

## § 3.

**Einführung in die Quantentheorie, Oscillator und Rotator.**

Wenn wir in das Wesen der Quantentheorie tiefer eindringen wollen, dürfen wir uns nicht auf den besonderen Fall der Schwingungsenergie beschränken, den wir im 1. Kap., § 6 ausschließlich behandelt haben. Dieser Fall steht historisch voran und hat Planck von der Wärmestrahlung aus zur Definition seines Wirkungsquantums  $h$  geführt. Gewissermaßen als theoretisches Reagens auf die Wärmestrahlung benutzte Planck den einfachen Oscillator, an welchem er seine Hypothese der Energiequanten (vgl. S. 41) entwickelte. Diese Hypothese liegt dem lichtelektrischen Gesetz von Einstein und seiner Erweiterung zu dem Bohrschen Ansatz für die emittierte und absorbierte Energie atomistischer Prozesse zugrunde.

Indem wir uns nunmehr auf einen allgemeineren Standpunkt stellen, betrachten wir statt eines speziellen Planckschen Oscillators ein beliebiges mechanisches System oder, zunächst etwas spezieller, einen beliebig bewegten Massenpunkt, wobei es nicht viel ausmacht, ob wir denselben als geladen annehmen (Elektron) oder als ungeladen.

Wir beginnen zweckmäßig mit derjenigen Fassung, die Newton in seinen „Prinzipien“ den mechanischen Gesetzen gegeben hat, insbesondere mit seiner Definitio II und Lex II (die Definitio I umschreibt den Begriff der Masse, die Lex I ist das Trägheitsgesetz):

Definitio II: *Quantitas motus est mensura ejusdem, orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim.*

„Die Bewegungsgröße ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.“

Lex II: *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.*

„Die Änderung der Bewegungsgröße ist nach Größe und Richtung proportional der wirkenden Kraft.“

Statt Bewegungsgröße sagen wir, um die gerichtete Natur derselben hervorzukehren, lieber „Antrieb“ oder noch lieber „Impuls“. Wir bezeichnen den Impuls mit  $p$  und haben nach der Definitio II:

$$(1) \quad p = mv.$$

Die Lage des Punktes bestimmen wir wie üblich durch rechtwinklige Koordinaten  $x, y, z$ . Dabei wollen wir aber im Interesse der Verallgemeinerungsfähigkeit die Koordinaten statt durch verschiedene

Buchstaben lieber durch Indices unterscheiden und zum Beispiel setzen:  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$ . Die Geschwindigkeit ist dann nach Richtung und Größe bestimmt durch

$$\dot{q}_k \left( \dot{q}_1 = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{q}_2 = \dot{y} \text{ usw.} \right),$$

und es gilt, wenn  $p_1, p_2, p_3$  die entsprechenden Komponenten des Impulses sind, nach (1)

$$(2) \quad p_k = m \dot{q}_k.$$

Wichtig ist für uns, daß sich so neben das geometrische Tripel der Lagenkoordinaten  $q$  das dynamische Tripel der Impulskoordinaten  $p$  stellt. Wichtig ist für uns ferner die Fassung des Bewegungsgesetzes, der Lex II bei Newton. Mit Unrecht spricht man vom „Newtonschen Beschleunigungsgesetz“. Nicht die kinematische Größe der Beschleunigung<sup>1)</sup>, sondern die dynamische der Impulsänderung wird durch dieses Gesetz geregelt. In diesem Sinne schreiben wir die Lex II für jede Koordinatenrichtung ( $k = 1, 2, 3$ ) einzeln

$$(3) \quad \dot{p}_k = \mathfrak{K}_k = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_k}.$$

Dabei wurde angenommen, daß die Kraft  $\mathfrak{K}$  aus einer potentiellen Energie  $E_{pot}$  (Funktion der  $q_k$ ) ableitbar sei. Die kinetische Energie ist

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}$$

unter Benutzung von (2). Die Gesamtenergie, als Funktion der  $q_k$  und  $p_k$  gedacht, nennen wir die Hamiltonsche Funktion  $H$ . Es ist

$$H(q, p) = E_{kin} + E_{pot}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial E_{kin}}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m}.$$

Infolgedessen schreiben sich die Grundgleichungen (2) und (3):

$$(4) \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

<sup>1)</sup> Natürlich ist bei konstanter Masse  $p = m\dot{q} = \text{„Masse} \times \text{Beschleunigung“}$ ; aber im allgemeinen ist die Masse nicht konstant, in der Relativitätstheorie schon nicht beim einzelnen Massenpunkt, in der gewöhnlichen Mechanik zum Beispiel nicht beim starren Körper, wo das bei der Bewegung veränderliche Trägheitsmoment an die Stelle der Masse tritt. Dann bleibt die Newtonsche Aussage von der Impulsänderung bestehen, nicht aber die statt ihrer mit Unrecht eingebürgerte Aussage über „Masse  $\times$  Beschleunigung“.

Diese Hamiltonsche oder kanonische Form der Bewegungsgleichungen ist nicht nur wegen ihrer Symmetrie bemerkenswert, sondern namentlich auch deshalb, weil sie erhalten bleibt bei Einführung beliebiger neuer Koordinaten (vgl. Zusatz 4 am Schlusse des Buches), und weil sie nicht nur für den einzelnen Massenpunkt gilt, sondern für ein beliebiges mechanisches System. Die Bedeutung des Impulses  $p$  ist dabei, für beliebige Koordinaten und Systeme<sup>1)</sup>, definiert durch

$$(5) \quad p_k = \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_k},$$

wo die kinetische Energie als Funktion der  $q_k$  und  $\dot{q}_k$  ausgedrückt zu denken ist. Für den einzelnen Massenpunkt und rechtwinklige Koordinaten ist ersichtlich (5) identisch mit (2).

Die jeweiligen Werte der Koordinaten  $q$  und  $p$  bestimmen den jeweiligen Zustand oder (nach der Terminologie von W. Gibbs) die „Phase“ des Systems. Um den Bewegungszustand nach Lage ( $q$ ) und Geschwindigkeit bzw. Impuls ( $p$ ) anschaulich zusammenzufassen, denken wir uns beim einzelnen Massenpunkt (drei Freiheitsgrade) seine drei Koordinaten  $q$  und seine drei Koordinaten  $p$  als rechtwinklige Koordinaten in einem Raum von sechs Dimensionen aufgetragen, so daß jeder Punkt dieses Raumes eine Phase unseres Massenpunktes darstellt. Bei einem System von  $f$  Freiheitsgraden erhält dieser „Phasenraum“  $2f$  Dimensionen.

Glücklicherweise brauchen wir indessen den Leser nicht durch Betrachtungen im mehrdimensionalen Raum abzuschrecken. Wir können uns vielmehr zunächst auf Systeme von einem Freiheitsgrad beschränken, für welche der allgemeine Phasenraum zu einer einfachen Phasenebene wird. Auch später, wenn wir Systeme von mehreren Freiheitsgraden zu betrachten haben, werden wir es so einrichten können, daß wir nur zweidimensionale Ausschnitte aus dem Phasenraum, also wiederum gewisse einfache Phasenebenen betrachten.

In der Phasenebene unseres Systems von einem Freiheitsgrad zeichnen wir  $q$  und  $p$  als rechtwinklige Koordinaten. Wir konstruieren uns in dieser Ebene die „Phasenbahnen“, das heißt die Folge derjenigen Bildpunkte, welche den aufeinanderfolgenden Bewegungszuständen des Systems entsprechen. Von jedem Punkt als Anfangszustand ausgehend, könnten wir solche Phasenbahnen

---

<sup>1)</sup> Wie die Definition zu verallgemeinern ist, wenn die wirkenden Kräfte kein Potential haben, soll hier nicht erörtert werden.

verzeichnen und mit ihnen die Phasenebene überall dicht überdecken. Es ist aber für die Quantentheorie charakteristisch, daß sie eine diskrete Schar von Phasenbahnen aus der unendlichen Mannigfaltigkeit derselben herausgreift. Um dieselben zu definieren, betrachten wir zunächst den Flächeninhalt der Phasenebene, der von zwei beliebigen Phasenbahnen begrenzt wird und nennen ihn „Phasenausdehnung“. Sodann zeichnen wir unsere Schar so, daß die Phasenausdehnung zwischen zwei ihrer Nachbarkurven stets gleich dem Wirkungsquantum  $h$  sei.  $h$  gewinnt dadurch die Bedeutung des Elementarbereichs der Phasenausdehnung. Diese Bedeutung werden wir als die eigentliche Definition des Planckschen Wirkungsquantums  $h$  ansehen. Wir erläutern diese reichlich abstrakten Vorstellungen zunächst an zwei wichtigsten Sonderfällen, dem Beispiel des Oscillators und des Rotators.

Als linearen Oscillator bezeichnen wir einen federnd an seine Ruhelage gebundenen Massenpunkt  $m$ , der sich nur in einer Richtung  $x = q$  aus derselben beiderseits entfernen kann und dabei eine rücktreibende Kraft, aber keinen Dämpfungswiderstand erfährt. Der Oscillator ist das einfachste Bild eines Schwingungszentrums, wie es in der Optik als „quasielastisch gebundenes Elektron“ vorausgesetzt wird. Wir sprechen genauer von dem harmonischen Oscillator, wenn wir betonen wollen, daß derselbe vermöge seiner elastischen Bindung nur einer bestimmten Eigenschwingung fähig ist. Die Schwingungszahl des Oscillators (Anzahl seiner freien Schwingungen in der Zeiteinheit) sei  $\nu$ . Die Darstellung des Schwingungsvorganges lautet dann:

$$(6) \quad x = q = a \sin 2 \pi \nu t.$$

Der Impuls  $p$  wird hier einfach gleich  $m\dot{q}$  [nach Gl. (2) und in Übereinstimmung mit (5)]; also

$$(7) \quad p = 2 \pi \nu m a \cos 2 \pi \nu t.$$

Durch Elimination von  $t$  aus (6) und (7) erhält man als Phasenbahn eine Ellipse in der  $p, q$ -Ebene von der Gleichung

$$(8) \quad \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

wo die kleine Hauptachse  $b$  die Bedeutung hat

$$(9) \quad b = 2 \pi \nu m a.$$

Der Flächeninhalt der Ellipse wird:

$$ab\pi = 2 \pi^2 \nu m a^2.$$

Von Zeit zu Zeit aber ändert der Oscillator seine Energie; er emittiert Energie, wenn sein Bildpunkt auf eine kleinere Ellipse überspringt; er absorbiert Energie, wenn der Bildpunkt auf eine größere Ellipse versetzt wird. Emission und Absorption geschehen in Vielfachen des Energiequantums  $\varepsilon$ .

Die Annahme diskreter Phasenbahnen und diskreter Energien bringt es mit sich, daß der Oscillator nur Bewegungen von bestimmter Amplitude der Ausschwingung und Geschwindigkeit beschreiben kann. Aus (6), (10) und (13) folgt nämlich als Größe dieser beiderlei Amplituden

$$q_{max} = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{2n\varepsilon}{m}}, \quad \dot{q}_{max} = \sqrt{\frac{2n\varepsilon}{m}}.$$

Wir haben hier die extremste Form der Quantentheorie dargestellt, welche nur unstetige Übergänge zwischen den verschiedenen Bewegungen des Oscillators kennt. Um das Paradoxe dieser Vorstellung zu mildern, hat Planck später eine Form der Quantentheorie entwickelt, bei welcher auch Phasenpunkte im Innern der **Ellipsenringe** als mögliche Zustände des Oscillators angesehen werden, **der Oscillator also nicht ausschließlich an die Grenzen der Elementargebiete gebunden ist.** Für unsere Zwecke ist indessen allein die **erste Form der Quantentheorie geeignet.** Wir setzen daher ausdrücklich fest (für den Oscillator und für jedes mechanische System von einem Freiheitsgrad): Der Bildpunkt des Systems in der Phasenebene ist an gewisse quantentheoretisch ausgezeichnete „gequantelte“ Phasenbahnen gebunden. Jede derselben schließt mit der folgenden ein Elementargebiet der Größe  $h$  ein. Die  $n$ te dieser Bahnen hat (wenn geschlossen) den Flächeninhalt  $nh$ . In Formeln:

$$(14) \quad \iint dpdq = nh,$$

das Integral erstreckt über das Innere der  $n$ ten Bahn. Führen wir die Integration nach  $p$  aus [entsprechend der elementaren Formel  $\int ydx$  für den Flächeninhalt einer Kurve  $y = f(x)$ ], so entsteht

$$(15) \quad \int pdq = nh,$$

dieses Integral erstreckt über die  $n$ te Bahn selbst. Die linke Seite dieser Gleichung nennen wir Phasenintegral und bezeichnen sie mit  $J$ :

$$(15a) \quad J = \int pdq.$$

Die definitive Formulierung der Quantenhypothese sehen wir in der Forderung, daß das Phasenintegral ein ganzes Vielfaches des Wirkungsquantums  $h$  sein solle. Diese Forderung sondert aus der kontinuierlichen Mannigfaltigkeit aller mechanisch möglichen Bewegungen eine diskret unendliche Anzahl wirklicher, quantentheoretisch möglicher Bewegungen aus. Im Gegensatz zu dieser allgemeinen Fassung der Quantenhypothese bedeutet die ursprüngliche, für die Wärmestrahlung formulierte Energiequantenhypothese Plancks nur eine spezielle, auf den Oscillator passende Folgerung der allgemeinen Quantenforderung. Der Auswertung des Phasenintegrals (15) waren wir im vorangehenden nur deshalb überhoben, weil wir den Inhalt der Ellipsen nach der Formel  $ab\pi$  direkt berechnen konnten.

Vom Oscillator gehen wir über zum Rotator. Wir verstehen darunter einen Massenpunkt  $m$ , der um ein festes Zentrum gleichförmig auf einem Kreise vom Radius  $a$  umläuft. Die naturgemäße Lagenkoordinate ist hier der Winkel  $\varphi$ , unter dem der Massenpunkt vom Zentrum aus erscheint, gezählt von einer willkürlichen Anfangslage  $\varphi = 0$  aus. Wir setzen also  $q = \varphi$ . Die kinetische Energie ist

$$(16) \quad E_{kin} = \frac{m}{2} a^2 \dot{q}^2.$$

Die potentielle Energie wird bei gleichförmigem Umlauf jedenfalls von  $\varphi$  unabhängig; ob sie von  $a$  abhängt, ist für uns gleichgültig, da  $a$  bei der Bewegung konstant ist. Wir können demnach schreiben

$$E_{pot} = \text{const.}$$

Der zu  $q$  gehörige Impuls ist nach (5) und (16)

$$(17) \quad p = ma^2 \dot{q}.$$

Er bedeutet das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf den Mittelpunkt des Kreises. Wegen  $\dot{q} = \text{const}$  ist dieses „Impulsmoment“  $p$  bei der Bewegung konstant, wie übrigens auch aus den Bewegungsgleichungen (4) folgt. Deshalb ist die Phasenbahn des Rotators in der Phasenebene ( $qp$ ) eine Parallele zur  $q$ -Achse (Fig. 22). Die Phasenbahn ist hier also keine geschlossene Kurve. Daher muß in diesem Falle erst definiert werden, was als Flächeninhalt der Phasenbahn gelten soll.

Hierzu dient folgende Bemerkung: Die Phase des Rotators (seine Lage in der Bahn und die Richtung seines Impulses) wiederholt sich nach jedem vollen Umlauf. Die wirkliche Phasenbahn

ist also keine unendliche, sondern eine in sich zurückkehrende Gerade. Die Phasenebene des Rotators hat in der  $q$ -Richtung nur die Abmessung  $2\pi$ ; man kann sie etwa an den Geraden  $q = \pm \pi$  aufschneiden und zu einem Zylinder zusammenheften. Der Flächeninhalt des Zylinders zwischen der  $n$ ten und der  $(n-1)$ ten Phasenbahn ist, als Rechteck von der Grundlinie  $2\pi$ , gleich  $2\pi(p_n - p_{n-1})$ . Diese Fläche haben wir gleich  $h$  zu setzen. Für die Fläche zwischen der  $n$ ten und der nullten Phasenbahn, welche letztere durch die  $q$ -Achse dargestellt wird, folgt dann

$$(18) \quad 2\pi p_n = nh.$$

Diese Fläche tritt hier an die Stelle des Flächeninhalts der geschlossenen Kurven von vorher.

Daraus ergibt sich, daß der Rotator nicht wie der Oscillator nach Energiequanten, sondern nach Impulsmomentquanten zu quanteln ist. Beim Rotator wird das Impulsmoment ein ganzes Vielfaches von  $h/2\pi$ . Berechnen wir dagegen die Energie (kinetische Energie) des Rotators, so folgt aus (16) und (17)

$$E_{kin} = \frac{p\dot{q}}{2}$$

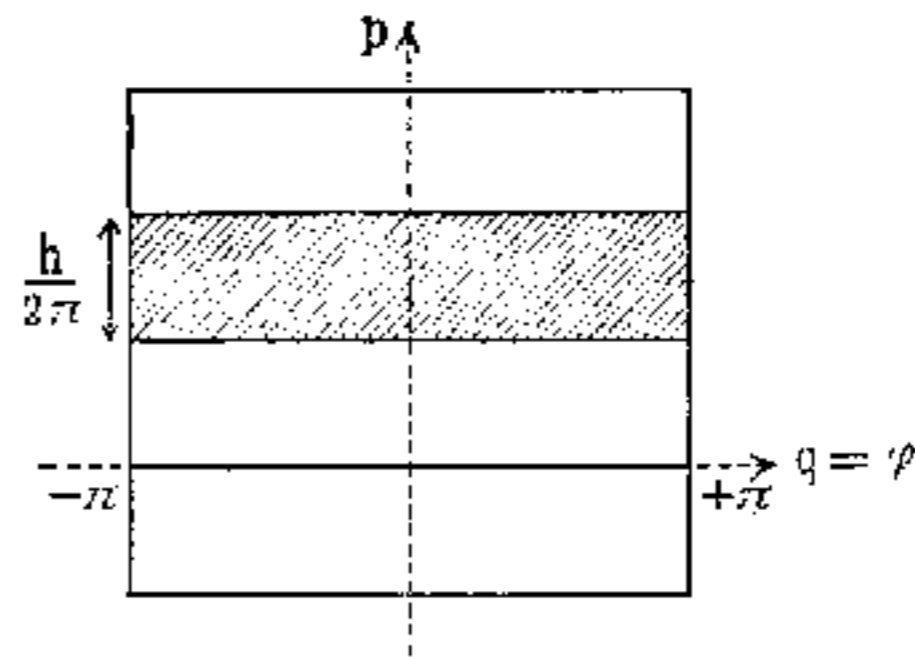
und aus (18) mit  $\nu = \dot{q}/2\pi$ :

$$(19) \quad E_{kin} = \frac{nh}{2} \frac{\dot{q}}{2\pi} = \frac{nh\nu}{2}.$$

Hier bedeutet  $\nu$  die Umlaufzahl des Rotators (Anzahl der vollen Umläufe in der Zeiteinheit), welche sinngemäß an die Stelle der Schwingungszahl beim Oscillator tritt. Wollten wir also auch beim Rotator von Energiequanten  $h\nu$  reden (was wir besser ganz vermeiden), so würde seine Energie nicht ein ganzes Vielfaches, sondern ein halbes Vielfaches des Energieelementes  $h\nu$  werden.

Durch die Quantelung des Oscillators und Rotators haben wir bereits den Grund gelegt zur zahlenmäßigen Beherrschung des Bohrschen Wasserstoffatoms. In der Tat bestimmt, wie wir schon werden, Gl. (18) die Bahnen, in denen das zum Wasserstoffatom gehörende Elektron den Wasserstoffkern umkreist; ebenso bestimmt Gl. (13) die Frequenz der Strahlung, die beim Übergang des Elektrons

Fig. 22.



zwischen solchen Bahnen ausgestrahlt wird. Wir wollen aber die Behandlung des Wasserstoffatoms und diejenige anderer Atommodelle sogleich auf eine breitere Basis stellen. Deshalb gehen wir von dem Falle eines Freiheitsgrades, auf den wir uns beim Oscillator und Rotator beschränken konnten, zum Falle beliebiger Freiheitsgrade über. In diesem Falle müssen wir nicht eine Quantenbedingung der Form (15) verlangen, sondern  $f$  verschiedene Quantenbedingungen, durch die jeder der  $f$  Freiheitsgrade in gewissem Sinne festgelegt wird. Wir folgern dieses, allgemein gesprochen, aus der Schärfe der Spektrallinien, welche den Rückschluß auf die diskrete Bestimmtheit der ihnen zugrunde liegenden atomistischen Vorgänge zuläßt. Verfasser hat zu dem Ende einen sehr einfachen und direkten heuristischen Weg<sup>1)</sup> eingeschlagen, der zu denselben Ergebnissen führt, wie eine gleichzeitig von Planck<sup>2)</sup> durchgeführte mehr systematische Untersuchung über die quantentheoretische Behandlung von Systemen mehrerer Freiheitsgrade. Die Vorschrift des Verfassers besagt: Man übertrage die Bedingung (15) auf jeden einzelnen Freiheitsgrad des Systems, schreibe also den Wert des Phasenintegrals für den  $k$ ten Freiheitsgrad als ganzes Vielfaches von  $h$  vor:

$$(20) \quad J_k = \int p_k dq_k = n_k h.$$

Bereits etwas früher als Verf. hat Herr W. Wilson<sup>3)</sup> dieselbe Vorschrift an dem Gesetze der Wärmestrahlung entwickelt.

Indem man in (20)  $n_k = 1, 2, \dots$  setzt, bestimmt man die erste, zweite ... gequantelte Phasenbahn des  $k$ ten Freiheitsgrades. Da das System mit jedem seiner Freiheitsgrade je an eine dieser Bahnen gebunden wird, ist die geforderte Bestimmtheit seiner Bewegungen erreicht. In gewissen Ausnahmefällen, bei den sogenannten entarteten Systemen, vgl. § 7 dieses Kapitels, reduziert sich die Zahl der erforderlichen Bedingungen; dann genügen bei  $f$  Freiheits-

<sup>1)</sup> Zur Theorie der Balmerischen Serie, Sitzungsberichte der Münchener Akademie, Dezember 1915 und Januar 1916, sowie Ann. d. Phys. 51, 1 (1916).

<sup>2)</sup> M. Planck, Die Struktur des Phasenraumes. Ann. d. Phys. 50, 385 (1916).

<sup>3)</sup> W. Wilson, The Quantum-theory of radiation and Line-spectra. Phil. Mag. 29, 795, Juni 1915. Der historische Sachverhalt ist von N. Bohr dargestellt (vgl. das Zitat auf S. 133, Anm. 1), auch bezüglich einer mit W. Wilson gleichzeitigen Arbeit von Hn. Ishiwara.



graden bereits weniger als  $f$  Quantenbedingungen, um die Schärfe der von dem System emittierten Spektrallinien zu gewährleisten.

Eine allgemeine und für alles folgende grundlegende Eigenschaft des Phasenintegrals möge schon hier festgestellt werden: Das Phasenintegral  $J$  ist eine notwendig positive Größe; die ganze Zahl  $n$  in Gl. (20) ist also eine positive ganze Zahl. Eigentlich folgt diese Eigenschaft schon aus der geometrischen Bedeutung des Phasenintegrals in Gl. (14) als (positiv gedachter) Flächenraum der  $(q, p)$ -Ebene. Wir überzeugen uns aber auch leicht analytisch davon, wobei es genügen möge, auf den Fall des Oscillators zurückzugreifen. Hier ist  $p = m\dot{q}$  und daher

$$J = \int p dq = \int m\dot{q} dq = \int m\dot{q}^2 dt.$$

In dem letzten Integral sind alle Faktoren, insbesondere auch der Fortschritt der Zeit  $dt$  notwendig positiv, also wird auch das Phasenintegral selbst eine positive Größe. Ganz ebenso läuft der **Nachweis in anderen Fällen**, falls die kinetische Energie des Systems **nur die Quadrate** (nicht die Produkte) der Geschwindigkeitskoordinaten enthält, was man durch Wahl der Koordinaten stets erreichen kann, wobei dann an Stelle der Masse  $m$  eine positive Funktion der Koordinaten tritt.

Bezüglich der Integrationsgrenzen für die Variable  $q_k$  in dem Phasenintegral (20) ist festzusetzen: Die Variable  $q_k$  soll den vollen Bereich durchlaufen, der zur eindeutigen Kennzeichnung der Phasen des Systems gehört. Bei einer zyklischen Koordinate ( $q = \varphi$ , Rotator) ist dieses der Bereich von  $-\pi$  bis  $+\pi$  (vgl. Fig. 22, Zusammenbiegung der Ebene zu einem Zylinder), bei einem Fahrstrahl  $r$  das Gebiet  $r_{min}$  bis  $r_{max}$  und wieder zurück bis  $r_{min}$ . Weitere Beispiele für die Anwendung dieser Regel, die sich ersichtlich zwanglos aus der Vorstellung der Bewegungsphasen ergibt, werden dieses und die folgenden Kapitel bringen.

Schwieriger ist die Frage zu entscheiden: Welche Koordinaten hat man bei der Bildung des Phasenintegrals (20) zu benutzen? Es ist klar, daß unsere allgemeine Formulierung der Quantentheorie nur dann einen bestimmten eindeutigen Sinn hat, wenn sie durch eine Regel zur Auswahl der in Gl. (20) zu benutzenden Koordinaten  $q_k, p_k$  ergänzt wird und wenn diese Regel die Koordinatenwahl eindeutig festlegt. In den einfachsten Fällen, die wir im folgenden behandeln werden, insbesondere bei der Kepler-

bewegung in der Ebene oder im Raum, bieten sich geeignete Koordinaten von selbst dar: das zyklische Azimut  $\varphi$  und der Radiusvektor  $r$ ; aber bereits hier macht die Eindeutigkeit Schwierigkeiten (wenigstens bei nichtrelativistischer Behandlung, vgl. § 7 dieses Kapitels).

Sollen Integrale von der Form (20) für jede Koordinate einzeln, d. h. ohne Kenntnis des gleichzeitigen Ablaufs der übrigen Koordinaten ausführbar sein, so muß es möglich sein, jedes  $p_k$  als reine Funktion des zugehörigen  $q_k$  darzustellen. In diesem Falle heißt das mechanische System separierbar oder bedingt periodisch (mehrfach periodisch). Näheres hierüber in Zusatz 7. Seit den Arbeiten von Schwarzschild<sup>1)</sup> und Epstein<sup>2)</sup>, die unmittelbar an die Arbeiten des Verfassers im Jahre 1915/16 anknüpfen, bildet diese Klasse von mechanischen Systemen die Basis, auf der sich die systematischen Betrachtungen zur Quantentheorie abspielen. Wie man in Fällen zu verfahren hat, die nicht unter diese Klasse fallen, ist zurzeit noch unbekannt.

Bohr geht in seinen neueren Darstellungen zwar auch von den Phasenintegralen (20) aus (unter Umständen, vgl. § 7, von einer Summe solcher Integrale), legt aber besonderen Wert auf die Reihenfolge, in der die Integrale auszuführen, d. h. die Freiheitsgrade zu quanteln sind. Er bestimmt diese Reihenfolge in anschaulicher und naturgemäßer Weise aus dem kinematischen Charakter der Bewegung. Dabei schließt er die Form der Quantenbedingungen mittels seines Korrespondenzprinzips (vgl. 5. Kap., § 1 und Zusatz 9) an die Vorstellungen der klassischen Lichttheorie an. Durch schrittweise Näherungen im Sinne der astronomischen Störungsrechnung hofft er auch solche Fälle quantentheoretisch beherrschen zu können, die nicht direkt separierbar sind.

Fassen wir zusammen, was wir, gestützt auf die Schärfe der Spektrallinien, aus der quantentheoretischen Behandlung von Oscillator und Rotator und aus der Übertragung der quantentheoretischen Methoden auf allgemeine Systeme gelernt haben, so ergibt sich eine ganz neuartige Auffassung des Naturgeschehens. Wir stellen uns dabei auf den extremen Standpunkt der ursprünglichen Planckschen Theorie, nach der die quantentheoretisch ausgezeichneten

---

<sup>1)</sup> K. Schwarzschild, Zur Quantentheorie. Berliner Sitzungsberichte, April 1916, ausgegeben am 11. Mai, dem Todestage Schwarzschilds.

<sup>2)</sup> P. S. Epstein, Zur Theorie des Starkeffekts. Ann. d. Phys. 50, 489 (1916).

Zustände lediglich auf den Grenzen der Elementarbereiche liegen, während das Innere der Bereiche von Phasenpunkten frei bleibt. Diese gequantelten Zustände sind vor allen übrigen Möglichkeiten als stationäre Zustände des Systems ganzzahlig hervorgehoben; sie schließen sich nicht stetig aneinander, sondern bilden ein Netzwerk. In den zugehörigen Bahnen bewegt sich ein Elektron dauernd und widerstandslos, das heißt ohne auszustrahlen; das Elektron ist quantentheoretisch gegen Ausstrahlung sozusagen immunisiert. Der Phasenraum, als Mannigfaltigkeit aller denkbaren, auch der nichtstationären Zustände, ist von den Bildkurven der stationären Bahnen maschenartig durchzogen. Die Größe der Maschen ist durch das Plancksche  $h$  bestimmt.

## § 4.

## Die Bohrsche Theorie der Balmerreihe.

Wir machen in jeder Hinsicht die einfachsten Annahmen: **Punktförmiger Kern** von der Ladung  $+E$ , punktförmiges Elektron von der Ladung  $-e$ ; **Masse** des Kerns unendlich groß gegen die **Masse  $m$  des Elektrons**; also „**Einkörperproblem**“ statt des eigentlichen „**Zweikörperproblems**“; **Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes**, **Gültigkeit der gewöhnlichen (vorrelativistischen) Mechanik**; **kreisförmiger<sup>1)</sup> Umlauf** des Elektrons um den Kern, das Elektron als einfacher „**Rotator**“. Zu diesen Annahmen ist folgendes zu bemerken: Für Wasserstoff ist speziell  $E = e$ ; die Rechnung mit  $E$  empfiehlt sich, um auch den Fall von  $\text{He}^+$  und  $\text{Li}^{++}$  (vgl. den ersten Paragraphen dieses Kapitels, Nr. 3 und 5) einzuschließen. Die Annahme unendlich großer Kernmasse ist selbst für Wasserstoff eine gute Annäherung [nach früherem ist, vgl. auch Gl. (16) des folgenden Paragraphen,  $m:m_{\text{H}} = 1:1847$ ]; sie wird aber im folgenden Paragraphen fallen gelassen werden.

Die Bahn des Elektrons wird durch zwei Bedingungen festgelegt, eine klassische und eine quantentheoretische. Die klassische verlangt Gleichgewicht zwischen äußeren und Trägheitskräften. Die Trägheitskraft der Kreisbewegung ist die Zentrifugalkraft:

$$\frac{mv^2}{a} = mv\omega = ma\omega^2$$

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, daß Bohr schon in seiner ersten Arbeit, Phil. Mag. 26 (1913), allgemeiner von Ellipsenbahnen spricht; vgl. hierzu § 7.