Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.

Von Erwin Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.)

Vor einiger Zeit hat Herr Einstein[1]) ein System von Energiekomponenten der Materie $T^{\mu\nu}$ und von Schwerepotentialen $g_{\mu\nu}$ angegeben, welches die allgemein kovarianten Feldgleichungen exakt integriert und von welchem er vermutet, daß es eine Annäherung an die tatsächliche Struktur der Materie und des Raumes „im großen" darstellt. Es handelt sich, kurz gesagt, um ruhende inkohärente Materie, welche ein dreidimensionales, in sich geschlossenes Raumkontinuum von endlichem Gesamtinhalt und den metrischen Eigenschaften einer Hypersphäre in gleichmäßiger Dichte erfüllt[2]).

Für die Feldgleichungen wird aber dabei eine gegen die ursprüngliche[3]) etwas abgeänderte Gestalt vorausgesetzt.

Die Konzeption des in sich geschlossenen Gesamtraums scheint mir für die allgemeine Relativitätstheorie von ganz außerordentlicher Bedeutung, und zwar nicht nur — und nicht hauptsächlich — wegen des „Verödungseinwandes", von welchem Herr Einstein ausgegangen war; den Hauptwert lege ich vielmehr darauf, daß die allgemeine Relativitätstheorie durch Weiterführung dieses Gedankens das zu werden verspricht, was ihr Name besagt und was sie — nach meiner Ansicht — bisher nur formal, nur sozusagen auf dem Papier gewesen ist[4]).

Unter diesen Verhältnissen ist es wohl nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß das völlig analoge System von Lösungen auch schon für die Feldgleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt — ohne die von Herrn Einstein l. c. hinzugefügten Glieder — existiert. Der Unterschied ist äußerlich ganz geringfügig: Die Potentiale bleiben ungeändert, nur der Energietensor der Materie erhält eine andere Gestalt. Das System der $g_{\mu\nu}$ lautet also [vgl. Einstein l. c. Gleichungen (7), (8) und (12)]:

$$g_{44} = 1 \quad g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0\,, \tag{1}$$

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu\, x_\nu}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\right); \quad \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 142. In der Folge mit l. c. zitiert!

2) Richtiger wäre es vielleicht zu sagen: „bildet" (statt „erfüllt").

3) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, J. A. Barth, 1916.

4) Man vergleiche besonders De Sitter, Amst. Proc. 19, 527, 1917, dann Einstein l. c. S. 147.

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\Big\} \text{ wenn } \nu \Big\{ \begin{matrix} \neq \\ = \end{matrix} \Big\} \mu .$$

Nimmt man nun für den gemischten Energietensor der Materie zunächst nur an, daß die Komponenten mit ungleichen Indizes verschwinden[1]):

$$|T_\mu^\nu| = \begin{vmatrix} T_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^4 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

so sind die Feldgleichungen:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} -$$
$$-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \tag{3}$$

erfüllt, wofern nur

$$T_1^1 \equiv T_2^2 \equiv T_3^3 \equiv \frac{1}{3} T_4^4 \equiv \frac{1}{\varkappa R^2} \equiv \text{const.} \tag{4}$$

Die Rechnung bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten, sie verläuft genau wie bei Einstein l. c. Höchstens wäre in logischer Beziehung zu bemerken:

$\varkappa$ und R müssen natürlich schon von Haus aus, d. h. schon beim Anschreiben der Feldgleichungen (3) bzw. der Potentiale (1) als universelle Konstante vorausgesetzt werden. Da sich aber die Rechnung bequem nur für Punkte von der Eigenschaft $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ durchführen läßt, so resultieren die Forderungen (4) zunächst nur für solche Punkte, identisch nur in x_4! Zur identischen Erfüllung der Feldgleichungen ist es notwendig, ist es erlaubt, und ist es hinreichend, die identische Gültigkeit von (4) auch in den räumlichen Koordinaten zu fordern. Denn dadurch werden diese Beziehungen invariant gegen beliebige Transformationen der räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 unter sich und der Zeit x_4 in sich; und durch eine einfache Transformation dieser Art kann man jeden beliebigen Punkt in eine der beiden „x_4-Achsen" verlegen. —

Es ist wünschenswert, mit dem angegebenen Lösungssystem eine halbwegs anschauliche physikalische Vorstellung zu verbinden. Das ist — bis zu einem gewissen Grade — möglich, wenn man den Einsteinschen Ansatz für den Energietensor einer zusammenhängenden, kompressiblen Flüssigkeit akzeptiert. In diesem Falle gilt[2])

$$T_\mu^\nu = -\delta_\mu^\nu p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}\varrho$$

$$\delta_\mu^\nu = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\Big\} \text{ wenn } \nu \Big\{ \begin{matrix} \neq \\ = \end{matrix} \Big\} \mu , \tag{5}$$

wobei p und ϱ Skalare sind, der „Druck" und die „Dichte" der Flüssigkeit. Setzt man hier identisch

$$\frac{dx_1}{ds} \equiv \frac{dx_2}{ds} \equiv \frac{dx_3}{ds} \equiv 0, \quad \frac{dx_4}{ds} \equiv 1, \tag{6}$$

was wegen (1) mit der Grundgleichung

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{7}$$

und mit den Bewegungsgleichungen (Gleichungen der geodätischen Linie)

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0 \tag{8}$$

verträglich ist, so kommt, wegen (1):

$$|T_\mu^\nu| = \begin{vmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho - p \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Dieses Schema unterscheidet sich (unter geeigneten Annahmen über ϱ und p) nur äußerlich von unseren obigen Ansätzen [(2) und (4)] für den Energietensor.

Jene Ansätze kommen also darauf hinaus, die Materie im großen unter dem Bild einer kompressiblen, ruhenden Flüssigkeit von konstanter Dichte und konstantem, räumlich isotropem inneren Zug vorzustellen, welch letzterer nach (4) einem Drittel der Ruhdichte der Energie gleich sein muß[1]).

Vom Standpunkte der alten Theorie, welche ja bei Einstein bekanntlich die Rolle der ersten Näherung spielt, befremdet es keineswegs, daß ein Spannungszustand dieses Vorzeichens in einer Materie vorhanden gedacht werden muß, welche über ungeheure Räume gleichmäßig ausgebreitet ist und auf sich selbst nach dem Newtonschen Kraftgesetz einwirkt.

Dagegen frappiert bei näherer Betrachtung folgende Tatsache.

Die Befriedigung der 10. Feldgleichung (Gleichung [3], $\mu = \nu = 4$)) ist dem Umstand zu danken, daß nach (4) der Ausdruck

$$T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \tag{10}$$

verschwindet. Dieser Ausdruck spielt nun in der ersten Näherung, für welche bekanntlich überhaupt nur die 10. Feldgleichung wesentlich in Betracht kommt, die Rolle der Newtonschen gravitierenden Massendichte. Das Verschwinden des „Massenausdrucks" (10) schien

1) Macht man diese Annahme nicht, so erscheint sie später als Forderung neben (4).

2) A. Einstein, Die Grundlage der usw., S. 52.

1) Beiläufig sei daran erinnert, daß dies auch der Absolutbetrag des Lichtdruckes ist; das Vorzeichen ist aber entgegengesetzt!

mir anfangs die Brauchbarkeit des angegebenen Lösungssystems als Bild der Materie im großen stark in Frage zu stellen.

Nunmehr halte ich aber gerade dieses Ergebnis sogar für recht befriedigend[1]).

Erstens einmal muß man von einer Theorie, in welcher auch der Begriff der Masse relativ, d. h. nur durch die Wechselbeziehungen der Körper bestimmt sein soll, geradezu erwarten, wenn nicht fordern, daß sie jedenfalls die Gesamtmasse der Welt zum Verschwinden bringt.

Daß der Massenausdruck in unserem Falle nicht nur in Summa, sondern in jedem einzelnen Punkt verschwindet, ist offenbar nur eine Folge der Fiktion, daß die Materie exakt ruhend und völlig gleichmäßig über den Raum verteilt sei. Es scheint mir ganz im Geiste der Massenrelativitätsforderung gelegen, sich zu denken, daß die Wechselwirkungsfunktion, die wir als träge oder schwere Masse bezeichnen, erst durch Abweichungen von jener gleichförmigen, zeitlich konstanten Verteilung zustande kommt bzw. in Erscheinung tritt; und es schadet gar nichts, daß für die gleichförmige ruhende Verteilung, in welcher die Masse sich ohnedies weder als träge noch als schwere „betätigen" könnte oder würde, der Massenausdruck verschwindet.

Natürlich erwächst nunmehr die Aufgabe, die wirklichen, empirischen Vorgänge für einzelne konkrete Fälle sozusagen durch Variation dieses höchst einförmigen, „inerten" Integralsystems zu gewinnen. Dann — und erst dann — würde, nach meinem Gefühl, die allgemeine Relativitätstheorie jene Forderungen wirklich erfüllen, welche zu ihrer Entstehung die logische Veranlassung waren[2]).

Zusatz bei der Korrektur am 20. Dez. 1917:

Nach den Gleichungen (4) hätte die Größe $\frac{1}{\varkappa}$ folgende „physikalischen Bedeutungen":

a) $$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{2\pi^2 R^3 T_4^4}{R} = \frac{1}{6\pi^2} \cdot \frac{E}{R};$$

b) $$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi R^2 T_1^1 = \frac{1}{4\pi} \cdot P.$$

Hier ist E die Gesamtenergie der Welt, R (wie oben) ihr Radius, P der gesamte einseitige Zug auf eine Äquatorkugel. Für letzteren ergibt sich zahlenmäßig [mit $\varkappa = \frac{8\pi k^2}{c^2}$ g^{-1} cm, $k^2 = 6{,}68 \cdot 10^{-8}$ g^{-1} cm^3 sec^{-2}, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}]:

$$P = \frac{4\pi}{\varkappa} = \frac{c^2}{2k^2} \text{ g cm}^{-1} \text{ (d. h. g cm Lichtsek.}^{-2}\text{)}$$
$$= \frac{c^4}{2k^2} \text{ g cm sec}^{-2} = 6{,}06 \cdot 10^{48} \text{ dyn.} —$$

Erwähnt sei noch, daß die Größen c, E, R, oder auch die Größen c, P, R unabhängige physikalische Dimensionen und daher die prinzipielle Eignung zu Einheitsetalons für ein „absolutes" Maßsystem besitzen. —

(Eingegangen 30. November 1917.)

1) Die Klärung der Gedanken in diesem Punkt verdanke ich hauptsächlich wiederholten mündlichen Besprechungen mit Herrn L. Flamm.

2) Man vgl. A. Einstein, Die Grundlage der usw. § 2.