmetrie bekäme, die gar nicht im objektiven Tatbestand begründet ist.

Es ist nun die Frage, ob dieser Grundsatz ausreicht, um, abgesehen natürlich von den immer erlaubten Lorentzischen Transformationen, ein einziges Koordinatensystem als das vernünftige oder das physikalisch ausgezeichnete Koordinatensystem festzulegen und damit die vernünftigen Geraden und die vernünftige Teilung der Geraden eindeutig zu definieren.

Es könnte auf den ersten Blick so scheinen, als ob das nicht der Fall wäre. Schwarzschild, der zuerst das Gravitationsfeld einer ruhenden kugelig-symmetrischen schweren Masse durch Integration der Einsteinschen Differentialgleichungen (7) des Schwerefeldes berechnete¹⁾, fand, daß auch bei Hinzuziehung der Annahmen, daß

1. alle im Problem vorkommenden Größen von x_4 unabhängig sind,
2. bei Annahme eines Polarkoordinatensystems alle Größen nur vom Radiusvektor abhängen,
3. das Potential in großen Entfernungen vom Gravitationszentrum in den skalaren Wert 1 ($g_{ik} = \delta_i^k$) übergeht,

doch immer noch Willkürlichkeiten bleiben, daß also durch diese Bedingungen immer das Koordinatensystem noch nicht festgelegt ist. Zunächst fügt Schwarzschild deswegen ohne besondere Begründung noch die weitere Annahme $g_{h4} = 0$, $h = 1, 2, 3$, hinzu, deren Bedeutung wir im folgenden einsehen werden. Dann bleibt immer noch eine willkürliche Konstante in der Lösung. So ergibt sich für die 4-4-Komponente:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}},$$

wo über a noch ganz willkürlich verfügt werden darf.²⁾ Setzt man $a = 0$, so wird der Wert g_{44} mit dem oben von uns als sehr gute Annäherung gefundenen Wert

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 186.

2) Übrigens bekommt Schwarzschild diese spezielle Form der Funktion von r nur deswegen, weil er verlangt, daß die Determinante g konstant den Wert 1 habe. Läßt man diese durch nichts begründete Forderung fallen, so findet man für g_{44} eine ganz willkürliche Funktion von r , die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, daß sie überall äußerst wenig von $1 - a/r$ abweicht.

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r}$$

identisch. Mit den praktischen Messungen sehr wohl vereinbar wäre es aber auch, wenn a nur eine Länge bedeutet, die gegen r sehr klein ist. Schwarzschild setzt beispielsweise $a = a$, was deswegen möglich ist, weil a die Dimension einer Länge hat und a/r praktisch immer äußerst klein gegen 1 ist. Dagegen rechnet Hilbert¹⁾ mit der Lösung $a = 0$, welche den Vorteil der größeren Einfachheit hat. Beide Lösungen unterscheiden sich also nur durch eine etwas verschiedene Wahl der richtigen Netzknoten, an denen die unkorrigierten natürlich konstruierten raumartigen Koordinatenlinien dicht vorbeikreuzen.

5. So ist die Sachlage denn im höchsten Grade unbefriedigend, da man gar nichts darüber weiß, nach welchem Prinzip denn eigentlich das Koordinatennetz, in welchem sich $a = a$, und das, in welchem sich $a = 0$ ergibt, gewählt ist.

Offenbar genügt es nicht, wenn man nur verlangt, daß das Koordinatensystem so gewählt wird, daß alle nicht im objektiven Tatbestand begründeten Unregelmäßigkeiten ausgeschlossen sind. Unsere Vernunft verlangt weiter noch, daß wir im Besitz eines einheitlichen Prinzips zur Konstruktion des Koordinatensystems sind, welches wir anwenden können, ohne von vorneherein zu wissen, welche Symmetrieeigenschaften das Gravitationsfeld etwa haben mag, und welches ganz von selber zu einem vernünftigen, durch den objektiven Tatbestand begründeten Weltbild führt.

Ein allgemeines Prinzip der Konstruktion von Koordinatennetzen, welches diese Bedingung erfüllt, habe ich in meinen Göttinger Vorträgen angegeben.²⁾ Ich bin freilich nicht imstande zu beweisen, daß es das einzig mögliche brauchbare Konstruktionsprinzip sei. Es lautet folgendermaßen: Wenn man die natürlich konstruierten Geraden als kürzeste Verbindungen zweier ihrer Punkte auffaßt und wenn man die natürlich gewonnene Teilung von Längen und Zeiten, ohne sie zu korrigieren, als richtig ansieht, also auch überall mit konstanter Lichtgeschwindigkeit (gleich 1) rechnet, so kann

1) D. Hilbert, *Nachr. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse* vom 23. Dezember 1916. S. 18.

2) G. Mie, *Physik. Zeitschr.* 18. S. 601. 1917.

man die vierdimensionale Raum-Zeit als ein geometrisches Gebilde auffassen, in welchem eine ganz allgemeine Riemannsche Geometrie an die Stelle der speziellen Minkowskischen Geometrie getreten ist. Es gibt nun einen allgemein gültigen Satz der Geometrie, nach welchem man ein n -dimensionales Gebilde, in welchem eine allgemeine Riemannsche Geometrie herrscht, auffassen kann als ein mehr oder weniger unregelmäßig gekrümmtes Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ Dimensionen enthalten ist. So kann man die Raum-Zeit mit ihrer durch die Anwesenheit schwerer Massen gestörten Geometrie — ich habe sie in meinen Göttinger Vorträgen als Hilbertsche Welt im Gegensatz zu der Minkowskischen Welt bezeichnet — auffassen als ein gekrümmtes vierdimensionales Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von 10 Dimensionen enthalten ist. Und zwar müssen wir uns das Hilbertsche Kontinuum als ein Gebilde denken, welches in weiten Strecken fast genau mit einer vierdimensionalen Ebene zusammenfällt, in der die Minkowskische Geometrie gilt. Diese Ebene muß man sich durchzogen denken von vielen ziemlich scharfen Falten oder Rillen, die in zeitartigen Richtungen beiderseits ins Unendliche laufen. Die Falten stellen die Weltrohren der materiellen Teilchen dar, in der Nähe der Falten zeigt das Hilbertsche Kontinuum Abweichungen von der Ebenheit, welche sich als das Gravitationsfeld der Teilchen bemerkbar machen. Wir wollen nun eine vierdimensionale Ebene konstruieren, welche mit den großen ebenen Gebieten des Hilbertschen Kontinuums, die unendlich weit von den Weltrohren der Teilchen entfernt sind, zusammenfällt, und wir wollen ferner in diese vierdimensionale Ebene, welche wir die Koordinatenebene oder auch die physikalische Welt nennen, die Hilbertsche Welt Punkt für Punkt senkrecht hineinprojizieren. Wenn wir dann dieses Abbild der Hilbertschen Welt beschreiben, so beschreiben wir die uns objektiv gegebene Welt jedenfalls richtig. Die Geraden in der Koordinatenebene wollen wir als die vernünftigen Geraden ansehen und ihre Teilung als die vernünftige Teilung. In der Koordinatenebene ist das Koordinatennetz ohne weiteres bis auf die Lorentzschen Transformationen eindeutig definiert und zugleich liefert uns die Projektion in die Koordinatenebene ein vernünftiges Bild der Welt, welches vollkommen auf den ob-

jektiven Tatbestand begründet ist und keine anderen örtlichen oder zeitlichen Unterschiede aufweist, als die objektiv vorhandenen.

Benutzen wir die so definierten Koordinaten zur Numerierung der Raum-Zeitpunkte an Stelle der vorhin mehr oder weniger willkürlich gewählten x_1, x_2, x_3, x_4 , so müssen zwischen den $g_{\mu\nu}$ vier Bedingungsgleichungen bestehen, durch welche die besondere Wahl des Koordinatensystems ausgedrückt wird. Die Willkür in der Wahl der Numerierung der Raum-Zeitpunkte nach der Einsteinschen Gravitationstheorie bringt es mit sich, daß vier von den physikalischen Grundgleichungen sich aus den übrigen ergeben.¹⁾ Die Zahl der selbständigen Gleichungen ist also um vier kleiner als die Zahl der selbständigen Zustandsgrößen, wenn man keine Vorschrift über die Wahl des Koordinatensystems macht. Bei unserer bestimmten Wahl des Koordinatensystems werden die vier fehlenden Grundgleichungen ersetzt durch die vier Bedingungen, welche die Festlegung des Koordinatensystems mit sich bringt. Wahrscheinlich ist es sehr schwer, diese vier Bedingungen allgemein zu formulieren und mit ihnen zu arbeiten. Ich will nun zeigen, daß man das Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugel lösen kann, ohne die vier Bedingungen explizite zu kennen.

6. Es seien die 10 Koordinaten eines Punktes des Hilbertschen Kontinuums ($x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$), davon seien die vier x die Koordinaten in der „Koordinatenebene“ und die sechs u die Projektionen des Radiusvektors auf die sechs zur Koordinatenebene senkrechten Achsen. Die Gleichungen der „physikalischen Welt“ sind also:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_6 = 0.$$

Das Hilbertsche Kontinuum habe die Gleichungen:

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \dots, \quad u_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Wir wollen das Problem zunächst einschränken auf den Fall der Statik. Dann muß jeder Schnitt $x_4 = \text{const.}$ aus dem Hilbertschen Kontinuum genau dasselbe dreidimensionale Gebilde ausschneiden, ich will es kurz „die dreidimensionale Welt“

1) D. Hilbert, Nachr.d. Kgl. Ges.d. Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse. 20. November 1915. Theorem I. S. 3.

nennen. Keineswegs müssen die Gleichungen des Hilbertschen Kontinuums von x_4 unabhängig sein, aber sie müssen für verschiedene Werte $x_4 = a$ und $x_4 = b$ kongruente Schnitte ergeben. Bezeichnen wir die u -Koordinaten eines Punktes (x_1, x_2, x_3, a) durch u , die des Punktes (x_1, x_2, x_3, b) durch u' , so müssen sich die u' aus den u durch eine orthogonale Transformation ergeben:

$$\begin{aligned} u_1' &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \dots + \alpha_{16} u_6 \\ &\dots \dots \dots \\ u_6' &= \alpha_{61} u_1 + \alpha_{62} u_2 + \dots + \alpha_{66} u_6. \end{aligned}$$

Hier sind also die u Funktionen von (x_1, x_2, x_3, a) , die $\alpha_{\mu\nu}$ sind von den räumlichen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) unabhängig, hängen dafür aber außer von a auch noch von b ab. Wenn wir die Zeit x_4 als einen besonderen Parameter von den anderen Koordinaten aussondern, so können wir sagen: Im Falle des statischen Problems rotiert die dreidimensionale Welt als starres Gebilde um den euklidischen Raum ($u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_6 = 0$), der als Rotationsachse vollkommen in Ruhe bleibt,

Da im Falle eines statischen Problems das Verhalten des Hilbertschen Kontinuums für jeden Wert von x_4 das gleiche sein muß, so muß ferner die Rotationsgeschwindigkeit der dreidimensionalen Welt konstant sein. Um diese Bedingung mathematisch zu formulieren, beachten wir, daß man eine orthogonale Transformation in einem sechsdimensionalen Gebiet durch drei voneinander unabhängige Drehungen in drei aufeinander senkrechten Ebenen beschreiben kann. Eine solche dreifache Drehung läßt sich auffassen als schiefsymmetrischer Tensor mit 15 Komponenten, man könnte sagen als Flächenvektor, das genaue Analogon des sogenannten Sechservektors (Drehung in zwei aufeinander senkrechten Ebenen) im vierdimensionalen Gebiet. Die 15 voneinander unabhängigen Drehungskomponenten reichen ebensowohl zur Beschreibung der orthogonalen Transformation hin, wie die Transformationskoeffizienten $\alpha_{\mu\nu}$ in den oben hingeschriebenen Transformationsformeln. Denn zufolge der Orthogonalitätsbedingungen sind von den $\alpha_{\mu\nu}$ nur 15 voneinander unabhängig.

Ich betrachte nun die infinitesimale Drehung, welche der dreidimensionale Raum in der kleinen Zeit $d x_4$ macht. Das Koordinatensystem der u sei so gelegt, daß in dem Moment

$x_4 = 0$ die drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen (1, 2), (3, 4), (5, 6) gerade mit den drei Drehungsebenen zusammenfallen. Die drei Drehungswinkel seien:

$$a_1 = a_1 \cdot x_4, \quad a_2 = a_2 \cdot x_4, \quad a_3 = a_3 \cdot x_4,$$

wo a_1, a_2, a_3 Konstante sind, also unabhängig von allen vier Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). Die Transformationsformeln lauten nun:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \cdot \cos \alpha_1 + u_2 \cdot \sin \alpha_1, \\ u_2' &= -u_1 \cdot \sin \alpha_1 + u_2 \cdot \cos \alpha_1, \\ u_3' &= u_3 \cdot \cos \alpha_2 + u_4 \cdot \sin \alpha_2, \\ u_4' &= -u_3 \cdot \sin \alpha_2 + u_4 \cdot \cos \alpha_2, \\ u_5' &= u_5 \cdot \cos \alpha_3 + u_6 \cdot \sin \alpha_3, \\ u_6' &= -u_5 \cdot \sin \alpha_3 + u_6 \cdot \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

Durch diese Formeln ist die Bedingung von der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeiten wiedergegeben. Die Größen u_k hängen nur von x_1, x_2, x_3 ab, die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nur von x_4 .

Wir sind nun imstande, den natürlich gemessenen Abstand ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums zu berechnen, von denen der eine durch das Wertesystem (x_1, x_2, x_3, x_4), der andere durch ($x_1 + d x_1, x_2 + d x_2, x_3 + d x_3, x_4 + d x_4$) charakterisiert ist:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum du_k^2.$$

Die Größen du_k berechnen sich aus den soeben hingeschriebenen Transformationsformeln, beispielsweise:

$$\begin{aligned} du_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1 \right) \cdot dx_i \\ &\quad - (u_1 \cdot \sin \alpha_1 - u_2 \cdot \cos \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\ du_2 &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1 \right) \cdot dx_i \\ &\quad - (u_1 \cdot \cos \alpha_1 + u_2 \cdot \sin \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\ \text{usw. } i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte du_k in den Ausdruck für ds^2 ein, so sieht man leicht, daß die drei Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, welche x_4 enthalten, herausfallen, man bekommt also Koeffizienten, die nur von x_1, x_2, x_3 abhängen:

$$ds^2 = \sum d x_i^2 + \sum d x_i \cdot d x_k \cdot f_{ik}(x_1, x_2, x_3)$$

$$i, k = 1, 2, 3, 4,$$

wo die f_{ik} aus den u_k und ihren Ableitungen zu berechnen sind. Beispielsweise ist:

$$f_{44} = a_1^2 \cdot (u_1^2 + u_2^2) + a_2^2 \cdot (u_3^2 + u_4^2) + a_3^2 \cdot (u_5^2 + u_6^2).$$

7. Wir kommen jetzt zu dem Problem der ruhenden, kugelig-symmetrischen schweren Masse. Dieser Symmetrieforderung wird jedenfalls genügt durch die Bedingung, daß die dreidimensionale Welt, d. h. der Schnitt des Hilbertschen Kontinuums mit einer Ebene $x_4 = \text{const.}$, selber kugelig-symmetrisch sei, daß also die u_k nur von der Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ des vom Symmetriezentrum ausgehenden Radiusvektors abhängen sollen. Man darf vermuten, daß diese Bedingung auch notwendig ist, daß sich also keine Abhängigkeit der u_k von den Winkelkoordinaten des Radiusvektors angeben läßt, bei welcher sich in dem Ausdruck für ds^2 die Winkelkoordinaten in ähnlicher Weise wegheben würden, wie vorhin die Zeitkoordinate x_4 . Einen strengen Beweis vermag ich allerdings für die Notwendigkeit der Bedingung noch nicht zu geben. Wir werden aber sehen, daß der Ansatz, der auf ihrer Annahme beruht, zur Lösung des Problems führt, also zur Konstruktion eines Hilbertschen Kontinuums, das die Eigenschaften des Gravitationsfeldes einer Kugel richtig wiedergibt. Auch das spricht für die Notwendigkeit der Bedingung, weil andernfalls das Hilbertsche Kontinuum nicht eindeutig zu bestimmen wäre. Aus unserer Symmetriebedingung ergibt sich:

$$ds^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 + d x_4^2 + f_1(r) \cdot dr^2$$

$$+ 2 \cdot f_2(r) \cdot dr \cdot d x_4 + f_3(r) \cdot d x_4^2,$$

wo f_1, f_2, f_3 leicht aus den $u_k(r)$ und ihren Ableitungen nach r zu berechnen sind.

Setzen wir ein:

$$r \cdot dr = x_1 \cdot d x_1 + x_2 \cdot d x_2 + x_3 \cdot d x_3,$$

so bekommen wir für die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Deformationstensors die folgende Tabelle:

$$(9) \left\{ \begin{array}{llll} 1 + f_1 \cdot \frac{x_1^2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_1}{r}, \\ f_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & 1 + f_1 \cdot \frac{x_2^2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_2}{r}, \\ f_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & 1 + f_1 \cdot \frac{x_3^2}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_3}{r}, \\ f_2 \cdot \frac{x_1}{r}, & f_2 \cdot \frac{x_2}{r}, & f_2 \cdot \frac{x_3}{r}, & 1 + f_3. \end{array} \right.$$

Die Determinante des Tensors $g_{\mu\nu}$, die wir wie oben (S. 48) mit g bezeichnen wollen, ergibt sich als:

$$(10) \quad g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) - f_2^2.$$

Ich will nun die Abkürzungen einführen:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_1 \cdot (1 + f_3) - f_2^2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_1(r), \\ \frac{f_2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_2(r), \\ \frac{f_3 \cdot (1 + f_1) - f_2^2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_3(r), \end{array} \right.$$

$$(11a) \quad 1 - F_1 = \frac{1 + f_3}{g}, \quad 1 - F_3 = \frac{1 + f_1}{g}, \quad F_2 = \frac{f_2}{g}.$$

Dann ergeben sich für den Tensor $g^{\mu\nu}$, der durch die Gleichungen:

$$g_{rh} \cdot g^{rk} = \delta_h^k$$

definiert ist, die Ausdrücke:

$$(12) \left\{ \begin{array}{llll} 1 - F_1 \cdot \frac{x_1^2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_1}{r}, \\ -F_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & 1 - F_1 \cdot \frac{x_2^2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_2}{r}, \\ -F_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & 1 - F_1 \cdot \frac{x_3^2}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_3}{r}, \\ -F_2 \cdot \frac{x_1}{r}, & -F_2 \cdot \frac{x_2}{r}, & -F_2 \cdot \frac{x_3}{r}, & 1 - F_3. \end{array} \right.$$

Nach einer einfachen Rechnung erhält man für die Christoffelschen Ausdrücke (5) folgende Werte:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} h \\ \alpha \end{matrix} \right\} &= \frac{x_\alpha}{r} \cdot \left[\delta_h^k \cdot \frac{F_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \left(f_1' \cdot (1 - F_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cdot f_2' \cdot F_2 - \frac{2 \cdot F_1}{r} \right) \right] \\ \left\{ \begin{matrix} h \\ 4 \end{matrix} \right\} &= \delta_h^k \cdot \frac{F_2}{r} - \frac{1}{2} \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \left(f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_3) + \frac{2F_2}{r} \right) \\ \left\{ \begin{matrix} h \\ \alpha \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot f_3' \cdot \frac{x_h}{r} \cdot \frac{x_\alpha}{r}, \\ \left\{ \begin{matrix} h \\ 4 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - F_3) \cdot f_3' \cdot \frac{x_h}{r}, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ \alpha \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - F_1) \cdot f_3' \cdot \frac{x_\alpha}{r}, \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix} \right\} = +\frac{1}{2} \cdot F_3 \cdot f_3', \\ &h, k, \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \right.$$

In diesen und in den im folgenden noch vorkommenden Gleichungen soll durch den Strich die Differentiation nach r bezeichnet werden. Setzt man die Ausdrücke (6) für die vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes $\mathfrak{t}_{\mu\nu}^\alpha$ ein, so findet man:

$$2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \end{matrix} \right\},$$

$\mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3, 4.$

Hier ist:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_\mu}{r} \cdot (f_1' \cdot (1 - F_1) + f_3' \cdot (1 - F_3) - 2 \cdot f_2' \cdot F_2), \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{g'}{g} \cdot \frac{x_\mu}{r}, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial x_\mu}. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung ergibt schließlich:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_{h\alpha}^\alpha}{\partial x_\alpha} &= \left(\delta_h^k - \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \right) \\ &\quad - \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \frac{1}{2r^2} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{g} \cdot (1 + f_1) \right) - 2r \cdot \frac{g'}{g} \right], \\ 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_{h4}^\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{x_h}{r} \cdot \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{g} \cdot f_2 \right), \\ 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{t}_{44}^\alpha}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{2r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{g} \cdot (1 + f_3) \right), \\ &h, k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \right.$$

Diese Differentialausdrücke hätte man in einem Raum, der völlig frei von schwerer Masse ist, gleich Null zu setzen. Indessen ist dabei zu bedenken, daß man in einem Raum, wo ein Gravitationsfeld vorhanden ist, zumindest die Energie des Gravitationsfeldes selber hat, und daß diese auch ihren Beitrag zu der schweren Masse liefert. Die Dichtigkeit der dem Gravitationsfeld zukommenden schweren Masse berechnet sich nach Formel (8), wenn man hier für H den auf die Gravitation entfallenden Anteil der Hamiltonschen Funktion der Welt einsetzt. Ich will diesen Anteil G nennen, dann ist in der Einsteinschen Theorie¹⁾

$$(15) \quad G = \frac{1}{2} \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu & \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right)$$

und

$$(16) \quad h_{\mu\nu} = - \frac{\partial G}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu & \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right).$$

Setzt man hier die Werte (13) ein, so erhält man:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot h_{hk} = \left(\delta_h^k - \frac{x_h x_k}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \cdot F_1 \\ \quad \quad \quad + \frac{x_h x_k}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_1' \cdot f_2'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_3' \cdot (1 + f_1)}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{h4} = \frac{x_h}{r} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot f_3'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_3' \cdot f_3}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{44} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3'^2}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_3' \cdot (1 + f_3)}{g^2}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + h_{\mu\nu} = 0$$

ergeben vier Differentialgleichungen für die f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} (1 - F_1) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_1'}{g} \cdot (1 + f_1) \right) - \frac{f_2' \cdot f_1'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot (1 + f_1)}{g^2} - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot f_2 \right) - \frac{f_3' \cdot f_2'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot f_2}{g^2} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{g} \cdot (1 + f_3) \right) - \frac{f_3' \cdot f_3'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_3' \cdot g' \cdot (1 + f_3)}{g^2} &= 0, \end{aligned}$$

1) H. Weyl, a. a. O., S. 189 u. S. 191. Unser G ist gleich $-\frac{1}{2} \mathfrak{S}$ bei Weyl, ferner $\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}$ bei Weyl, vgl. die Fußnote auf S. 48.

oder nach einer einfachen Umformung der drei letzten Gleichungen:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \cdot (1 - F_1) = 0; \\ \frac{1 + f_1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} = 0, \\ \frac{f_2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) = 0, \\ \frac{1 + f_3}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den folgenden drei Gleichungen:

$$(19) \quad \frac{dg}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} (r^2 \cdot f_3') = 0, \quad \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, daß f_1 , f_2 , f_3 im Unendlichen verschwinden, ergibt sich aus der ersten Gleichung (19):

$$(20) \quad g = 1.$$

Daraus folgt weiter, weil:

$$1 - F_1 = \frac{1 + f_3}{g} = 1 + f_3, \\ F_1 = -f_3.$$

Die beiden letzten Gleichungen (19) fallen demnach zusammen in die *eine* Gleichung:

$$\frac{d(r \cdot f_3)}{dr} = 0,$$

deren Lösung ist:

$$(21) \quad f_3 = -\frac{a}{r}, \quad g_{34} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo die Integrationskonstante a sich aus der schweren Masse der Kugel berechnet, die nur noch mit einem von den Maßeinheiten abhängigen Faktor zu multiplizieren ist.

8. Zur Berechnung von f_1 und f_2 haben wir die einzige Gleichung:

$$(22) \quad g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) - f_2^2 = 1.$$

Die gewonnene Lösung enthält noch eine willkürliche Funktion. Die bisher gemachten Annahmen reichen also immer noch nicht ganz aus, um das Koordinatensystem ein-

deutig zu definieren. Woher diese Vieldeutigkeit rührt, erkennt man, wenn man unter $x_4 = \text{const.}$ nicht ein ebenes Kontinuum versteht, sondern einen auf der Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots u_6 = 0$ senkrecht stehenden Zylinder, dessen Spur in der Koordinatenebene ein dreidimensionales Kontinuum ist, das zwar rotationssymmetrisch in bezug auf die Achse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im übrigen aber ganz beliebig gekrümmt ist. Bei dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich durch eine leichte geometrische Überlegung für irgend ein Linienelement in der Koordinatenebene die Form:

$$d s'^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 + d x_4^2 + \varphi_1(r) \cdot d r^2 \\ + 2 \varphi_2(r) \cdot d r \cdot d x_4.$$

Für die natürliche Länge eines Linienelementes ds im Hilbertschen Kontinuum bekommt man demnach aus:

$$d s^2 = d s'^2 + \sum d u_k^2$$

genau dieselbe Form (9), welche wir bisher benutzt haben. In Formel (9) ist demnach noch nicht von der Bedingung Gebrauch gemacht, daß $x_4 = \text{const.}$ eine Ebene sein soll. Diese Bedingung können wir folgendermaßen formulieren: die Projektion des Hilbertschen Kontinuums in der Koordinatenebene muß zu $x_4 = \text{const.}$ beiderseits symmetrisch sein. Denn das ist dann und nur dann der Fall, wenn die $x_4 = \text{const.}$ ebene Kontinua sind. Es müssen also alle geodätischen Linien, die den Raum $x_4 = \text{const.}$ berühren, überhaupt ganz in seinem Inneren verlaufen, und alle geodätischen Linien, die senkrecht auf $x_4 = 0$ stehen, müssen für $+x_4$ und $-x_4$ genau gleich beschaffen sein. Wenn man die Gleichungen (4) also für raumartige Linien aufstellt, für welche in einem Punkt $d x_4 = 0$ ist, so muß sich auch überall $d x_4 = 0$ ergeben, das heißt: für diese Linien muß $d^2 x_4 = 0$ sein, oder:

$$\left\{ \begin{matrix} h & k \\ & 4 \end{matrix} \right\} \cdot d x_h \cdot d x_k = 0.$$

Nach (13) ergibt sich:

$$\left\{ \begin{matrix} h & k \\ & 4 \end{matrix} \right\} \cdot d x_h \cdot d x_k = -\frac{1}{2} (f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_3)) \cdot d r^2.$$

Da $F_2 = f_2, 1 - F_3 = 1 + f_1$, so muß also sein:

$$(29) \quad (1 + f_1) \cdot f_2' - \frac{1}{2} f_2 \cdot f_1' = 0.$$

Stellt man die Gleichungen (4) für zeitartige Linien auf, so müssen in den Gleichungen für die raumartigen Koordinaten die Glieder mit der ersten Potenz von dx_4 wegfallen, es muß also sein:

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot dx_h = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

oder, da nach (19):

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot dx_h = -\frac{1}{2} F_2 \cdot f_3' \cdot \frac{\alpha}{r} \cdot dr,$$

so muß sein:

$$(24) \quad f_2 \cdot f_3' = 0.$$

Die beiden Symmetriebedingungen (23) und (24) sind dann, und auch nur dann, erfüllt, wenn:

$$(25) \quad f_2(r) = 0.$$

Damit ist auch die letzte Willkürlichkeit beseitigt, das Koordinatensystem ist nunmehr eindeutig festgelegt. $f_1(r)$ berechnet sich aus $g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) = 1$. Wir haben nun:

$$(26) \quad f_1 = \frac{\frac{\alpha}{r}}{1 - \frac{\alpha}{r}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{\alpha}{r},$$

$$(27) \quad F_1 = \frac{\alpha}{r}, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -\frac{\frac{\alpha}{r}}{1 - \frac{\alpha}{r}}.$$

Vergleichen wir diese Formeln mit dem Schwarzschild'schen Integral, so sehen wir, daß in unserem Koordinatensystem die willkürliche Konstante α zu Null bestimmt wird, es ist das der von Hilbert bevorzugte Wert.

9. Schwarzschild macht für den natürlich gemessenen Abstand ds zweier unendlich benachbarter Raum-Zeitpunkte den Ansatz¹⁾:

$$ds^2 = F \cdot dt^2 - G \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) - H \cdot r^2 \cdot dr^2.$$

Vergleicht man hiermit unseren Ansatz auf Seite 65:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1 \cdot dr^2 + 2f_2 \cdot dr \cdot dx_4 + f_3 \cdot dx_4^2.$$

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 191. Formel (6).

so findet man, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, völlige Übereinstimmung, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} f_2 &= 0, \\ H &= \frac{f_1}{r^2}, \\ F &= 1 + f_3, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Da sich bei Schwarzschild

$$G = \frac{\sqrt{(r^3 + \alpha^3)^2}}{r^2}$$

ergibt, so erkennt man, daß die Annahme $G = 1$ schon den Wert $\alpha = 0$ involviert. Die Annahme $G = 1$ ergibt sich aber in meinem Ansatz deswegen mit Notwendigkeit, weil die Projektion der Verbindungslinie ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums, welche in dem Schnitt mit einer Ebene $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, . . . $u_6 = c_6$ liegen, auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, . . . $u_6 = 0$, denselben Wert ds haben muß, wie die Verbindungslinie selbst. Würden wir für die Projektion den Wert ds' annehmen, wo:

$$ds'_i = \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

so würde sich der Schwarzschildsche Ansatz ergeben. Wegen der Symmetrieverhältnisse schneidet die zur Koordinatenebene parallele Ebene $u_1 = c_1$, . . . $u_6 = c_6$ aus der Hilbertschen Welt eine zweidimensionale Kugeloberfläche $r = \text{const.}$, $x_4 = \text{const.}$ aus. Man erkennt das sofort, wenn man setzt:

$$\sum du_k^2 = f_1 \cdot dr^2 + f_3 \cdot dx_4^2 = 0.$$

Um zu dem Schwarzschildschen Maß für die Projektion zu kommen, muß man den Wert des Radius dieser Kugel, dessen natürlich gemessene Länge ich mit Schwarzschild R nennen will, zu

$$r = \frac{R}{\sqrt{G}}$$

rechnen, denn dann ist

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}}.$$

Setzt man ein:

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r},$$

so erhält man:

$$R = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$$

oder:

$$r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}.$$

Um zu dem Koordinatensystem zu kommen, welches der Schwarzschild'schen Lösung zugrunde liegt, verfahren wir also zuerst genau nach dem von mir angegebenen Prinzip: wir projizieren das Hilbert'sche Kontinuum senkrecht auf die Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_3 = 0$. Dann aber rechnen wir in der Koordinatenebene nicht mit den natürlichen Längen, sondern wir rechnen so, als ob ein Punkt, der vom Koordinatenanfang natürlich gemessen die raumartige Entfernung R hat, nur um $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$ von ihm entfernt sei.

Man muß also, um zu der Schwarzschild'schen Lösung zu kommen, der Koordinatenebene rein willkürlich eine recht unvernünftige nichteuklidische Geometrie verleihen.

Übrigens kommt man zu einem Integral der Einsteinschen Differentialgleichungen auch dann, wenn man setzt $G = 1 + \varphi(r)$, wo $\varphi(r)$ eine ganz beliebige Funktion von r ist, deren Größe wir aber immer als äußerst klein gegen 1 ansehen wollen.¹⁾

Ergebnisse.

1. Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es unmöglich, in einem Gravitationsfeld die „natürlich“ konstruierten raumartigen und zeitartigen Geraden zum Bau eines Koordinatensystems zu verwenden, weil sich die natürlichen Geraden im allgemeinen nicht in Netzknoten schneiden, sondern an den Knotenstellen vorbeikreuzen.

2. Wenn man eine beliebige Numerierung der Raum-Zeitpunkte annimmt, so ergeben sich nach dem Prinzip der allgemeinen Transformierbarkeit, welches der Einsteinschen

1) Vgl. S. 59, Fußnote 1.

Theorie zugrunde liegt, zwar stets die physikalischen Grundgleichungen in derselben einfachen Form, aber eine ungeeignete Wahl des Koordinatensystems kann es mit sich bringen, daß in ihm scheinbar physikalische Unterschiede, Bewegungsvorgänge oder auch Wellen auftreten, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind, sondern nur der Wahl des unvernünftigen Koordinatensystems ihr Dasein verdanken.

3. Es wird in dieser Arbeit ein Prinzip zur praktischen Ausführung eines stets vernünftigen Koordinatennetzes und damit zur praktischen Bestimmung von geraden Linien und ihrer Teilung angegeben, so daß man also niemals zu Widersprüchen mit der Forderung der Vernunft kommt, daß keinerlei zeitliche Veränderungen oder örtliche Unterschiede in der physikalischen Beschreibung der Welt vorkommen dürfen, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind.

4. Es wird gezeigt, daß bei dieser vernunftgemäßen Wahl des Koordinatennetzes das Gravitationsfeld einer kugelförmigen schweren Masse eindeutig bestimmt ist. Die willkürliche Konstante, oder die willkürliche Funktion, die in dem von Schwarzschild gefundenen Integral noch vorkommt, wird als Null bestimmt. Schon Hilbert hat die Null dem von Schwarzschild angenommenen positiven Wert vorgezogen, jedoch nur aus dem Grunde, weil der Ausdruck für das Gravitationspotential dadurch einfacher wird. Nach meiner Untersuchung kommt man notwendig zu diesem Integral, wenn man das Koordinatensystem vernünftig wählt.

5. Um zu der Schwarzschild'schen oder überhaupt irgend einer anderen Lösung zu kommen, muß man der Wahl des Koordinatennetzes eine ganz unvernünftige nichteuklidische Geometrie zugrunde legen.

Halle a. S., Physik. Institut, d. 17. September 1919.

(Eingegangen 21. September 1919.)