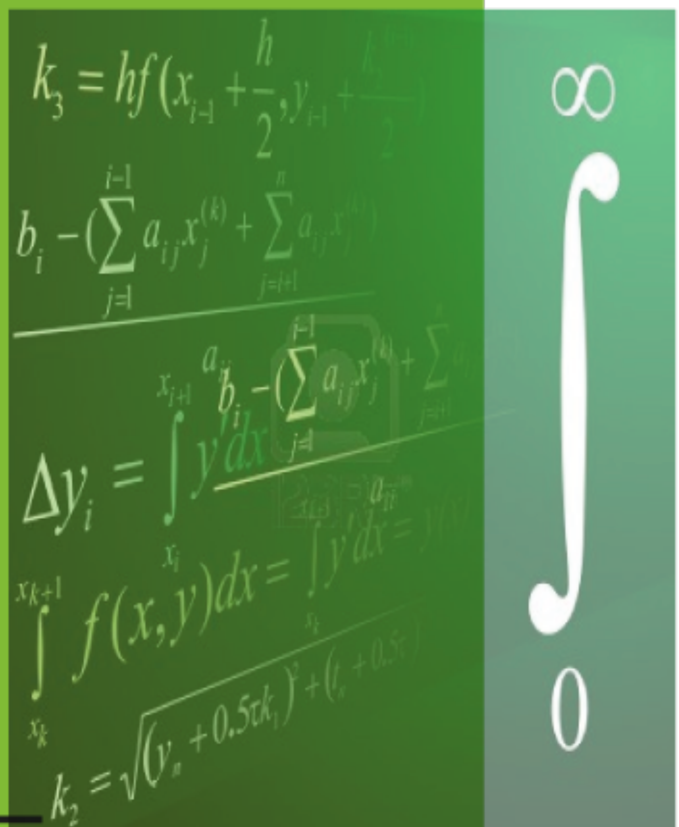
Análisis integral de funciones



Leopoldo Francisco Chávez Contreras
Silvia Ochoa Hernández
José Luis Molina Moreno
Eduardo Ochoa Hernández

SEP

conalep Michoacán

Semestre 6

PRESENTA:

Análisis integral de funciones

Autores

Leopoldo Francisco Chávez Contreras
Silvia Ochoa Hernández
José Luis Molina Moreno
Eduardo Ochoa Hernández

Coordinadores:
Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Ing. Eduardo Ochoa Hernández
Lic. Filho Enrique Borjas García

Título original de la obra:

Registro: **CONALEP-LIB-INT-01A**

Programa: Profesor escritor, objetos de aprendizaje. Desarrollo de la competencia de la producción de información literaria y lectura.

Chávez Contreras, L. Francisco.; *et al.* (2014) **Análisis integral de funciones.**
México: CONALEP/CIE

xii, 208 p.; carta

Registro: **CONALEP-LIB-INT-01A** Documentos en línea

Editores:
Ing. Eduardo Ochoa Hernández
Lic. Filho Enrique Borjas García

Editorial: CONALEP Michoacán
Col. Chapultepec norte, Gral. Nicolás Bravo No. 144, Morelia, Michoacán.
http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/

Registro: **CONALEP-LIB-INT-01A**
ISBN: En trámite
Impreso en______________________
Impreso en México –Printed in Mexico

Directorio

Lic. Fausto Vallejo Figueroa
Gobernador Constitucional del Estado de Michoacán

Lic. J. Jesús Sierra Arias
Secretario de Educación

Mtro. Álvaro Estrada Maldonado
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Ing. Fernando Castillo Ávila
Director de Educación Media Superior

M.A. Candita Victoria Gil Jiménez
Directora General del Sistema CONALEP

M.C. Víctor Manuel Lagunas Ramírez
Titular de la Oficina de Servicios Federales en Apoyo a la Educación en Michoacán

Dr. Salvador Jara Guerrero
Rector de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

L.E. Rogelio René Hernández Téllez
Director de Planeación, Programación y Presupuesto

Lic. Faradeh Velasco Rauda
Directora de Promoción y Vinculación

Ing. Mónica Leticia Zamudio Godínez
Directora de Informática

Lic. Víctor Manuel Gómez Delgado
Director de Servicios Administrativos

Ing. Genaro González Sánchez
Secretario General del SUTACONALEPMICH

Tec. Juan Pineda Calderón
Secretario General del SUTCONALEP

Prefacio

Estimado estudiante:

Las palabras que sombrean estas páginas, no son simple ciencia dentro del diálogo como depósitos de datos e información, ni son cuestión de vocabulario o listado de definiciones, son la experiencia generosa de la comunidad CONALEP Michoacán, esa realidad oculta pero necesaria que respaldó las tareas de investigación y composición literaria del discurso que integra este libro. Nos referimos a los profesores, administrativos y sindicatos que hoy convergen en el umbral de la existencia para apoyar a un grupo de profesores escritores que han creado en el sereno libre, arquitecturas de conocimientos como un viaje de aprendizaje que exigirá del estudiante, lo mejor de sí mismo ante la presencia luminosa del texto, ese que pretende enseñarle a caminar con la frente en alto.

Las ideas asociadas en este libro, equivalen a la imaginación lograda en el acto de escribir desde otros textos, al decodificarlas el estudiante, se le exige más vocabulario para enriquecer su habla y hacer ver a sus ojos más allá de la estrechez de la información que inunda a la sociedad moderna. El libro no presenta la superficie de la existencia como cruda observación, procura que su dificultad incite a perforar la realidad hasta reflexiones que renueven los modos inciertos de dar significado al mundo. La ciencia, la literatura y la tecnología no las percibimos como mundos incomunicables, los valores son explícitos caminos que las vinculan entorno al currículo del técnico bachiller. Tienen estos textos organización de premisas, técnicas, justificaciones, normas, criterios y como Usted se dará cuenta, también mostrará nuestros límites para seguir haciendo puentes entre las incesantes creaciones de nuevas fronteras de la investigación científica y técnica. Se pretende que estos libros sean contenido y no un libro de prácticas escolares, sean la herramienta de complementación para enriquecer los discursos de la enseñanza-aprendizaje.

Los profesores de CONALEP enfrentan a diario las carencias visibles de medios tecnológicos, materiales y documentales, sería fácil usar las palabras para señalar hasta el cansancio nuestras apremias, pero se ha decidido mejor producir libros como testimonios vivos y luminosos que renueven el rol social de la academia colegiada sensible a la condición social, susceptible de ir perfeccionándose con la acumulación de esta experiencia literaria, para servir de mejor manera al enriquecimiento de las competencias necesarias para realizar el sueño de éxito de tantos jóvenes Michoacanos.

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Mensaje a la comunidad académica

Se vive una época difícil para los libros, no son momentos de lectura tampoco, sin embargo, esto no debe ser un motivo para no producir literatura para educar mentes creativas, nuestra generación considera importante que sea la literatura la que emocione a realizar los grandes sueños de nuestros jóvenes. Si el libro escrito por mexicanos para mexicanos se perdiera, la conciencia de nuestra sociedad quedaría en orfandad, congelada de sentido y seriamos habitantes de un mundo siempre detrás de mascaras en rituales de simulación. Este argumento presente en *El laberinto de la soledad*, Octavio Paz nos dice al hombre moderno, seamos universales sin dejar de ser diferentes. El efecto de producir literatura en una sociedad, es como dice Steven Pinker, es "sacar los ángeles que llevamos dentro", es lo mejor de nuestro ser como oferta de conocimiento y valores al servicio de nuestra sociedad. El efecto Malinche que prefiere libros de traducción, ocasiona la perdida de identidad y crear la cultura de producir experiencias de conocimiento como herencia educativa para nuestros estudiantes. Los Aztecas en su derrota se sintieron abandonados por sus dioses, en el presente si cancelásemos que la voz de nuestro profesores que hablaran desde libros a las nuevas generaciones, es algo equivalente, al negar que las ideas en su crecimiento son una respuesta sociolingüística económica y democrática de identidad de una nación. Michoacán es un proyecto histórico de libertad, sin ignorar la realidad del malestar de la cultura actual, CONALEP desarrolla un programa académico para impulsar su capacidad y compromiso social para generar las ideas curriculares para enriquecer la sensibilidad y la imaginación científica, técnica y humanista de su comunidad.

Producir literatura curricular en CONALEP Michoacán, es asumir su personalidad moral, como dueña de una conciencia movida para una educación con la pasión de razones y expresiones culturales con la competencia para transformar positivamente la realidad. Aun cuando esta realidad adversa, de actitudes de autoridades renuentes a transformar la realidad educativa y de presiones económicas, hoy entregamos esta literatura escrita con profesores de CONALEP, máxime reconocimiento, porque trabajaron de manera altruista durante extenuantes y largas jornadas de trabajo; la comunidad CONALEP y la sociedad Michoacana toda, reciban esta obra como testimonio de la grandeza de este histórico Michoacán.

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

Enfoque por competencias

Este texto de apoyo es una introducción al análisis integral de funciones, que sirve como antecedente y base para estudios de licenciatura. Tal análisis incluye la diferencial, técnicas de integración, cálculo de ecuación diferencial, cálculo de integrales definidas y cálculo de áreas con dos y tres funciones.
Características del libro de apoyo para el estudiante:

Cada capítulo cuenta con una introducción que incluye contexto histórico y aplicaciones, definiciones, ejemplos de ejercicios resueltos, problemario, autoevaluación y soluciones, conclusiones, que sin ser finales, más bien son una invitación al análisis de otras posibilidades y aplicaciones de este tema.

En su versión digital, las referencias son accesibles siguiendo la liga en la red.

> En toda obra literaria se afirma una realidad independiente de la lengua y del estilo: la escritura considerada como la relación que establece el escritor con la sociedad, el lenguaje literario transformado por su destino social. Esta tercera dimensión de la forma tiene una historia que sigue paso a paso el desgarramiento de la conciencia: de la escritura transparente de los clásicos a la cada vez más perturbadora del siglo XIX, para llegar a la escritura neutra de nuestros días.
>
> Roland Barthes, *El grado cero de la escritura*

Palabra escrita bajo luz

En un mundo cada día con más canales de comunicación, la palabra escrita camina por los muros que denuncian el drama catastrófico sobre el medio ambiente y sobre el control de la vida humana; el combustible de esta desesperanza produce apatía profunda por tener contacto con el mundo de la literatura, esta distorsión moral parece reflejarse entre los que no quieren sentir responsabilidad ni pensar, dejando a otros su indiferencia al ser prisioneros de ligeras razones y tirria justificada en la empresa de sobrevivir.

Especular en un mundo sin libros es exponer al mundo a la ausencia de pensamiento, creatividad y esperanza. Los libros, dedicados a ser arrebatados por el lector, están expuestos a ser poseídos por las bibliotecas vacías y que con el tiempo opacan sus páginas y empolvan la cubierta de lo que alguna vez fue un objeto de inspiración. Resulta difícil transcribir este instante de un peligroso espacio donde ya muy pocas palabras sobreviven dentro de la reflexión y las pocas sobrevivientes han abandonado la unión del sentido de vivir y el sentido del pensar científico. Escribir pasa de ser un placer repentino a ser una necesidad inminente, es el puente entre lo conocido y lo inexplorado. Es un reto de hoy en día inmiscuirse en lo que una vez fue lo cercano y dejar de lado la novedad tecnológica para poder a través de las barreras que nos ciegan abrir fronteras literarias. Es un proyecto que conspira a favor de la libertad creativa, de la felicidad lúcida cargada de libros embajadores de nuevas realidades.

Entre un mar de razones dentro del libro escolar en crisis, se percibe la ausencia de esa narrativa del cuerpo del texto, misma que alimenta al lector de una experiencia de conocimiento, su ausencia, es más un mal glosario, de un mal armado viaje literario científico o de ficción. En esos viajes de libros en crisis, nos cansamos de mirar espacios vacíos de talento, emociones y sensibilidad para responder a un entorno adverso; son muchas veces un triunfalismo de autoevaluación y una falsa puerta de una real competencia para actuar en la realidad. Uno no solo vive, escucha la voz interior de un libro, uno es fundado en el manejo del lenguaje que explica, crea, aplica o expande los límites del horizonte de nuestro imaginario actuante en lo real. No vivimos leyendo texto, sino leyendo el paisaje de una realidad, el libro toma la voz del progreso en una siempre reconstrucción lingüística del sujeto que explica, transforma y comunica desde los desafíos de su generación.

La información cruda que tanto rellena los libros grises, oscuros y papel pintado; requiere ser dotada de conceptos que permitan alimentar al sujeto que toma decisiones, que explora con paso lento, que mira por dentro del lenguaje y aplica la información que cobra sentido en la siempre expansión de las ideas.

Escribir un libro es siempre reconstruir un discurso, sus lectores en este discurso son el puente a un texto profundo que demanda esfuerzo en la reconstrucción de los procesos de razonamiento y el entretejido del discurso que involucra información de fondo, esas fuentes que justifican su análisis y poseen significado privilegiado para la comprensión de una realidad.

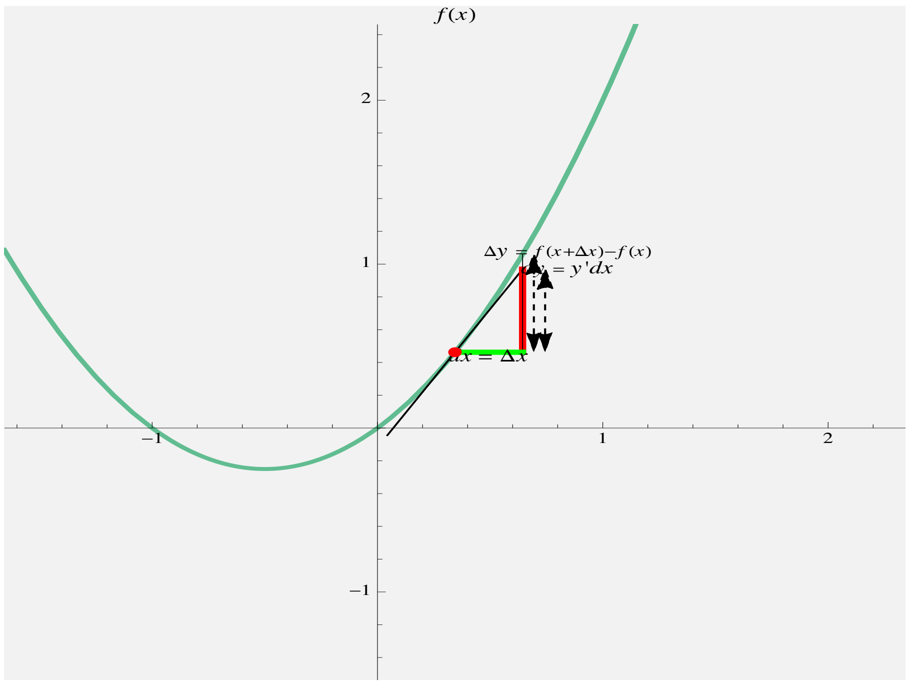
El lector puede hacer uso del libro con su propia experiencia y con su autoayuda, al precisar términos y conceptos para prolongar su horizonte de interpretación, el libro se hace cargo de la memoria de un plan de estudios, es un discurso de diferentes capas de argumentos, tras este texto se anuncia un orden de experiencia propuesto para su aprendizaje. El libro está conformado para jóvenes con memoria sin dolor para nuevas palabras, aborda el olvido como una deficiencia de interactividad entre el discurso argumentativo y los referentes conceptuales. Esto es el reto en la producción de los libros CONALEP. La propuesta es una reconstrucción de una semántica más profunda, como el principal reto del estudiante técnico bachiller del siglo XXI.

Libro,…
todos te miran,
nosotros te vemos bajo la piel.

SUMARIO

Capítulo 1:

Integrales inmediatas



Diferencial de la función $f(x)=x^2+x$

1.1. Diferenciales

En tu curso anterior de cálculo diferencial[1] , se hizo el cálculo de la derivada de una función denotándola como $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ o $D_x f(x)$, se obtuvo la **derivada[2] de *y* con respecto a *x***, el operador ***d / dx*** indicó el cálculo de la primera derivada, dicho operador debe ser considerado como un solo símbolo, ahora veremos cómo al separar los componentes de este símbolo, cada una de sus partes adquiere un significado.

El uso de las diferenciales[3] no es de uso exclusivo en matemáticas, se aplica para estimar una diferencia, aumento o disminución de una función, aproximación entre funciones, cálculo de errores en la medición de algunas magnitudes, etc.

Si tenemos una función *f(x)* derivable, y un punto definido como P(x_0, y_0) entonces:

$$y_0 = f(x_o)$$

Al sumar un incremento a *x* tenemos

$$y_0 + \Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0)$$

Si queremos conocer exclusivamente el incremento que corresponde a Δy_0 debido a Δx_0, tendremos que restarle

$$y_0 = f(x_o)$$

entonces

$$y_0 + \Delta y_o - y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)$$

para encontrar la razón de cambio del incremento de *y* con respecto al incremento de *x*,

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

si Δx es muy pequeña, entonces sabemos que el límite de ese cociente es $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$

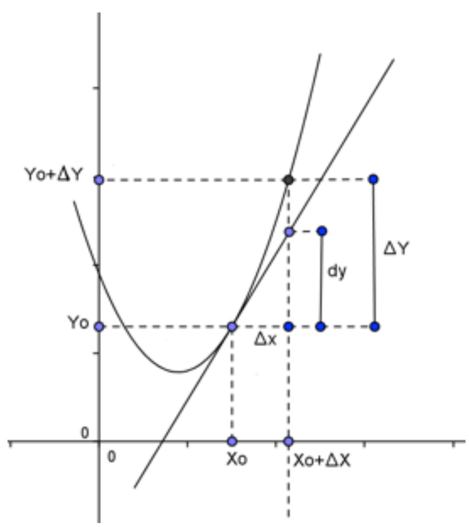
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

de aquí podemos decir que:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x f'(x_0) \approx \Delta x \frac{dy}{dx}$$

en la expresión $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ representa el cambio que sufre y, cuando cambia x, es decir $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$

en tanto que $\Delta x \frac{dy}{dx}$ es una aproximación para Δy , conocida como ***dy***, que recibe el nombre de **diferencial de y.**



Definición[1]:

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene a x y Δx es cualquier incremento en la variable independiente x.

La diferencial de la variable independiente x, denotada dx, es igual a Δx.

Entonces por definición la diferencial de la variable x es igual al incremento que experimenta. Δy es el cambio que ocurre en la variable dependiente y, cuando x sufre un incremento Δx, es decir:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

La **diferencial[4] de la variable dependiente** y, denotada dy no es igual a su incremento $dy \neq \Delta y$, está definida como $dy = f'(x)dx$.

Curiosidades matemáticas:

Albert Einstein escribió sobre Newton: "Para él la naturaleza era un libro abierto, cuyas palabras podía leer sin esfuerzo alguno".

Cálculo de la diferencial

Una vez calculada la derivada de la función, se multiplica por dx.

Veamos algunos ejemplos:

a) Encontrar la diferencial de:

$$y = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 1$$

Al multiplicar todo por dx:

$$dy = (9x^2 - 4x + 1)dx$$

Observemos cómo la derivada podemos considerarla como el cociente de dos diferenciales dy entre dx.

Nótese que cuando representamos la función derivada siempre se debe de expresar como el cociente $\frac{dy}{dx}$, por descuido lo escribimos únicamente como dx o dy, estamos hablando de un concepto diferente.

Curiosidad matemática:

"Los hombres geniales empiezan grandes obras, los hombres trabajadores las terminan".

Leonardo da Vinci

a) Encontrar la diferencial de:

$$f(x) = \sqrt{5x+3}$$

calculamos la derivada de $f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(\sqrt{5x+3})}{dx} = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$$

multiplicamos todo por *dx:*

$$\frac{(dx)dy}{dx} = \frac{5(dx)}{2\sqrt{5x+3}}$$

así la diferencial es:

$$dy = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}dx$$

Aplicaciones de la diferencial[5]

Si $y = f(x)$ es una función, y se le da a la variable independiente x un incremento Δx, la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ recibe un incremento Dy, que como vimos se considera un valor muy próximo a dy, entonces el valor aproximado de $f(x + Dx)$ es:

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

a esta expresión se le llama aproximación lineal y es útil para aproximar valores de funciones.

Ejemplo de aproximación lineal:

Encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{34}$

Primero asociamos la operación con la función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

buscamos un valor aproximado para x, de tal manera que se tenga una raíz cúbica exacta, digamos $x = 27$, la diferencia de $34 - 27 = 7$, se toma como la diferencial de la variable independiente x, esto es: $dx = 7$

se obtiene la derivada de y con respecto a x y de ahí la diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{-2}{3}}}{3}$$

$$dy = \frac{x^{\frac{-2}{3}}}{3}\, dx$$

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}\, dx$$

Sustituyendo los valores anteriormente obtenidos

$$dy = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}\,(7)$$

$$dy = \frac{7}{27}$$

se evalúan en la fórmula

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$\sqrt[3]{34} = \sqrt[3]{27 + 7} \approx 3 + \frac{7}{27} = \frac{88}{27} = 3.25926$$

podemos comprobar el resultado por medio de una calculadora científica:

$$\sqrt[3]{34} = 3.23961$$

la aproximación obtenida es hasta décimas.

Ejemplo: calcular el valor de sen 70º usando diferenciales

primero asociamos la operación con la siguiente función:

$$y = sen\ x$$

buscamos un valor conocido para el seno, que sea aproximado a 70°, por ejemplo $x = 60°$, entonces $\Delta x = 10°$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$dx = 10° = \frac{\pi}{18}\ radianes$$

encontramos la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$dy = \cos x\ \ dx$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

sustituyendo en la ecuación

$$f(x + \Delta x) \approx y + dy$$

$$sen\ 70° = sen\ (60° + 10°) \approx sen\ 60° + \cos 60°\ \ dx$$

$$sen\ (60° + 10°) \approx sen\ 60° + (\cos 60°)(\frac{\pi}{18})$$

$$sen\ 70° \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \frac{18\sqrt{3} + \pi}{36} \approx 0.9532$$

el valor es aproximado hasta décimas como se puede comprobar por medio de calculadora científica

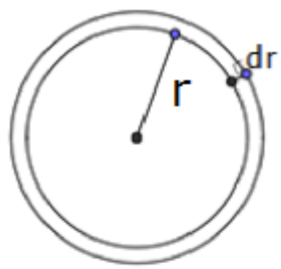
$$sen\ 70° = 0.9397$$

Otra aplicación la diferencial es la aproximación del aumento o disminución de funciones[6]

Ejemplo: calcular el volumen aproximado de una cáscara de toronja si tiene un radio interior de 2.5 cm y la cáscara tiene un espesor de 4 mm.

Consideraremos que el volumen de la esfera hueca es resultado de un aumento en el volumen de la esfera de volumen V, y r es el radio de la esfera.

El volumen de la esfera se calcula mediante la fórmula



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volumen de cáscara de toronja

La derivada del volumen con respecto al radio es:

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

la diferencial:

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

tenemos un radio igual a 2.5 cm y una diferencial de r

$$dr = 4\, mm = .04\, cm$$

entonces al sustituir los valores tenemos

$$dV = 4\pi(2.5\, cm)^2(.04\, cm)$$

dando como resultado

$$dV = \pi \text{ esto es } \Delta V \approx \pi$$

por lo tanto podemos decir que el volumen de la cáscara es de aproximadamente $\pi\ cm^3$.

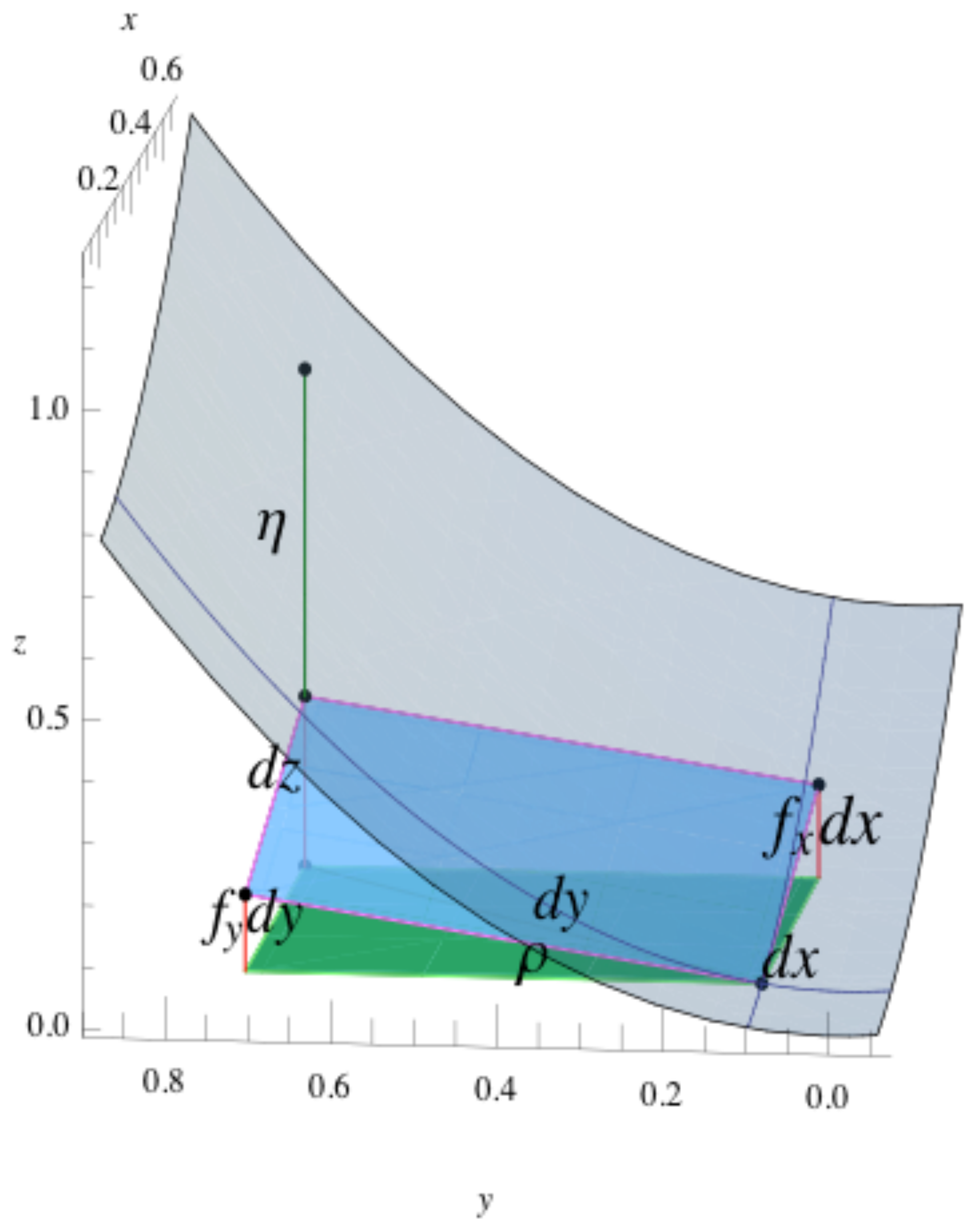
Para resolver:

Calcular la diferencial de:

$f(x) = 3x^4 - 5x^2$	
$f(x) = e^{2x} - 1$	
$f(x) = \dfrac{5x+1}{\sqrt{2x-1}}$	

Usando diferenciales calcula el valor aproximado de:

$\sqrt{50}$	
$\sqrt[3]{127}$	
$\cos 46°$	
$\tan 47°$	



Diferencial de una función de dos variables x^2+y^2

Reto:

Investiga 3 aplicaciones más del uso de la diferencial, comenta con tus compañeros de grupo.

1.2. La antiderivada

En matemáticas estamos familiarizados con las operaciones inversas, la resta es la operación inversa de la suma, la división de la multiplicación y la extracción de una raíz es la operación inversa de la potencia, en tu curso anterior[1] de análisis derivativo de funciones, calculaste derivadas de funciones, en este curso trabajaremos con la operación inversa de la **derivada,** la **antiderivada (**también conocida como la función primitiva o la integral), y los métodos para obtenerla.

Definición de antiderivada[7]:

Si se tiene una función $f(x)$, y su derivada es $f'(x) = F(X)$, entonces $f(x)$ es la antiderivada de $F(X)$

Por ejemplo, la derivada de x^3 es $3x^2$, según la definición podemos decir que x^3 es la antiderivada de $3x^2$**.**

Sin embargo la derivada de $x^3 + 15$ o $x^3 - 2$ también es $3x^2$, esto nos lleva a concluir que la antiderivada de $3x^2$ tiene que ser x^3 más una constante cualquiera cuyo valor es fijo pero desconocido, así podemos decir que $x^3 + C$ es la familia de antiderivadas de $3x^2$.

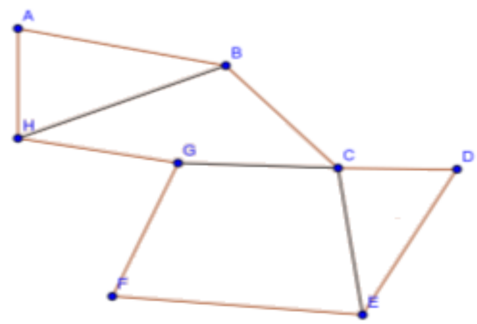
Esta familia de antiderivadas en la que sabemos que existe un valor de C, la llamamos integral indefinida y la escribimos:

$$\int F(x)dx = f(x) + C$$

1.3. Integrales inmediatas

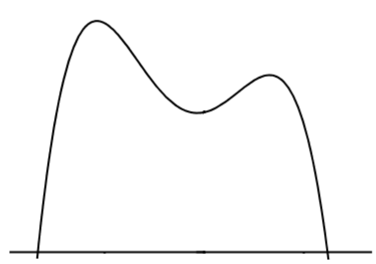
La integral indefinida

Con los conocimientos de geometría plana podemos hacer el cálculo de áreas de diferentes figuras geométricas regulares con la aplicación de fórmulas, sin embargo, cuando se tienen figuras irregulares es un poco más elaborado el proceso de calcular el área, ya que debemos descomponer en diferentes figuras regulares la figura irregular y así poder hacer el cálculo .



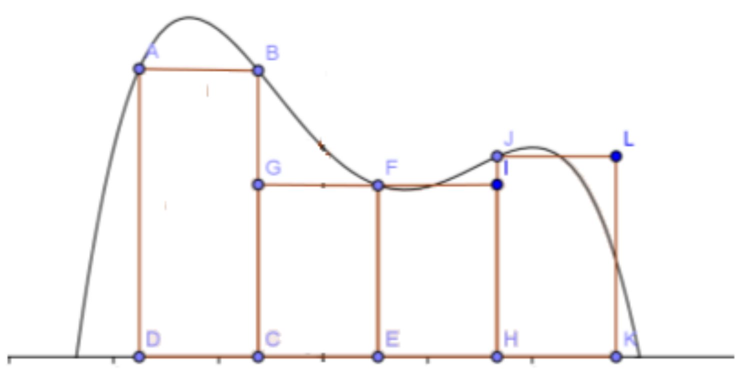
Descomposición de un polígono irregular en varios polígonos

Si tenemos el caso de una figura irregular que tiene partes curvas el cálculo del área es más laborioso y tal vez inexacto.



Superficie irregular contenida bajo una curva

Una de las figuras más sencillas para calcular su área es el rectángulo, ya que basta con multiplicar su base por su altura, de manera que si queremos encontrar el área bajo una curva como la de la figura anterior podemos dividirla en rectángulos, para facilitar la suma de las áreas de los rectángulos es conveniente que todos los rectángulos tengan una base igual, solo nos ocuparíamos de obtener la altura de cada uno de ellos.



Cálculo del área de una figura irregular o con curvas

Al dividir la curva en varios rectángulos con bases iguales y con alturas diferentes obtenemos varias áreas, que al sumarlas nos darán el área total, observemos que en la figura anterior hay espacios que nos hace falta considerar y otros que exceden el área que deseamos calcular, esto se puede corregir si hacemos rectángulos con bases iguales muy pequeñas, tanto que tiendan a cero, de manera que puedan cubrir toda el área de la curva, y no falte ni exceda a la superficie a cubrir, para que esto suceda tendremos rectángulos con bases sumamente pequeñas, esto implica una cantidad muy grande de rectángulos.

No hemos considerado aún cómo obtener la altura de cada rectángulo, recordemos que si tenemos una función cualquiera $f(x)$ al asignar valores a la variable independiente[1] obtenemos la altura $f(x)$, por ejemplo para

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

al dar diferentes valores a la x, obtenemos un valor correspondiente para $y = f(x)$, así que tomando como base a x y como altura $f(x) = y$

el área de cada rectángulo es:

$$A = f(x)\,(x)$$

Las bases de los rectángulos deben tender a cero, a este tipo de magnitud se le nombra **diferencial** y la denotamos como $\boldsymbol{d}$, de manera que la base de cada uno de los $\boldsymbol{n}$ rectángulos tiene como base el diferencial de $\boldsymbol{x}$, esto es $\boldsymbol{dx}$, y el área de cada rectángulo es:

$$A = f(x)dx$$

El área total es la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$$Área_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)dx_i$$

Recordemos que el símbolo $\sum x_i$ significa la suma de todas las x.

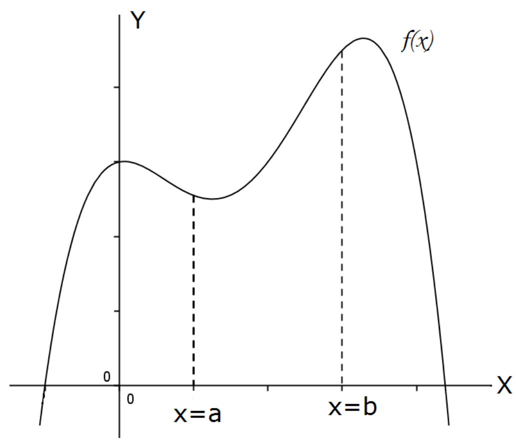
Note que como las bases de los rectángulos son iguales, entonces la fórmula anterior podemos reescribirla como:

$$Área_{total} = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)dx$$

concluimos que la suma de las $\boldsymbol{n}$ alturas de los rectángulos multiplicadas por la base es igual al área total.

Precisamente esta es la interpretación geométrica de la integral, que de manera formal podemos decir de la siguiente manera:

Sea f una función real y acotada, y [a, b] un intervalo en la recta de los números reales, al calcular la integral de $f(x)$ entre a y b , estamos calculando el área comprendida entre la función $f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas x =a y x =b.



Área bajo la curva de x=a a x=b y el eje de las x

El símbolo de sumatoria Σ derivado del latín, dicho símbolo degeneró en una S alargada, notación introducida por Leibniz en el siglo XVII.

$$\int f(x)dx$$

es la representación de la integral de una función.

En el capítulo 3 se muestra como hacer dichos cálculos, en este capítulo es nuestra intención familiarizarnos con el significado, notación de las integrales, y cálculo mediante fórmulas.

Curiosidades matemáticas:

La invención del cálculo infinitesimal se le atribuye tanto a Newton como a Leibniz, actualmente empleamos la notación creada por Leibniz.

Para resolver:

En equipos investiga los personajes más importantes que han contribuído en la creación del cálculo infinitesimal, y cuáles han sido sus contribuciones, compártelo con tus compañeros mediante una presentación.

Fórmulas de Integrales Inmediatas

Una manera sencilla de verificar si el resultado obtenido al efectuar la integral es correcto, es calcular su derivada[1].

Algunas integrales pueden resolverse utilizando fórmulas, otras requieren un mayor análisis y uso de métodos particulares. En este capítulo resolveremos integrales mediante fórmulas, comencemos por conocer algunas fórmulas sencillas de integración[8].

1.3.1. Algebraicas

1. $\int(du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

   donde u, v y w son funciones reales de una variable
2. $\int a\, dv = a \int dv$

   donde a es un factor constante (un número)
3. $\int dx = x + C$

   donde C es una constante
4. $\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$

5. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln|C| + \ln|v| = \ln|Cv|$, haciendo $C = \ln C$

1.3.2. Logarítmicas

6. $\int \ln v\, dv = v \ln|v| - v + C$

7. $\int v^n \ln v\, dv = v^{n+1} \left[\frac{\ln|v|}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C$

1.3.3. Exponenciales

8. $\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$
9. $\int e^v \, dv = e^v + C$

1.3.4. Trigonométricas

10. $\int sen\ v\ dv = -\cos v + C$
11. $\int \cos v\ dv = sen\ v + C$
12. $\int sec^2\ v\ dv = \tan v + C$
13. $\int csc^2\ v\ dv = -\cot v + C$
14. $\int \sec v \tan v\ dv = \sec v + C$
15. $\int \csc v \cot v\ dv = -\csc v + C$
16. $\int \tan v\ dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
17. $\int \cot v\ dv = \ln|sen\ v| + C$
18. $\int \sec v\ dv = \ln|sec\ v + \tan v| + C$
19. $\int \csc v\ dv = \ln|csc\ v - \cot v| + C$

Ejemplo:

Calcular la integral:

$$\int x^3 dx$$

primero es conveniente identificar una fórmula para solucionar esta integral.

La fórmula número 4 corresponde, donde el valor n = 3 es el exponente de x, la función x corresponde con v, así $dx = dv$.

$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

Ejemplo:

$$\int (x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 2)dx$$

como se trata de un polinomio, podemos aplicar la fórmula 1

$$\int (x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 2)dx =$$

la integral de una suma o resta es igual a la suma o resta de las integrales

$$\int x^4\,dx + \int 5x^3\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx - \int 2\,dx$$

aplicamos la fórmula 4 a la primera integral

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

la fórmula 2 donde a = 5 para la segunda integral

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx$$

seguida de aplicar la fórmula 4

$$5\int x^3\,dx = 5\left(\frac{x^4}{4}\right) + C = \frac{5}{4}\,x^4 + C$$

Para la tercera integral al igual que la segunda aplicamos la 2 y 4

$$\int 3x^2\,dx = \frac{3}{3}\,x^3 + C = x^3 + C$$

En la cuarta integral observamos que el exponente de x es uno, entonces nuevamente aplicamos el mismo procedimiento de la primera integral con la fórmula 4

$$\int 4x\,dx = 4\,\frac{x^2}{2} = 2x^2 + C$$

al último término aplicamos la fórmula 2 y en seguida la 3

$$\int 2\,dx = 2\int dx = 2\,x + C$$

Finalmente, sumamos los resultados de cada integral (respetando los signos), la suma de las constantes C, podemos anotarla como una sola, llamada la constante de la integral, teniendo por resultado

$$\int (x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 2)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

A medida que se vayan adquiriendo habilidades en la solución de integrales, veremos que no es necesario hacer el desglose de cada una de ellas.

Nota: en la fórmula 4 aparece la anotación $n \neq -1$, esto es porque (- 1 + 1 = 0) y la división entre cero no está definida, en ese caso se aplicará la fórmula 5.

Ejemplo:

$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x}$, y por la fórmula 5

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Para resolver:

Encontrar el resultado de:

$\int 8\,dx$	
$\int x\,dx$	
$\int (3x^2 - 2x)dx$	
$\int \left(\frac{x^4}{2} + 4x^3\right) dx$	
$\int \left(x^3 + \frac{2}{x}\right) dx$	

Veamos algunos ejemplos de integrales de funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas.

Ejemplo: Encontrar la integral indefinida de:

$$\int a \ln x\,dx$$

Como a representa un valor constante, podemos ubicarlo fuera del signo de la integral

$$a \int \ln x\,dx$$

Aplicando la fórmula 6

$$a \int \ln x \, dx = a\,(x \ln x - x) + C$$

Ejemplo: resolver

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

Aplicando la fórmula 7, y sustituyendo a n = 3, por ser el exponente de xcursiva,

$$\int x^3 \ln x \, dx = \; x^4 \left[\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{4^2}\right] + C$$

Finalmente

$$\int x^3 \ln x \, dx = \; x^4 \left[\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right] + C$$

Recordemos que en una función algebraica se tiene una variable elevada a una potencia $(2x)^5$, mientras que en una función exponencial es una constante elevada a una variable (5^{2x}).

Ejemplo: encontrar

$$\int 7\,(2^x)\;dx$$

Sacamos el 7 de la integral, por ser una constante:

$$7 \int (2^x)\;dx$$

enseguida aplicamos la fórmula 8 en donde a puede ser cualquier valor constante, en este caso a = 2, de manera que:

$$\int 7\,(2^x)\;dx = 7\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) + C$$

Cuando $a = e$, es decir a = la base del logaritmo natural, la fórmula que se aplica es la 9,

Ejemplo: obtener la integral de $4e^x$

$\int 4\,(e^x)\ dx = 4\,(e^x) + C$

Curiosidades matemáticas:

Muchas de las calculadoras científicas permiten al usuario elegir grados (Deg), radianes (R) o neogrados (G). Esta unidad no se usa extensamente. La propuso inicialmente Francia y fue adoptada por otros países de Europa. En este sistema el ángulo recto se divide en 100 partes iguales y a cada una de ellas se le llama neogrado, esta unidad se subdivide en 100 neominutos y cada neominuto en 100 neosegundos. Esta unidad ha quedado obsoleta. En el SI únicamente se admite el radián y el grado.

Ejemplo:

Determinar el resultado de la integral $\int 12sec^2\,x\,dx$

Se saca, de la integral, la constante

$$12\int sec^2\,x\,dx$$

aplicamos la fórmula trigonométrica correspondiente:

$$\int 12sec^2\,x\,dx = 12\tan x + C$$

Ejemplo: resolver $\int \sec x \, dx$

Nuevamente utilizamos la fórmula trigonométrica correspondiente:

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

notemos que la solución de esta integral está tomada como un valor absoluto, esto es debido a que, como sabemos, no existen logaritmos de números negativo ni de cero.

Para resolver:
Encontrar el resultado de las integrales siguientes

$\int 4 \ln x \, dx$	
$\int 9\, x^2 \ln x \, dx$	
$\int 12(3^x) \; dx$	
$\int 5(e^x) \; dx$	
$\int secx \tan x \, dx$	
$\int csc^2 xdx$	
$\int \csc x \cot x \; dx$	

1.3.5. De la forma $u^2 \pm a^2$, $a^2 - u^2$

Hay algunas integrales que no se pueden resolver directamente con las fórmulas anteriores, sin embargo, se tienen algunas fórmulas que son de utilidad para dar solución a estas integrales, únicamente es preciso comparar la integral con alguna de las presentadas o, hacer algunas manipulaciones algebraicas para hacerla similar a alguna de ellas.

Fórmulas para integrales de la forma[5]:

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2 - v^2$$

En donde v corresponde a la función y a es una constante.

1. $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} arc\ tan \frac{v}{a} + C$
2. $\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$
3. $\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C$
4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arc\ sen\ \frac{v}{a} + C$
5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left| v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right| + C$
6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\ arc\ sec\ \frac{v}{a} + C$
7. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\ dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2}\ arc\ sen\ \frac{v}{a} + C$
8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right| + C$

Ejemplo: encontrar el resultado de las siguientes integrales

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 49}$

Como podemos observar, el número 49 corresponde al término a^2, por lo que

$a = \sqrt{49} \therefore a = 7,$

y el resultado de la integral quedaría:

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 49}} = \int \frac{dx}{x^2 + 7^2} = \frac{1}{7} arc\ tan \frac{x}{7} + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{144 - x^2}}$

nuevamente observamos que $a^2 = 144$, es decir que $a = 12$, nuestra integral es:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{144 - x^2}} = arc\ sen\ \frac{x}{12} + C$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 28}}$

Ahora $a^2 = 28 \therefore a = \sqrt{28}$ y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 28}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 28}\right| + C$$

En algunas integrales no es evidente la semejanza con estas integrales, hay que realizar algunos artificios algebraicos para encontrar la solución.

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int \frac{dv}{x^2 - 6x}$$

Esta integral no tiene una fórmula directa, completaremos un trinomio cuadrado perfecto, para ello, recordemos que:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Para completar el trinomio a cuadrado perfecto, le sumamos 9 y tendremos la expresión:

$$x^2 - 6x + 9$$

es necesario restar la misma cantidad para no alterar la expresión original:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 3^2$$

Así, adecuamos la expresión para aplicar la integral:

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v - a}{v + a} \right| + C$$

donde

$$v^2 = (x - 3)^2 \therefore v = (x - 3)$$

$$a^2 = 3^2 \therefore a = 3$$

$$dv = dx$$

así:

$$\int \frac{dv}{x^2 - 6x} = \frac{1}{2(3)} \ln \left| \frac{(x - 3) - 3}{(x - 3) + 3} \right| + C$$

finalmente:

$$\int \frac{dv}{x^2 - 6x} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x - 6)}{x} \right| + C$$

Ejemplo:

Determinar el valor de la integral

$$\int \frac{dx}{x^2 + 12\,x + 61}$$

Al analizar el denominador vemos que se puede completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 - 36 + 61 = \; x^2 + 12\,x + 36 + 25$$

por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 12\,x + 61} = \int \frac{dx}{(x+6)^2 + 25}$$

De aquí vemos que:

$$v^2 = \;(x+6)^2 \;\therefore v = (x+6)$$

$$a^2 = 25 \;\therefore a = 5$$

$$dv = dx$$

así:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 12\,x + 61} = \frac{1}{5}\, arc\tan\frac{(x+6)}{25} + C$$

Para resolver:

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-110}}$	
$\int \sqrt{81-\ x^2}\ dx$	
$\int \sqrt{x^2-16}\, dx$	
$\int \sqrt{(3+x)(3-x)}\, dx$	
$\int \frac{dx}{x^2+14x+40}$	
$\int -\frac{dx}{x^2+14x+40}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{12-\ x^2}}$	

Nota: recordemos que $a^2-\ b^2=\ (a+b)(a-b)$

1.4. Problemario.

Encontrar la diferencial dy y hacer la evaluación de dy para los valores de x y dx indicados.

1. $y = x^3 + 2x^2 - 3$ para $x = 3,\ dx = \frac{1}{3}$

2. $y = (x+3)^2$ para $x = 3,\ dx = \frac{1}{2}$

3. $y = e^x$ para $x = 0,\ dx = 16$

4. Haciendo uso de diferenciales calcular la pintura que requiere una esfera para aplicarle una capa de 0.02 mm de espesor si el diámetro exterior de la esfera es de 10 cm.

Encontrar el resultado de:

5. $\int 5\,dx$

6. $\int (x^3 - x^2 + 3)dx$

7. $\int (5x^3 + 3x^2 - 3)dx$

8. $\int 6e^x dx$

9. $\int [12(7^x)]dx$

10. $\int (\sec x \tan x - \csc x \cot x)dx$

11. $\int (\tan x + \cot x)dx$

Resuelve las integrales:

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^4}$

13. $\int \frac{dx}{36-x^2}$

14. $\int \frac{dx}{x^2+25}$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-144}}$

16. $\int \frac{dy}{y^2-49}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+x^2}}$

19. $\int \sqrt{y^2+15}\, dy$

20. $\int \sqrt{x^2-14}\, dx$

21. $\int \frac{x^{-1}\, dx}{\sqrt{-(49-x^2)}}$

1.5. Autoevaluación

Encuentra la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = 4x^2 + 2x$
2. $y = \sqrt{2x+3}$
3. $y = 2sen\ 2x$
4. $y = \cos 3x$
5. $y = \frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9$

Resuelve las integrales siguientes:

6. $\int (9x^2 - 4x + 1)dx$
7. $\int \frac{1}{8}\, dx$
8. $\int \frac{5x^2 dx}{x^3}$
9. $\int 4^x dx$
10. $\int 4\, e^x dx$

Encuentra el resultado de las siguientes integrales:

11. $\int \tan x\, dx$
12. $\int sec^2\, x\, dx$
13. $\int -\, sen\, x\, dx$
14. $\int - \tan x\, dx$

Integra las siguientes funciones respecto de x:

15. $f(x) = \frac{1}{x^2+8}$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2-12}$
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-56}}$
18. $f(x) = \sqrt{17 - x^2}$
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 14}$

1.6. Soluciones al Problemario

1. $dy = x(3x - 4)dx\, ; dy = 5$

2. $dy = (2x + 6)dx;\; dy = 6$

3. $dy = e^x\, dx; dy = 16$

4. El volumen de la esfera es: $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$ y la diferencial del volumen es:

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

el radio exterior de la esfera es: 5 cm y un diferencial de r

$$dr = 0.02\, mm = 0.002\, cm$$

al sustituir los valores tenemos

$$dV = 4\pi(5\, cm)^2(0.002\, cm)$$

$V \approx \frac{1}{5}\pi\, cm^3 \approx 0.6283\, cm^3$

5. $\int 5\, dx = 5x + C =$

6. $\int (x^3 - x^2 + 3)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3\, x + C$

7. $\int (5x^3 + 3x^2 - 3)dx = \frac{5x^4}{4} + x^3 - 3x + C$

8. $\int 6e^x dx = 6e^x + C$

9. $\int [12(7^x)]dx = \frac{12(7^x)}{\ln 7} + C =$

10. $\int (sen\, x + \cos x)dx = sen\, x - \cos x + C$

11. $\int (\sec\, x \tan x - \csc x \cot x)dx = \csc x + \sec x + C$

12. $\int (\tan x + \cot x)dx = \ln sen\, x - \ln \cos x + C = \ln \tan x + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2+a^4} = \frac{1}{a^2} arc \tan \frac{x}{a^2} + C$

14. $\int \frac{dx}{36-x^2} = \frac{1}{12} \ln \left|\frac{6+x}{6-x}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2+25} = \frac{1}{5}\; arc \tan \left(\frac{x}{5}\right) + C$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-144}} = \frac{1}{12}\; arc \sec \frac{x}{12} + C$

17. $\int \frac{dy}{y^2-49} = \frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-7}{x+7}\right| + \mathrm{C}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{20 + x^2}\right| + C$

20. $\int \sqrt{y^2+15}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{y^2+15} + \frac{15}{2}\ln\left|y + \sqrt{y^2+15}\right| + C$

21. $\int \sqrt{x^2-14}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-14} + 7\ln\left|x + \sqrt{x^2-14}\right| + C$

22. $\int \frac{x^{-1}\, dx}{\sqrt{-(49-x^2)}} = \frac{1}{7}\, arc\sec\frac{x}{7} + C$

1.7. Soluciones de la autoevaluación

1. $y = 4x^2 + 2x\,;\; dy = (\,8x + 2)dx$
2. $y = \sqrt{2x+3}\,;\; dy = \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$
3. $y = 2sen\,2x;\; dy = 4\cos 2x\,dx$
4. $y = \cos 3x;\; dy = -3\,sen\,3x\,dx$
5. $y = \frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 9;\; dy = x(5x-1)dx$
6. $\int (9x^2 - 4x + 1)dx = 3x^3 - 2x^2 + x + C$
7. $\int \frac{1}{8}\,dx = \frac{x}{8} + C$
8. $\int \frac{5x^2dx}{x^3} = 5\ln x + C$
9. $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$
10. $\int 4\,e^x dx = 4\,e^x + C$
11. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
12. $\int sec^2\,x\,dx = \tan x + C$
13. $\int -\,sen\,x\,dx = \cos x + C$
14. $\int -\tan x\,dx = \ln|\cos x| + C$
15. $f(x) = \frac{1}{x^2+8};\; \int \frac{dx}{x^2+8} = \frac{1}{\sqrt{8}}\,arc\tan\frac{x}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,arc\tan\frac{x}{2\sqrt{2}} + C$
16. $f(x) = \frac{1}{x^2-12};\; \int \frac{dx}{x^2-12} = \frac{1}{2\sqrt{12}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{12}}{x+\sqrt{12}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{3}}{x+2\sqrt{3}}\right| + C$
17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-56}};\; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-56}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-56}\right| + C$
18. $f(x) = \sqrt{17-x^2};\; \int \sqrt{17-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{17-x^2} + \frac{17}{2}\,arc\,sen\,\frac{x}{\sqrt{17}} + C$
19. $f(x) = \sqrt{x^2-14};\; \int \sqrt{x^2-14}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-14} - 7\ln\left|x + \sqrt{x^2-14}\right| + C$

1.8. Conclusión

En este capítulo se han visto los fundamentos de lo que es el cálculo integral, comenzando por la diferencial, que es básica para comprender la razón de la integración, seguida de la antiderivada y las integrales indefinidas directas, que pueden ser solucionadas por medio de aplicación de fórmulas o comparación con tablas.

Aunque sabemos que en la actualidad se tiene gran facilidad para desarrollar integrales por medio de Software, es primordial comprender el cálculo integral y conocer los diferentes métodos de integración, los cuales se trabajarán en el siguiente capítulo.

Referencias

[1] José L. Molina, Cortés José L, et al. (2011). Análisis derivativo de funciones. México: CONALEPMICH.
[2] Purcel, Edwin J., Dale Varberg, y Steven E. Rigdon. *Cálculo.* México: PEARSON EDUCACIÓN, 2007.
[3] Ibáñez Patricia, García Gerardo (2007) Matemáticas V: Cálculo diferencial. México: Cengage Learning Editores
[4] Becerra José M. (2005) Matemáticas VI. México: Universidad Autónoma de México.
[5] Colegio Nacional de Matemáticas. *Cálculo Diferencial e Integral.* México: PEARSON, 2010.
[6] Leithold, Louis. *El Cálculo con geometría analítica.* México: HARLA, 1986.

[7] Hughes-Hallett, Deborah, y Andrew M. y varios Gleason. *Cálculo Aplicado.* México: CECSA, 2004.

[8] Granville William A. (1963). Cálculo diferencial e integral. México: UTEHA.

Capítulo 2:

Técnicas de integración

"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo".

Albert Einstein

2.1. Técnicas de integración[1,2]

Existen integrales que no pueden ser resueltas de forma inmediata, por lo que es necesario buscar la manera de transformarlas a expresiones que faciliten su solución. En este capítulo vamos a conocer algunos métodos llamados, técnicas de integración, que aplicaremos para encontrar soluciones de integrales que no se puedan resolver de manera inmediata.

2.2. Por sustitución o cambio de variable

Hay integrales que son muy parecidas a las que se pueden resolver por medio de fórmulas, solo que la variable puede estar acompañada por un coeficiente con términos agrupados, por ejemplo:

$$\int \cos 5x \, dx$$

$$\int (2x-6)^3 \, dx$$

$$\int \sqrt[3]{x+5} \, dx$$

En estos casos se puede aplicar una técnica muy sencilla consistente en transformar la integral, si es posible, en una de las expresiones siguientes:

$$\int v^n \, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

o

$$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C$$

o alguna otra fórmula directa.

Veamos algunos ejemplos:

Encontrar la integral de:

$$\int (3x-4)^2\,dx$$

En este caso observamos que si hacemos $v=(3x-4)$, la integral sería: $\int v^2\,dx$, pero así no podemos realizar la integral porque por un lado tenemos la variable v y por otra parte tenemos la diferencial dx, por lo que es preciso cambiar también esta diferencial, para lo cual, comenzamos por obtener la derivada de v y de ahí la diferencial respectivo: $\frac{dv}{dx}=\frac{d\,(3x-4)}{dx}=3$ entonces $dv=3\,dx\ \therefore dx=\frac{dv}{3}$, de tal manera que podemos decir que:

$$\int (3x-4)^2 dx=\int v^2\,\frac{dv}{3}=\frac{1}{3}\int v^2\,dv$$

aplicando la fórmula:

$$\frac{1}{3}\int v^2\,dv=\frac{1}{3}\left(\frac{v^3}{3}\right)+C$$

regresamos con el cambio de variable inicial:

$$\int (3x-4)^2 dx=\frac{(3x-4)^3}{9}+C$$

Al desarrollar el binomio al cubo:

$$\int (3x-4)^2 dx=\frac{1}{9}(27x^3-108x^2+144x-64\,)+C=3x^3-\ 12x^2+\ 16\,x-\frac{64}{9}+C$$

Si sumamos $C-\frac{64}{9}$ queda solamente una constante, por lo que:

$$\int (3x-4)^2 dx=3x^3-\ 12x^2+16\,x+C$$

Ejemplo: desarrolla

$$\int sen\,\frac{x}{3}\,dx$$

Ahora hagamos $v = \frac{x}{3}$, así $\int sen\,\frac{x}{3}\,dx = \int sen\,v\,dx$

Para cambiar a dx: $dx = 3\,dv$ por lo que:

$$\int sen\,\frac{x}{3}\,dx = \int 3\,sen\,v\;dv = -3\cos v + C$$

Se sustituye v por $\frac{x}{3}$

$$\int sen\,\frac{x}{3}\,dx = -3\cos\frac{x}{3} + C$$

Veamos otro ejemplo:

Resuelve:

$$\int \frac{\cos 3x\;dx}{4 + sen\,3x}$$

haciendo $v = 4 + sen\,3x$, por lo tanto $\frac{dv}{dx} = 3\cos 3x$, consecuentemente $\cos 3x\,dx = \frac{dv}{3}$; entonces podemos decir que

$$\int \frac{\cos 3x\;dx}{4 + sen\,3x} = \int \frac{dv}{3v} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v}$$

la cual podemos resolver directamente, por lo tanto:

$$\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C$$

Sustituyendo $v = 4 + sen\,3x$

$$\int \frac{\cos 3x\;dx}{4 + sen\,3x} = \frac{1}{3}\ln|4 + sen\,3x| + C$$

Ejemplo:

Determinar la integral

$$\int e^{2x}dx$$

Nuevamente $v = 2x$, por tanto $dx = \frac{dv}{2}$

$$\int e^{2x}dx = \int e^{v}\frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int e^{v}\,dv$$

Al resolver y sustituir por $v = 2x$

$$\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Para resolver:

Por cambio de variable, encuentra la integral de:

$\int \frac{x\,dx}{(2x^2-3\,)^2}$	
$\int sen(x+2)dx$	
$\int xsen(x^2+2)dx$	
$\int x(x^2+6)dx$	
$\int x^2 sen\,x^3 dx$	
$\int \frac{x(x^2-3)dx}{x^4-6x^2+9}$	
$\int e^{2x+6}dx$	
$\int \sqrt{x+5}dx$	

2.3. Por partes

Recordemos la fórmula para derivar el producto de dos funciones *u* y *v*:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

de aquí, obtenemos la diferencial[1]

$$d\,uv = u\,dv + v\,du$$

Al despejar $u\,dv$:

$$u\,dv = d\,uv - v\,du$$

Si integramos esta ecuación:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

En donde:

u es una función que es fácil de derivar,

dv es una función que es fácil de integrar,

$\int v\,du$ es una función más fácil de integrar que la función original.

Con esta fórmula podemos desarrollar la integración por partes, la cual se aplica cuando se desea integrar:

a) Producto de funciones algebraicas por funciones trigonométricas.
b) Producto de funciones algebraicas por exponenciales.
c) Producto de funciones exponenciales por trigonométricas.
d) Funciones logarítmicas.
e) Producto de funciones logarítmicas por algebraicas.

f) Funciones trigonométricas inversas.

g) Producto de funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

La palabra LIATE puede ser muy útil para elegir la función u de acuerdo al orden en que aparezcan en la integral, donde cada letra indica el tipo de función:

L= logarítmicas

I= inversas

A= algebraicas

T= trigonométricas

E= exponenciales

A continuación se muestran algunos ejemplos:

Encontrar el resultado de

$$\int 2\,x \cos x\, dx$$

Extraemos la constante de la integral:

$$2\int x \cos x\, dx$$

Determinamos a u y a dv, de manera que sean fáciles de derivar e integrar, respectivamente, en este caso:

$$u = x \ \therefore du = dx$$

$$dv = \cos x\, dx \ \therefore v = \int \cos x\, dx = sen\ x$$

Sustituimos en la fórmula de integración por partes:

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int 2\, x \cos x\, dx = 2\left[x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx\right]$$

$$\int sen\, x\, dx = -\cos x$$

Por lo tanto:

$$\int 2\, x \cos x\, dx = 2(x\, sen\, x + \cos x) + C$$

Obtener el resultado de

$$\int arc\, sen\, x\, dx$$

Definimos:

$$u = arc\, sen\, x$$

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\, arc\, sen\, v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\, \frac{dv}{dx}$$

En consecuencia:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Por otro lado,

$$dv = dx\ \therefore v = \int dx = x$$

Sustituyendo:

$$\int arc\, sen\, x\, dx = x\, arc\, sen\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esta integral se resuelve por cambio de variable, hacemos:

$$w = 1 - x^2 \;\therefore dw = -2x\,dx \;\therefore x\,dx = -\frac{dv}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \; equivale\ a - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{v}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{v}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int arc\ sen\ x\,dx = x\ arc\ sen\ x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Resolver:

$$\int e^x\ sen\ x\,dx$$

Elegimos:

$$u = e^x \;\therefore du = e^x dx$$

$$dv = sen\ x\,dx \;\therefore v = \int sen\ x\,dx = -\cos x$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\int e^x\ sen\ x\,dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x\ dx$$

Resolvemos la integral, que nuevamente es por partes:

$$\int e^x \cos x\ dx$$

$$u = e^x \;\therefore du = e^x dx$$

$$dv = \cos x\,dx \;\therefore v = \int \cos x\,dx = sen\ x$$

De esta manera

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x\ sen\ x - \int e^x\ sen\ x\,dx$$

por consiguiente:

$$\int e^x \, sen\, x\, dx = -e^x \cos x + e^x \, sen\, x - \int e^x \, sen\, x\, dx$$

Aquí pasamos el término de la integral al lado izquierdo de la ecuación y reducimos términos semejantes:

$$2\int e^x \, sen\, x\, dx = e^x \, sen\, x - e^x \cos x + C$$

Finalmente:

$$\int e^x \, sen\, x\, dx = \frac{e^x}{2} \left(sen\, x - \cos x \right) + C$$

Encontrar:

$$\int \ln x \, dx$$

Hacemos:

$$u = \ln x \;\therefore\; du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \;\therefore\; v = \int dx = x$$

Entonces:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{x\, dx}{x}$$

Por lo tanto:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C = x\,(\ln x - 1) + C$$

Para practicar:

$\int x\ sen\ 3x\ dx$	
$\int x \cos 2x\, dx$	
$\int xsen\ \frac{x}{3} dx$	
$\int 3x \ln x\, dx$	
$\int arc\ cos\ x\ dx$	
$\int arc \tan x\ \ dx$	
$\int arc \sec 2x\, dx$	
$\int e^x \cos x\, dx$	

2.4. Por fracciones parciales[1,2,3]

Este método se aplica en integrales de funciones racionales que se presentan con la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en los que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, por lo que, en caso de no ser así, es preciso efectuar primero la división

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

de esta manera se obtiene como resultado un cociente más una fracción que tiene el residuo como numerador y $Q(x)$ como denominador.

En este tipo de integrales se presentan varios casos.

Caso[1,2,3] 1:

En el denominador únicamente se tienen factores de primer grado y no se repiten,

Trabajemos un ejemplo para ilustrar este caso.

Resolver:

$$\int \frac{x-4}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$$

Podemos observar que el denominador se puede factorizar, primero por factor común:

$$x(x^2 + x - 2)$$

enseguida por producto de dos binomios:

$$x(x + 2)(x - 1)$$

de esta manera nos damos cuenta que el denominador se puede descomponer en tres factores de primer grado, de la forma

$$mx + b$$

y efectivamente vemos que los tres factores son diferentes, correspondiéndole a cada uno de ellos una fracción de la forma:

$$\frac{A}{mx + b}$$

En donde A es una constante que se tiene que determinar.

Volvamos al ejemplo en el que la función racional:

$$\frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

La podemos escribir:

$$\frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x - 4}{x(x + 2)(x - 1)}$$

$$\frac{x - 4}{x(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}$$

Resolvamos la fracción:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x + 2)(x + 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 2)}{x(x + 2)(x - 1)}$$

Si efectuamos las operaciones indicadas, reagrupamos y factorizamos términos semejantes:

$$\frac{A(x+2)(x+1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-Bx+Cx^2+2Cx}{x(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-Bx+Cx^2+2Cx}{x(x+2)(x-1)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-B+2C)x-2A}{x(x+2)(x-1)}$$

Igualamos el numerador de la función original con el numerador de la nueva fracción:

$$x-4=(A+B+C)x^2+(A-B+2C)x-2A$$

Si igualamos los coeficientes, podemos observar que en el miembro izquierdo de la igualdad no existe el término cuadrático, por lo que:

$$A+B+C=0$$

El coeficiente de x es uno, de tal forma que:

$$A-B+2C=1$$

y el término independiente es -4 por tanto

$$-2A=-4$$

Lo cual nos genera un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$A+B+C=0$$

$$A-B+2C=1$$

$$-2A=-4$$

La solución del sistema es:

$$A=2$$

$$B=-1$$

$$C=-1$$

La integral original la podemos escribir:

$$\int \frac{x-4}{x^3+\ x^2-2x}\,dx = \int \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x-1)}\right] dx$$

$$\int \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x-1)}\right] dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x-1} = 2\ln|x| - \ln|x+2| - \ln|x-1| + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{x-4}{x^3+\ x^2-2x}\,dx = 2\ln|x| - \ln|x+2| - \ln|x-1| + C$$

Resolver:

$$\int \frac{10x+9}{4x^2+10x-6}\,dx$$

Descomponemos en factores la expresión: $4x^2+10x-6$

$$4x^2+10x-6 = (4x-2)(x+3)$$

Así:

$$\frac{10x+9}{4x^2+10x-6} = \frac{10x+9}{(4x-2)(x+3)}$$

$$\frac{10x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{(4x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Al sumar las fracciones:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(4x-2)}{(4x-2)(x+3)}$$

Reagrupando e igualando con la fracción inicial:

$$\frac{10x+9}{x^2+x-6} = \frac{(A+4B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

Por lo tanto:

$$A+4B=10$$

$$3A-2B=9$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$A=4$$

$$B=\frac{3}{2}$$

Podemos escribir:

$$\int \frac{10x+9}{4x^2+10x-6}dx = \int \frac{4}{4x-2}dx + \int \frac{3}{2(x+3)}dx$$

Al resolver las integrales:

$$\int \frac{4}{4x-2}dx = \ln|2x-1|$$

$$\int \frac{3}{2(x+3)}dx = \frac{3}{2}\ln(x+3)$$

Finalmente:

$$\int \frac{10x+9}{4x^2+10x-6}dx = \ln|2x-1| + \frac{3}{2}\ln(x+3) + C$$

Caso[1,2,3] II:

En este caso se tienen denominadores de primer grado, pero algunos se repiten.

Al tener un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla la siguiente suma de fracciones:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\cdots+\frac{Y}{(ax+b)^2}+\frac{Z}{(ax+b)}$$

En donde los numeradores A, B, C… Y, Z, son constantes por determinar

Ejemplo:

Encontrar el resultado de la siguiente integral

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x+3)(x+2)^2}dx$$

Desarrollamos la suma de fracciones

$$\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)}$$

Realizamos la suma de fracciones reagrupamos el numerador e igualamos con la función original:

$$\frac{A(x+2)^2+B(x+3)+C(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+2x+4}{(x+3)(x+2)^2}=\frac{(A+C)x^2+(4A+B+5C)x+(4A+3B+6C)}{(x+3)(x+2)^2}$$

Igualamos los coeficientes:

$$A + C = 1$$

$$4A + B + 5C = 2$$

$$4A + 3B + 6C = 4$$

Resolvemos las ecuaciones y obtenemos:

$$A = 7$$

$$B = 4$$

$$C = -6$$

Sustituimos los valores en la integral :

$$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+3)(x+2)^2} = \int \frac{7}{(x+3)} dx + \int \frac{4}{(x+2)^2} dx + \int \frac{-6}{(x+2)} dx$$

Resolviendo:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} dx = 7 \ln|x+2| - \frac{4}{x+2} - 6 \ln|x+2| + C$$

Veamos otro ejemplo

Resolver la integral:

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{(x+1)^2} dx$$

En este caso, al desarrollar el binomio al cuadrado del denominador observamos que es de segundo grado, igual que el numerador, por lo que primeramente se debe efectuar la división, obteniendo lo siguiente:

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{3x^2 + 5x}{x^2 + 2x + 1} dx = \int 3dx - \int \frac{x+3}{(x+1)^2} dx$$

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{(x+1)^2} dx = 3x - \int \frac{x+3}{(x+1)^2} dx$$

La función de la segunda integral se desarrolla:

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)}$$

Realizamos la suma de fracciones, reagrupamos el numerador e igualamos con la función original:

$$\frac{A + B(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{Bx + (A+B)}{(x+1)^2}$$

Igualamos los coeficientes:

$$B = 1$$

$$A + B = 3 \therefore A = 2$$

La segunda integral se resuelve

$$\int \frac{x+3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{(x+1)^2} dx + \int \frac{dx}{(x+1)}$$

Así:

$$\int \frac{x+3}{(x+1)^2} dx = -\frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1|$$

Finalmente:

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{(x+1)^2} dx = 3x - \left[-\frac{2}{(x+1)} + \ln|x+1|\right] + C$$

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{(x+1)^2} dx = 3x + \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

Para resolver:

$\int \frac{x^2}{x^2+x-12}\,dx$	
$\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+x^2}dx$	
$\int \frac{x^2-2x+1}{x^3+x^2-12x}dx$	
$\int \frac{2x^2-x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$	
$\int \frac{-(4x+4)}{x^3-4x}\,dx$	
$\int \frac{x^2+3x-8}{(x+3)(x-4)^2}\,dx$	
$\int \frac{2x^2+5x-7}{(x+2)^3}dx$	
$\int \frac{x^2+5x+1}{(x-4)^3}dx$	
$\int \frac{6x^2+12x-18}{(x-1)^3}dx$	
$\int \frac{4x^2-5}{(x+2)(x-1)^2}dx$	

Caso[2,1,3] III:

Se presenta cuando el denominador tiene factores de segundo grado y ningún factor se repite. A cada factor de la forma $ax^2 + bx + c$, le corresponde un factor de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

En donde, como en los casos anteriores A y B son constantes por determinar.

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x^3 + 4x} dx$$

Primero factorizamos por factor común al denominador:

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} dx$$

Podemos ver que ahora el denominador tiene dos factores, el segundo de los cuales es de segundo grado en el cual $a = 1, b = 0, c = 4$

Arreglamos las fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 4)}$$

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} = \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 4)}$$

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + 4A}{x(x^2 + 4)}$$

Al igualar los numeradores obtenemos:

$$A + B = 2$$

$$C = 0$$

$$4A = 3$$

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos: $A = \frac{3}{4}, B = \frac{5}{4}, C = 0$

De manera que:

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} dx = \int \frac{\frac{3}{4}}{x} dx + \int \frac{\frac{5}{4}x + 0}{x^2 + 4} dx$$

Observemos que la segunda integral debemos resolverla por cambio de variable

Finalmente al resolver las integrales tenemos:

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x(x^2 + 4)} dx = \frac{3}{4} \ln x + \frac{5}{8} \ln|x^2 + 4| + C$$

Ejemplo:

Obtener el resultado de

$$\int \frac{(x + x^2)}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx$$

Primero factorizamos al denominador por agrupación:

$$x^3 + x - 3x^2 - 3 = x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

Entonces:

$$\int \frac{(x + x^2)}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx = \int \frac{x + x^2}{(x - 3)(x^2 + 1)} dx$$

Nuevamente observamos que el segundo factor del denominador es de segundo grado por lo que podemos hacer el siguiente arreglo de fracciones:

$$\frac{x+x^2}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x+x^2}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x+x^2}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+(-3B+C)x+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$A+B=1$$

$$-3B+C=1$$

$$A-3C=0$$

Resolviendo el sistema:

$$A=\frac{6}{5}$$

$$B=-\frac{1}{5}$$

$$C=\frac{2}{5}$$

Por lo tanto:

$$\int\frac{(x+x^2)}{x^3-3x^2+x-3}dx=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{(x+x^2)}{x^3-3x^2+x-3}dx=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

Finalmente:

$$\int\frac{x+x^2}{x^3-3x^2+x-3}dx=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln(x^2+1)+\frac{2}{5}arc\tan x+C$$

Caso[1,2,3] IV:

En este caso los denominadores son todos de segundo grado y algunos se repiten. Cuando hay un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2 + bx + c)^n$$

Se desarrollan n fracciones parciales en una sumatoria, de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{Vx + W}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{Yx + Z}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Ejemplo:

Encontrar el resultado de la integral

$$\int \frac{(4x^3 + 8x)dx}{(x^2 + 9)^2}$$

Desarrollamos las fracciones parciales:

$$\frac{(4x^3 + 8x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Hacemos la suma de fracciones:

$$\frac{(4x^3 + 8x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{(Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Desarrollamos las multiplicaciones y reagrupamos:

$$\frac{(4x^3 + 8x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + (9A + C)x + 9B + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$A = 4$$

$$B = 0$$

$$9A + C = 8$$

$$9B + D = 0$$

Las soluciones del sistema:

$$A = 4, B = 0, C = -2, D = 0$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\int \frac{(4x^3 + 8x)dx}{(x^2 + 9)^2} = \int \frac{4x}{x^2 + 9} dx + \int \frac{-28x}{(x^2 + 9)^2} dx$$

Resolvemos ambas integrales por cambio de variable:

$$\int \frac{4x}{x^2 + 9} dx = 2 \ln(x^2 + 9)$$

$$\int \frac{-28x}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{14}{x^2 + 9}$$

Obtenemos el resultado:

$$\int \frac{(4x^3 + 8x)dx}{(x^2 + 9)^2} = 2\left[\ln(x^2 + 9) + \frac{7}{x^2 + 9}\right] + C$$

Ejemplo:

Determinar la integral:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$$

Primero desarrollamos las fracciones parciales:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Hacemos la suma de fracciones:

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A(x^2+1)^2+x(Bx+C)(x^2+1)+x(Dx+E)}{x(x^2+1)^2}$$

Si desarrollamos las operaciones indicadas y reagrupamos:

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A+B=0$$

$$C=1$$

$$2A+B+D=-2$$

$$C+E=1$$

$$A=-1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y tenemos:

$$A=-1; B=1; C=1; D=-1; E=0$$

Nuestra integral queda:

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{x+1}{x^2+1}dx+\int \frac{-x}{(x^2+1)^2}dx$$

Resolvemos cada una de las integrales:

$$\int \frac{-1}{x}dx=\ -\ln|x|$$

La segunda la separamos en dos

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx$$

La primera parte la resolvemos por cambio de variable

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Para la segunda parte aplicamos:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}arc\tan\frac{v}{a}$$

Por lo que:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = arc\tan x$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arc\tan x$$

la tercera integral también la resolvemos por cambio de variable

$$\int \frac{-x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Finalmente el resultado de la integral es:

$$\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2(x^2+1)} + arc\tan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln x + C$$

Para resolver:

$\int \frac{3x}{x^2 - 3x - 4} dx$	
$\int \frac{x + 1}{x^2 - x - 6} dx$	
$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$	
$\int \frac{2x^3}{(x^2 - x)^2} dx$	
$\int \frac{2x^2 + 2}{x^3 + x} dx$	
$\int \frac{2x^4 + 9x^2 + x - 4}{x^3 + 4x} dx$	

2.5. Sustitución trigonométrica[2]

A continuación se muestran algunas identidades trigonométricas[4] que son necesarias en este método de integración.

$$sen\, x = \frac{1}{csc\, x}$$

$$cos\, x = \frac{1}{sec\, x}$$

$$tan\, x = \frac{1}{cot\, x}$$

$$tan\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$$

$$cotx = \frac{\cos x}{sen\, x}$$

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$sec^2x = tan^2x + 1$$

$$csc^2x = cot^2x + 1$$

$$sen\, v \cos v = \frac{1}{2} sen\, 2v$$

$$sen^2v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2v$$

$$cos^2v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$$

$$sen\, 2x = 2\,(sen\, x)(\cos x)$$

$$\cos 2x = 2cos^2x - 1$$

$$tan\, 2x = \frac{2\tan x}{1 - tan^2x}$$

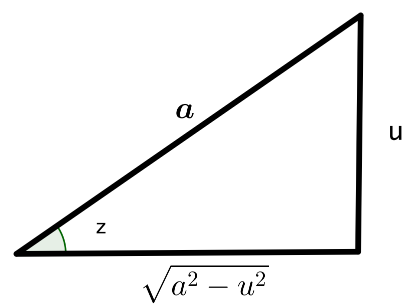
Hay algunas integrales en las que aparecen expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{u^2 + a^2}, \sqrt{u^2 - a^2}$$

Estas expresiones deben solucionarse haciendo uso de expresiones que se obtienen a partir de las relaciones en triángulos rectángulos.

Primer caso:

Cuando se tiene la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, de acuerdo a la figura, al aplicar el teorema de Pitágoras podemos observar cómo se relacionan los lados y encontrar que:



$$sen\, z = \frac{u}{a}$$

Por lo tanto:

$$u = a\, sen\, z$$

Su diferencial es:

$$du = a \cos z\, dz$$

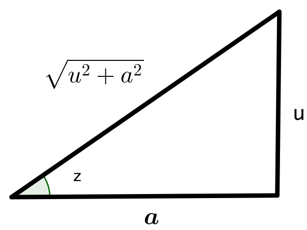
Además:

$$\cos z = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$

Y de esta manera:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z$$

Segundo Caso: se tiene la forma: $\sqrt{u^2+a^2}$, nos referimos a la figura del triángulo rectángulo con los siguientes lados:



$$\tan z = \frac{u}{a}$$

Por tanto:

$$u = a \tan z$$

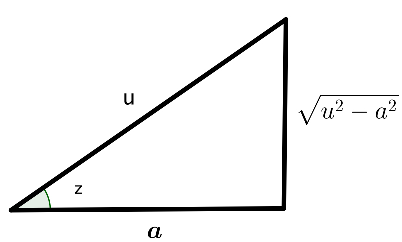
Su diferencial es:

$$du = a\, sec^2\, z\, dz$$

También:

$$\sqrt{u^2+a^2} = a \sec z$$

Tercer caso: se presenta cuando se tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, ahora ubicamos los lados del triángulo



De esta manera:

$$\sec z = \frac{u}{a}$$

Por lo tanto:

$$u = a \sec z$$

Con la diferencial:

$$du = a \sec z \tan z \, dz$$

Además:

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan z$$

Esto lo podemos resumir en la siguiente tabla:

Caso	Sustitución	Diferencial	Transformación
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\ sen\ z$	$du = a \cos z \, dz$	$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos z$
$\sqrt{u^2 + a^2}$	$u = a \tan z$	$du = a\ sec^2\ z\, dz$	$\sqrt{u^2 + a^2} = a \sec z$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a \sec z$	$du = a \sec z \tan z \, dz$	$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan z$

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3}$$

Vemos que se puede aplicar el caso II, por lo que:

$$u^2 = x^2 \therefore u = x$$

$$a^2 = 5 \therefore a = \sqrt{5}$$

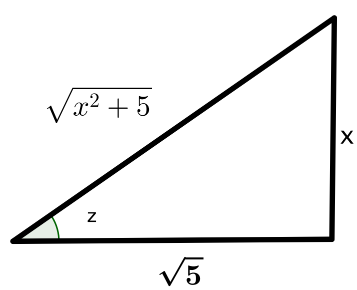
$$dx = \sqrt{5}\, sec^2 z\, dz$$

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5} \sec z$$

Sustituyendo en la integral original

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{5} sec^2 z\, dz}{\left(\sqrt{5} \sec z\right)^3} = \int \frac{dz}{\left(\sqrt{5}\right)^2 \sec z} = \frac{1}{5}\int \cos z\, dz = \frac{1}{5} sen\, z$$

Entonces refiriéndonos al triángulo



$$sen\, z = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{5\sqrt{x^2+5}} + C$$

2.6. Problemario

Hallar:

1. $\int 6x(x^2+1)^3 dx$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}\, dx$

3. $\int \frac{dx}{6-x^2}$

4. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$

5. $\int \frac{x-3}{x^3+x-2}\mathrm{dx}$

6. $\int xe^{5x} dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

8. $\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2} dx$

9. $\int x cos^2\theta\, dx$

10. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$

2.7. Autoevaluación

Determinar las siguientes integrales.

1. $\int (20x - 10)^5 \, dx$

2. $\int \sqrt[3]{9x + 3} \, dx$

3. $\int x e^{sen\, x^2} \cos x^2 \, dx$

4. $\int x^3 \cos x^4 \, dx$

5. $\int x^4 \ln x \, dx$

6. $\int sec^3 x \, dx$

7. $\int x \, e^{ax} \, dx$

8. $\int \frac{14}{x^2+3x-10} \, dx$

9. $\int \frac{\sqrt{144-x^2}}{x^2} dx$

10. $\int \left(\frac{3x^6+7x^5-x^3+11}{x^2} \right) dx$

2.8. Soluciones del problemario

1. $\int 6x(x^2+1)^3dx = 3\int 2x(x^2+1)^3dx$

haciendo $u = x^2+1$

$du = 2x\,dx$

$$3\int (u)^3du = 3\frac{u^4}{4} = \frac{3(x^2+1)^4}{4} + C$$

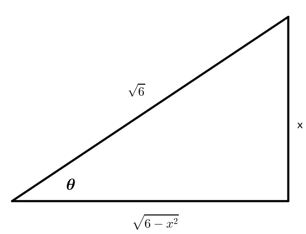
2. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}\,dx$ hacemos $u = x^2-8$

$du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-8}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right) = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-8)^3} + C$$

3. $\int \frac{dx}{6-x^2}$ con el cambio de variable

Hacemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\sqrt{6}$ y un cateto x



Buscamos una función trigonométrica que relacione el ángulo θ con los lados

$$sen\,\theta = \frac{x}{\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{6}\,sen\,\theta = x$$

$$x = \sqrt{6}\, sen\, \theta$$

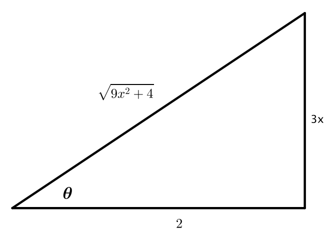
$$dx = \sqrt{6}\, cos\, \theta\, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{6 - x^2} = \int \frac{\sqrt{6} cos\theta\, d\theta}{6(1 - sen^2\theta)} = \frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{\cos\theta}{cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{1}{\cos\theta} d\theta = \frac{\sqrt{6}}{6} \int \sec\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{6}}{6} Ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} Ln\left|\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{6 - x^2}}\right| + C$$

4. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$



$$tan\, \theta = \frac{3x}{2}$$

despejando x tenemos:

$$x = \frac{2}{3} \tan\theta$$

$$x^2 = \frac{4}{9} tan^2\theta$$

$$dx = \frac{2}{3} sec^2\theta\, d\theta$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\int \frac{\frac{2}{3}sec^2\theta\ d\theta}{9\left(\frac{4}{9}tan^2\theta\right)+4}$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{sec^2\theta\ d\theta}{4(tan^2\theta+1)}$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{sec^2\theta\ d\theta}{sec^2\theta}$$

$$\frac{1}{6}\int d\theta$$

$$\frac{1}{6}(tan^{-1}x)+C$$

5. $\int \frac{x-3}{x^3+x-2}\ dx$ factorizando el denominador tenemos

$$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$$

$$\int \frac{x-3}{x^3+x-2}=\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}=\int \left(\frac{A}{X-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}\right)dx$$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{A}{(X-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$$

Para calcular los coeficientes A,B y C buscamos los ceros de la ecuación

$A(x^2+x+2)+\ (Bx+C)(x-1)=x-3$

Si $x=1$

$4A = -2$

$A = -\frac{1}{2}$

$x = 0$ entonces $2A - C = -3$

$2\left(-\frac{1}{2}\right) - C = -3$

$-1 - C = -3$

$C = 2$

Si $x = -1$ entonces 2A+2B-2C=-4

$2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2B - 2(2) = -4$

$2B = 1$

$B = \frac{1}{2}$

Sustituimos los valores en la integral

$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + x + 2} dx =$

$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{x+4}{x^2 + x + 2} dx =$

Si $u = x^2 + x + 2$

$du = (2x + 1)dx$

$-\frac{1}{2}Ln|x-1| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2(x+4)}{x^2 + x + 2} dx$

$$-\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{4}\int\frac{2x+8}{x^2+x+2}dx$$

$$-\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)+7}{x^2+x+2}dx$$

$$-\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)}{x^2+x+2}dx+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+2}$$

$$-\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{4}Ln|x^2+x+2|+\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+2}$$

Resolviendo la integral:

$\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+2}$ completando el trinomio a cuadrado perfecto

$$x^2+x+2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=x^2+x+2$$

$$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=x^2+x+2$$

$$\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+2}=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

Haciendo $u=x+\frac{1}{2}$

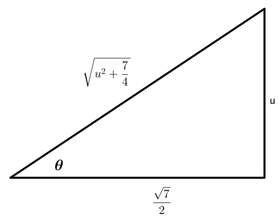
$$du=dx$$

$$\frac{7}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{(u)^2+\frac{7}{4}}=\frac{7}{4}\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}sec^2\theta\, d\theta}{\left(\frac{7}{4}tan^2\theta\right)+\frac{7}{4}}=\frac{7}{4}\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}sec^2\theta}{\frac{7}{4}(tan^2\theta+1)}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{2}\int\frac{sec^2\theta}{sec^2\theta}d\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}\int d\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}tan^2\theta$$

cambiando el valor de θ:

$$-\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{4}Ln|x^2+x+2|+\frac{\sqrt{7}}{4}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$



$$\tan\theta=\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}u$$

$$u=\frac{\sqrt{7}}{2}\tan\theta \quad du=\frac{\sqrt{7}}{2}sec^2\theta\, d\theta \quad \text{, así } \theta=tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

6. $\int xe^{5x}dx$

$$u=x \qquad dv=e^{5x}$$

$$du=dx \qquad v=\ e^{5x}$$

$$\int xe^{5x}dx=xe^{5x}-\int e^{5x}dx=xe^{5x}-e^{5x}+C=\ e^{5x}(x-1)+C$$

7. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

$$u=\ln x \qquad dv=x^{-2}dx$$

$$du=\frac{1}{x}dx \qquad v=\ -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \ln x \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

8. $\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2} dx$ factorizando el denominador $x^3 - 2x^2 + x - 2$

$$(x^3 - 2x^2) + (x - 2)$$

$$x^2(x-2) + (x-2)$$

Por lo tanto:

$$\frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\frac{5x^2+3x-1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\frac{5x^2+3x-1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$5x^2 + 3x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)$$

$$5x^2 + 3x - 1 = (Ax^2 + Bx^2) + (Cx - 2Bx) + (A - 2C)$$

$$5x^2 + 3x - 1 = (A+B)x^2 + (C-2B)x + (A-2C)$$

Si x=2

$$25 = 5A$$

$$A = 5$$

Igualando coeficientes formamos un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5 = A + B \\ 3 = C - 2B \\ -1 = A - 2C \end{cases} \qquad \text{donde} \begin{cases} A = 5 \\ B = 0 \\ C = 3 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores anteriores en:

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{5}{(x-2)} + \frac{3}{(x^2+1)}$$

regresando a la integral original tenemos:

$$\int \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x^2+1} dx$$

$$= 5 \int \frac{dx}{x-2} + 3 \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$5ln|x-2| + 3tan^{-1}x + C$$

$$ln|(x-2)^5| + 3tan^{-1}x + C$$

9. $\int xcos^2\theta \, dx$

Aplicando la igualdad trigonométrica $cos^2x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ y

$$\cos 2x = cos^2x - sen^2x = cos^2x -$$

$(1 - cos^2x)$

$$\cos 2x = 2cos^2x - 1$$

$$cos2x - 1 = 2cos^2x$$

$$cos^2x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int xcos^2\theta\, dx = \int x\left(\frac{1}{2}(\cos 2x + 1)\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\int (xcos\ 2x + x)dx$$

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx + \left(\frac{x^2}{4}\right) + C$$

Resolviendo la integral que falta:

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx$$

la resolvemos por partes haciendo $u = x \quad dv = \cos 2x\, dx$

$$du = dx \quad v = \int 2\cos 2x\, dx$$

$$v = \tfrac{1}{2}sen\ 2x$$

Así:

$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{1}{2}sen\ x\right) - \int \frac{1}{2}sen\ x\ dx\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\ sen\ x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int 2sen\ 2x\ dx\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\ sen\ 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]$$

$$\frac{x\ sen\ 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}$$

El resultado anterior lo sustituimos en

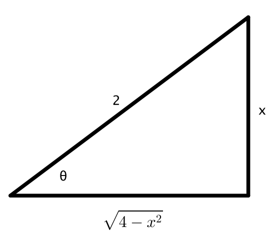
$$\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx + \left(\frac{x^2}{4}\right) + C$$

y obtenemos el resultado final:

$$\frac{x\ sen\ 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + \frac{x^2}{4} + C$$

10. $\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Haciendo la sustitución trigonométrica



Del triángulo anterior se obtiene:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

despejando tenemos:

$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

para obtener x usamos la función seno:

$$sen\ \theta = \frac{x}{2}$$

despejando x tenemos que:

$x = 2\ sen\ \theta$ cuando regresemos al cambio de variable es necesario saber el valor de θ así que despejando $\theta = sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

de donde

$$dx = 2\cos\theta\ d\theta$$

Además usaremos la identidad $cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

En la integral original, hacemos las sustituciones anteriores y tenemos:

$$\int \sqrt{4-x^2}\, dx = \int (2cos\theta)(2\cos\theta)\, d\theta$$

$$\int 4\ cos^2\theta\ d\theta$$

$$4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{4}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$2\int d\theta + 2\int \cos 2\theta$$

$$2\theta + 2\left(\frac{1}{2}\right)\int 2\cos 2\theta\; d\theta$$

$$2\theta + sen\; 2\theta + C$$

usando la identidad: $sen\; 2\theta = 2sen\theta cos\theta$

$$2\theta + 2sen\theta cos\theta + C$$

Por lo tanto de la integral original que se realizó el cambio de variable:

$\int 4\; cos^2\theta\; d\theta$=$2\theta + 2sen\theta cos\theta + C$ regresando al cambio de variable

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\right) + C$$

finalmente:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\right) + C$$

2.9. Soluciones de autoevaluación

1. $\int (20x-10)^5\,dx$

Haciendo cambio de variable

$$v = 20x - 10 \quad dv = 20dx \;\; así \;\; dx = \frac{dv}{20}$$

$$\int (20x-10)^5\,dx = \int v^5 \frac{dv}{20} = \frac{1}{20}\int v^5\,dv = \frac{1}{20}\,\frac{v^6}{6}$$

Regresando el cambio de variable

$$\int (20x-10)^5\,dx = \frac{(20x-10)^6}{120} + C$$

2. $\int \sqrt[3]{9x+3}\,dx$

Haciendo cambio de variable

$$v = 9x + 3 \quad dv = 9\,dx \quad así \quad dx = \frac{dv}{9}$$

$$\int \sqrt[3]{9x+3}\,dx = \int \sqrt[3]{v}\frac{dv}{9} = \frac{1}{9}\int \sqrt[3]{v}dv = \frac{1}{9}\int v^{\frac{1}{3}}\,dv$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{v^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) + C$$

Regresando el cambio de variable

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(9x+3)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) + C = \frac{1}{9}\,\frac{3}{4}\,(9x+3)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{12}\,(9x+3)^{\frac{4}{3}} + C$$

Finalmente se tiene que:

$$\int \sqrt[3]{9x+3}\,dx = \frac{1}{12}\,(9x+3)^{\frac{4}{3}} + C$$

3. $\int xe^{sen\,x^2} cos\, x^2\, dx$ haciendo cambio de variable

$$v = sen\, x^2 \qquad dv = 2x\cos x^2\ dx \qquad así \quad x\cos x^2\, dx = \frac{dv}{2}$$

$$\int xe^{sen\,x^2} \cos x^2\, dx = \int e^{sen\,x^2}\, x\cos x^2\, dx$$

$$= \int e^v\, \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int e^v\, dv = \frac{1}{2}\, e^v + C$$

Regresando el cambio de variable

$$= \frac{1}{2}\, e^{sen\,x^2} + C$$

Finalmente:

$$\int xe^{sen\,x^2} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\, e^{sen\,x^2} + C$$

4. $\int x^3 \cos x^4\, dx$

Haciendo cambio de variable

$$v = x^4 \qquad dv = 4x^3 dx \quad así \quad x^3 dx = \frac{dv}{4}$$

$$\int x^3 \cos x^4\, dx = \int \cos x^4\, (x^3\, dx) = \int \cos v\, \frac{dv}{4} = \frac{1}{4}\int \cos v\ dv$$

$$= \frac{1}{4}\, sen\, v + C$$

Regresando el cambio de variable

$$= \frac{1}{4}\, sen\, x^4 + C$$

Finalmente:

$$\int x^3 \cos x^4\, dx = \frac{1}{4}\, sen\, x^4 + C$$

5. $\int x^4 \ln x \, dx$

Haciendo integración por partes, sea:

$$u = \ln x \qquad y \qquad dv = x^4 dx$$

Entonces:

$$du = \frac{dx}{x} \qquad y \qquad v = \int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}$$

De acuerdo con la fórmula para integración por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^5}{5} \left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \int \frac{x^4}{5} dx$$

$$\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25} + C$$

6. $\int \sec^3 \mathrm{x} \, \mathrm{dx} = \int \sec x \, sec^2 x \, dx$

Haciendo integración por partes, sea:

$$u = \sec x \quad \text{y} \quad dv = sec^2 x \, dx$$

$$du = \sec x \tan x \, dx \quad \text{y} \quad v = \tan x$$

De acuerdo con la fórmula para integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\,tan^2 x\,dx$$

usando la identidad trigonométrica $tan^2 x = \ sec^2 x - 1$

$$\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x\,(sec^2 x - 1)\,dx$$

$$\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x - \int (sec^3 x - \sec x)\,dx$$

$$\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x - \left[\int sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx\right]$$

$$\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x - \int sec^3\,x\,dx + \int \sec x\,dx$$

sumamos a ambos lados $\int sec^3 x\,dx$

$$2\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx$$

$$2\int sec^3\,x\,dx = \sec x \tan x + ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int sec^3\,x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + ln|\sec x + \tan x|) + C$$

7. $\int x\,e^{ax}\,dx$

Aplicar integración por partes:

$$u = x \quad y \quad dv = e^{ax}dx$$

Entonces:

$$du = dx \quad y \quad v = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

De acuerdo con la fórmula para integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Se tiene que:

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) + c = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C$$

Finalmente:

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C$$

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$$

8. $\int \frac{14}{x^2+3x-10}\,dx$

Aplicando integración por fracciones parciales

Primeramente factorizar el denominador

$$\frac{14}{x^2+3x-10} = \frac{14}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+5B}{(x+5)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+5B}{(x+5)(x-2)}$$

Igualando ambos numeradores

$$14 = (A+B)x - 2A + 5B$$

Lo que genera el siguiente sistema de ecuaciones

$$A + B = 0$$

$$-2A + 5B = 14$$

$$cuya\ solución\ es\ A = -2 \quad y \quad B = 2$$

Ahora la integral puede ser expresada como sigue:

$$\int \frac{14}{x^2 + 3x - 10}\, dx = \int \frac{A}{x+5} dx + \int \frac{B}{x-2} dx = \int \frac{-2}{x+5} dx + \int \frac{2}{x-2} dx$$

$$= -2\int \frac{dx}{x+5} + 2\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -2\ln(x+5) + 2\ln(x-2) + C$$

$$= 2[\ln(x-2) - \ln(x+5)] + C$$

$$= 2\ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{14}{x^2 + 3x - 10}\, dx = 2\ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) + C$$

9. $\int \frac{\sqrt{144-x^2}}{x^2} dx$

Aplicar método de sustitución trigonométrica. Como el integrando contiene $\sqrt{144 - x^2}$

$$sea\ \ a^2 = 144 \quad \therefore \quad a = 12 \qquad y \qquad u^2 = x^2 \quad \therefore \quad u = x$$

$$aplicando \quad u = a\ sen\ z$$

$$x = 12\ sen\ z \quad \rightarrow \quad dx = 12\cos z\, dz \quad y \quad \sqrt{144 - x^2} = 4\cos z$$

$$\int \frac{\sqrt{144 - x^2}}{x^2} dx = \int \frac{4\cos z}{(12\ sen\ z)^2}\,(12\cos z\ \ dz) = \int \frac{4 \cdot 12 \cdot cos^2 z}{12^2 sen^2 z}$$

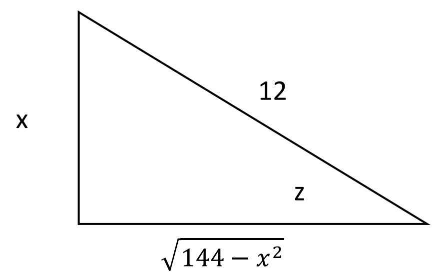
$$= \frac{4}{12}\int cot^2\, z\, dz$$

De acuerdo con la identidad trigonométrica:

$$cot^2\,\theta = csc^2\,\theta - 1$$

$$= \frac{1}{3}\int (csc^2 z - 1)dz = \frac{1}{3}\int csc^2 z\,dz - \frac{1}{3}\int dz$$

$$= -\frac{1}{3}\cot z - \frac{1}{3}\,z + C$$



De acuerdo con el triángulo, regresamos el cambio de variable

$$\cot z = \frac{\sqrt{144 - x^2}}{x}$$

$$como \qquad x = 12\,sen\,z \quad \rightarrow \quad z = arc\,sen\,\frac{x}{12}$$

Por tanto:

$$= -\frac{1}{3}\cot z - \frac{1}{3}\,z + c = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x} - \frac{1}{3}arc\,sen\,\frac{x}{12} + C$$

Finalmente:

$$\int \frac{\sqrt{144 - x^2}}{x^2}dx = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{144 - x^2}}{x} - \frac{1}{3}arc\,sen\,\frac{x}{12} + C$$

10. $\int \left(\frac{3x^6+7x^5-x^3+11}{x^2}\right) dx$

Desarrollar primero la división

$$\int \left(\frac{3x^6 + 7x^5 - x^3 + 11}{x^2}\right) dx = \int (3x^4 + 7x^3 - x + 11x^{-2})\, dx$$

Aplicando fórmulas de integración inmediata:

$$= 3\int x^4 dx + 7\int x^3 dx - \int x\, dx + 11\int x^{-2\, dx}$$

$$= 3\frac{x^5}{5} + 7\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 11\frac{x^{-1}}{-1}$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{x}$$

Finalmente:

$$\int \left(\frac{3x^6 + 7x^5 - x^3 + 11}{x^2}\right) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{x} + c$$

2.10. Conclusión

Este capítulo es de importancia fundamental, ya que permite tener una base firme en la resolución de una gran variedad de integrales, mediante el empleo de las técnicas básicas de integración vistas en este capítulo.

Sin embargo, existen tablas de integrales que amplían la variedad de funciones a integrar.

En el modelado de fenómenos se presentan integrales que requieren de métodos numéricos, lo que hace necesario el uso de la computadora y el manejo de software matemático, por ejemplo geogebra, maple, mathematica y cabrí entre otros.

Las integrales son herramientas que te ayudarán en otros cursos de nivel superior, tales como el cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, física, aplicaciones de ingeniería, etc.

Te invitamos a continuar profundizando y desarrollando habilidades en el proceso de la integración de funciones.

Referencias

[1]Granville Anthony (1992). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa S.A. de C.V.

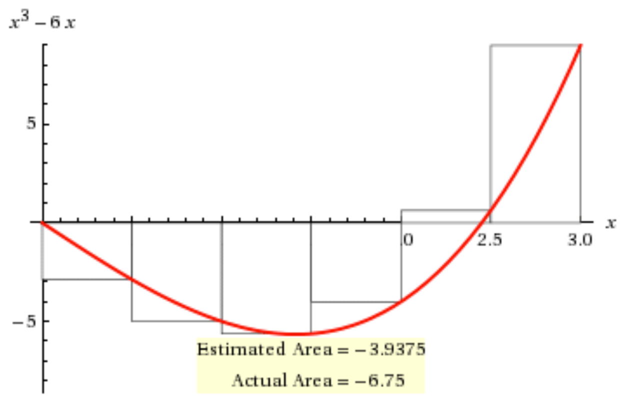
[2] Colegio Nacional de Matemáticas (2010) *Cálculo Diferencial e Integral.* México: PEARSON

[3] Smith, Robert & Minton Roland (2001).*Cálculo diferencial e integral.* México: Mc Graw Hill

[4] Colegio Nacional de Matemáticas (2009). *Geometría y trigonometría.* México: Pearson

Capítulo 3:

Ecuación diferencial



3. Cálculo de ecuación diferencial

Las ecuaciones diferenciales son las que tienen como incógnita una función, tienen su nacimiento con Leibniz y Newton, además, la propia tecnología las adoptó para resolver problemas de sistemas dinámicos[1]. Muchos modelos de la realidad están representados con ecuaciones diferenciales, de hecho hablar de ecuación diferencial es hablar de modelos físicos, económicos, entre muchos otros. Una ecuación diferencial es la que está formada por una o varias funciones como incógnitas, de una o varias variables; a las que relacionan los valores de una función y los puntos de sus derivadas, se les llaman ecuaciones diferenciales ordinarias. Podemos interpretar a este tipo de ecuaciones como un modelo que sigue la evolución temporal de las variables que definen los estados de un sistema. Y en particular las ecuaciones diferenciales están definidas por una función que contiene una variable dependiente y sus derivadas de la variable independiente, las hay **ordinarias y parciales**; se aplican en modelos en los que se refieren a tasa de cambio, es decir, está presente el concepto de la derivada como factor de cambio de razón (tasa). También es común referir a las ecuaciones diferenciales como sistemas dinámicos, es decir, **sistemas que evolucionan con el tiempo, involucrando conceptos como equilibrio, existencia, unicidad, comportamiento de largo plazo y sensibilidad de datos**[2]; aplicados a sistemas eléctricos, de fluidos, mecánicos, discretos, entre otros muchos. Ahora los ingenieros y científicos organizan la realidad geométrica de partículas y de información en objetos de estudio descritos por sistemas, es decir, totalidades organizadas por elementos que interactúan en esquemas estímulo-respuesta, donde pueden atender el principio de equilibrio que nos dice que la tasa de cambio neta es igual a la diferencia entre la tasa de entrada y la de la salida.

Una ecuación diferencial que posee soluciones particulares de una solución general, son obtenidas por parámetros denominados valores iniciales o de frontera.

Para el caso de una función con una sola variable independiente, todas las derivadas que aparecen son ordinarias, se llaman de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)[3]. Representan desde cambios de concentración de un depósito de agua, campo eléctrico, cambios de temperatura en procesos, procesos cinéticos, la acción de la gravedad, osciladores armónicos, entre muchos otros[4].

Ecuación diferencial ordinaria:

$$F(x,y,y',y'',y'''\ldots,y^{(n)})=0$$

o

$$F(t,y,\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dt^2},\ldots,\frac{d^ny}{dt^n})=0$$

o

$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$ Orden **n**, "*y*" es la variable independiente de ***x***.

Por ejemplo:

$\frac{dy}{dx}+6y=e^{3x}$ donde la función es respecto de ***y***, además, ***x*** es la variable independiente.

$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\cos y=0$ de la misma manera, donde la función es respecto de ***y***, además, ***x*** es la variable independiente.

Ejemplos de modelos:

$\frac{dx}{dt}=kx$	Proceso cinético de primer orden
$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$	Proceso cinético de segundo orden

$\frac{d^2h}{dt^2}=-g$	Caída libre
$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega x^2$	Oscilador armónico clásico
$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\psi=E\psi$	Ecuación de onda para el oscilador armónico

El ***orden***, entendido por el máximo orden de derivación presente en la ecuación, será *explícita* cuando las derivadas de mayor orden aparecen despejadas e implícita en caso contrario. Para el ejemplo anterior, ambas son implícitas; la primera es de primer orden y la segunda de segundo orden.

El **grado** de la ecuación diferencial es dado por la potencia de la derivada de mayor orden. Por ejemplo:

$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^6+yx^2=e^x$ es la EDO de orden cuatro y grado dos.

A la solución particular de una EDO se define $y=f(x)$, es una función continua en un intervalo **D** y se satisface cuando **"y"** y sus derivadas se sustituyen en la ecuación y la igualdad se cumple.

Por ejemplo averigüe si $y=c_1\cos x+c_2\,senx$ es solución de:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

Solución:

$$\frac{d^2(c_1\cos x+c_2\,senx)}{dx^2}+(c_1\cos x+c_2\,senx)=0$$

$$(-c_1\cos x-c_2\,senx)+(c_1\cos x+c_2\,senx)=0$$

Pruebe que $y=e^{-3x}$ es solución particular de $y''-2y'-15y=0$

Solución:

$$(9e^{-3x}) - 2(-3e^{-3x}) - 15(e^{-3x}) = 0$$

Dado que toda solución de una EDO es un gráfica particular, se le denomina curva solución.

El problema de Cauchy mejor conocido como **problema de valor inicial** (**PVI**), la función incógnita "y" (variable dependiente) debe satisfacer para una ecuación diferencial, la condición inicial, es decir para una solución particular de la EDO en un intervalo **D**. En otras palabras es una solución $y = f(x)$ que pasa por el punto (x_0, y_0).

Ejemplo: hallemos una solución particular de $y' + y = 0$ con condición inicial $y(3) = 2$, si se sabe que la solución general es $y = ce^{-x}$.

Solución:

Buscamos el valor de **c** que satisface $y(3) = 2$

$$y = ce^{-x} \Rightarrow y(3) = ce^{-3}$$

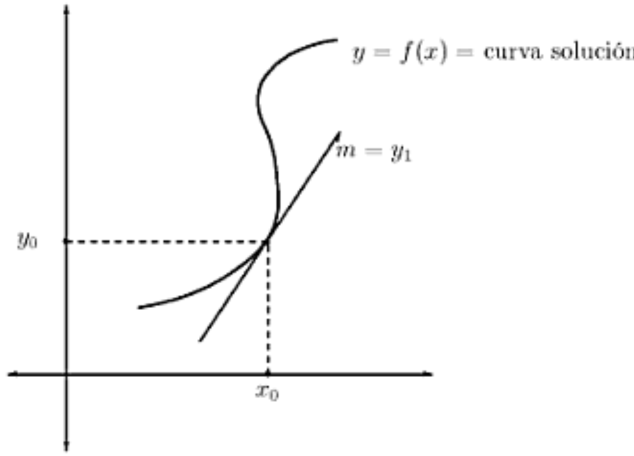
$$\therefore\ ce^{-3} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 2e^{3}$$

Sustituyendo el valor de **c** en la solución general

$$y = 2e^{3}(e^{-x}) = 2e^{3-x}$$

La solución al valor inicial es

$$y = 2e^{3-x}$$



Cuando la solución está sujeta a dos condiciones, el problema de valor inicial anterior que condiciona la solución a que pase por un punto (x_0, y_0) y además, a que la función "y", su curva solución tenga la pendiente y_1, es decir:

$$F(x, y, y', y'', y''' \ldots, y^{(n)}) = 0 \ \ sujeta \ \ a \ \ Y(x_o) = y_0; Y'(x_0) = y'_1$$

Ejemplo: calcule la solución para valores iniciales de segundo orden, $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0 \ \ y \ \ y'(0) = 1$ si se sabe que la solución general es $y(x) = c_1 sen(2x) + c_2 \cos(2x)$.

Solución:

Obsérvese que $y(0) = c_1 sen(0) + c_2 \cos(0) =$

$\therefore c_2 = 0$

$$y'(0) = 2c_1 \cos(0) - 2c_2 sen(0)$$
$$y'(0) = 2c_1$$

Para satisfacer $y'(0) = 1$

$$2c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo los valores de las constantes

$y(x) = \frac{1}{2} sen(2x)$ esta es la solución al problema del valor inicial propuesto.

En resumen, **condiciones iniciales** es cuando que se le imponen a la función "y" y a su derivada valores en el mismo punto. Cuando se trata de dos puntos diferentes se les llama **condiciones de límite o frontera**.

Ejemplo, calcule la solución de frontera

$$y''+4y=0$$
$$y(\frac{\pi}{8})=0$$
$$y(\frac{\pi}{6})=1$$

Solución:

Sabemos que $y(x)=c_1 sen(2x)+c_2\cos(2x)$ es solución de $y''+4y=0$ entonces:

Para $y(\frac{\pi}{8})=0$:

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{8}) &= c_1 sen(2\frac{\pi}{8})+c_2\cos(2\frac{\pi}{8})=0 \\ y(\frac{\pi}{8}) &= c_1(\frac{1}{2}\sqrt{2})+c_2(\frac{1}{2}\sqrt{2})=0 \end{aligned} \quad 1)$$

Para $y(\frac{\pi}{6})=1$:

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{6}) &= c_1 sen(2\frac{\pi}{6})+c_2\cos(2\frac{\pi}{6})=1 \\ y(\frac{\pi}{6}) &= c_1(\frac{1}{2}\sqrt{3})+c_2(\frac{1}{2})=1 \end{aligned} \quad 2)$$

Igualando 1) y 2):

$$c_1=-c_2=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Sustituyendo los valores de **c** en la solución **y(x):**

$$y(x)=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$ Solución valor de frontera.

Los **tipos de ecuaciones diferenciales** ordinarias de primer orden más comunes son:

1. $y' = f(y)$. Ecuación autónoma.
2. $y' = f(x)g(y)$. Ecuación separable .
3. $g(x)y' = f_1(x)y + f_0(x)$. Ecuación lineal.
4. $g(x)y' = f_1(x)y + f_n(x)y^n$. Ecuación de Bernoulli.
5. $y' = f(y/x)$. Ecuación homogénea.
6. $y' = ay^2 + bx^n$. Ecuación especial de Riccati.
7. $y' = y^2 + f(x)y - a^2 - af(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 1.
8. $y' = f(x)y^2 + ay - ab - b^2f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 2.
9. $y' = y^2 + xf(x)y + f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 3.
10. $y' = f(x)y^2 - ax^nf(x)y + anx^{n-1}$. Ecuación de Riccati especial caso 4.
11. $y' = f(x)y^2 + anx^{n-1} - a^2x^{2n}f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 5.
12. $y' = -(n + 1)x^ny^2 + x^{n+1} f(x)y - f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 6.
13. $xy' = f(x)y^2 + ny + ax^{2n}f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 7.
14. $xy' = x^{2n}f(x)y^2 + [ax^nf(x) - n]y + bf(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 8.
15. $y' = f(x)y^2 + g(x)y - a^2f(x) - ag(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 9.
16. $y' = f(x)y^2 + g(x)y + anx^{n-1} - a^2x^{2n}f(x) - ax^ng(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 10.
17. $y' = ae^{\lambda x}y^2 + ae^{\lambda x}f(x)y + \lambda f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 11.
18. $y' = f(x)y^2 - ae^{\lambda x}f(x)y + a\lambda e^{\lambda x}$. Ecuación de Riccati especial caso 12.
19. $y' = f(x)y^2 + a\lambda e^{\lambda x} - a2e^{2\lambda x}f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 13.
20. $y' = f(x)y^2 + \lambda y + ae^{2\lambda x}f(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 14.
21. $y' = y^2 - f^2(x) + f'(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 15.
22. $y' = f(x)y^2 - f(x)g(x)y + g'(x)$. Ecuación de Riccati especial caso 16.
23. $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$. Ecuación general de Riccati.
24. $yy' = y + f(x)$. Ecuación de Abel de segunda clase en forma canónica.

25. $yy' = f(x)y + g(x)$. Ecuación de Abel de segunda clase.
26. $yy' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$. Ecuación de Abel de segunda clase.
27. $y' = f(ax + by + c)$.
28. $y' = f(y + ax^n + b) - anx^{n-1}$.
29. $y' = (y/x)f(x^n y^m)$. Ecuación homogénea generalizada .
30. $y' = -(n/m)(y/x) + y^k f(x)g(x^n y^m)$.
31. $y' = f((ax + by + c)/(\alpha x + \beta y + \gamma))$.
32. $y' = x^{n-1}y^{1-m}f(ax^n + by^m)$.
33. $[x^n f(y) + xg(y)]y' = h(y)$.
34. $x[f(x^n y^m) + mx^k g(x^n y^m)]y' = y[h(x^n y^m) - nx^k g(x^n y^m)]$.
35. $x[sf(x^n y^m) - mg(x^k y^s)]y' = y[ng(x^k y^s) - kf(x^n y^m)]$.
36. $[f(y) + amx^n y^{m-1}]y' + g(x) + anx^{n-1}y^m = 0$.
37. $y' = e^{-\lambda x}f(e^{\lambda x}y)$.
38. $y' = e^{\lambda y}f(e^{\lambda y}x)$.
39. $y' = yf(e^{\alpha x}y^m)$.
40. $y' = x^{-1}f(x^n e^{\alpha y})$.
41. $y' = f(x)e^{\lambda y} + g(x)$.
42. $y' = -nx^{-1} + f(x)g(x^n e^y)$.
43. $y' = -(\alpha/m)y + y^k f(x)g(e^{\alpha x}y^m)$.
44. $y' = e^{\alpha x-\beta y}f(ae^{\alpha x} + be^{\beta y})$.
45. $[e^{\alpha x}f(y) + a\beta]y' + e^{\beta y}g(x) + a\alpha = 0$.
46. $x[f(x^n e^{\alpha y}) + \alpha yg(x^n e^{\alpha y})]y' = h(x^n e^{\alpha y}) - nyg(x^n e^{\alpha y})$.
47. $[f(e^{\alpha x}y^m) + mxg(e^{\alpha x}y^m)]y' = y[h(e^{\alpha x}y^m) - \alpha xg(e^{\alpha x}y^m)]$.

3.1 Ecuación diferencial autónoma

Los sistemas dinámicos están formados por dos variables de estado, por ejemplo, "**x**" y "**y**", podemos deducir las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t,x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y' = g(t,x,y)$$

Este sistema diferencial se llama **normal** si está en el plano $\boldsymbol{xy}$ como espacio de estados. Cuando $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{f}$ no dependen de $\boldsymbol{t}$, se les llama **sistema autónomo** y a sus ecuaciones autónomas. La soluciones por determinar $\boldsymbol{x(t)}$ y $\boldsymbol{y(t)}$ se encuentran en forma normal. En otras palabras una ecuación autónoma es si $\boldsymbol{x(t)}$ o $\boldsymbol{y(t)}$ son respectivamente una solución, entonces su derivada en el punto $\boldsymbol{t}$ depende solamente del valor de la función $\boldsymbol{x(t)}$ o $\boldsymbol{y(t)}$, y no de $\boldsymbol{t}$.

La solución para el caso: $y_x' = f(y)$ con respecto de $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$
$$dx = \frac{1}{f(y)}dy$$
$$\int dx = \int \frac{1}{f(y)}dy$$
$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$$

La solución para el caso: $y_t' = f(y)$ con respecto del tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$
$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$
$$dt = \frac{1}{f(y)}dy$$
$$\int dt = \int \frac{1}{f(y)}dy$$
$$t = \int \frac{dy}{f(y)} + C$$

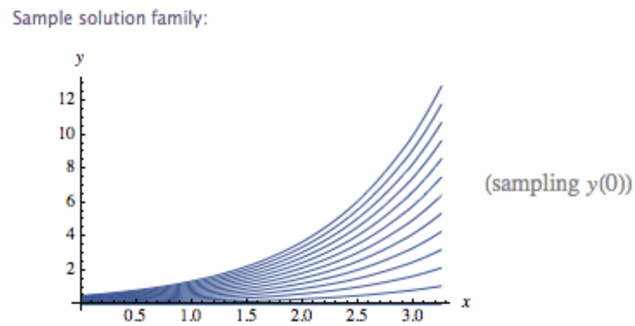
Donde **c** es constante arbitraria.

Ejemplo: calcular la solución de $y'(x) = 3y + 6$:

$$x = \int \frac{dy}{(3y+6)} + c$$
$$x = \frac{1}{3}\log(y+2) + c$$
$$3x = \log(y+2) + c$$
$$e^{3x} = e^{\log(y+2)+c} = e^{\log(y+2)}e^{c}$$
$$e^{3x} / e^{c} = y + 2$$
$$e^{3x+c} - 2 = y$$
$$y = ce^{3x} - 2$$

o por la forma:

$$y'(x)=3y+6$$
$$\frac{dy(x)}{dx}=3(y+2)$$
$$\frac{\frac{d(y(x))}{dx}}{(y+2)}=3$$
$$\int\frac{\frac{d(y(x))}{dx}}{(y+2)}dx=\int 3dx$$
$$\ln(y+2)=3x+c$$
$$y+2=e^{3x+c}$$
$$y(x)=e^{3x+c}-2$$
$$y=ce^{3x}-2$$



Existencia y unicidad. Concepto relacionado con la pregunta ¿podremos realizar el problema de valor inicial o no? Debemos saber si una ecuación diferencial tiene una solución (existencia) en un intervalo D que contiene a t_0, o si solo tiene esta solución (unicidad).

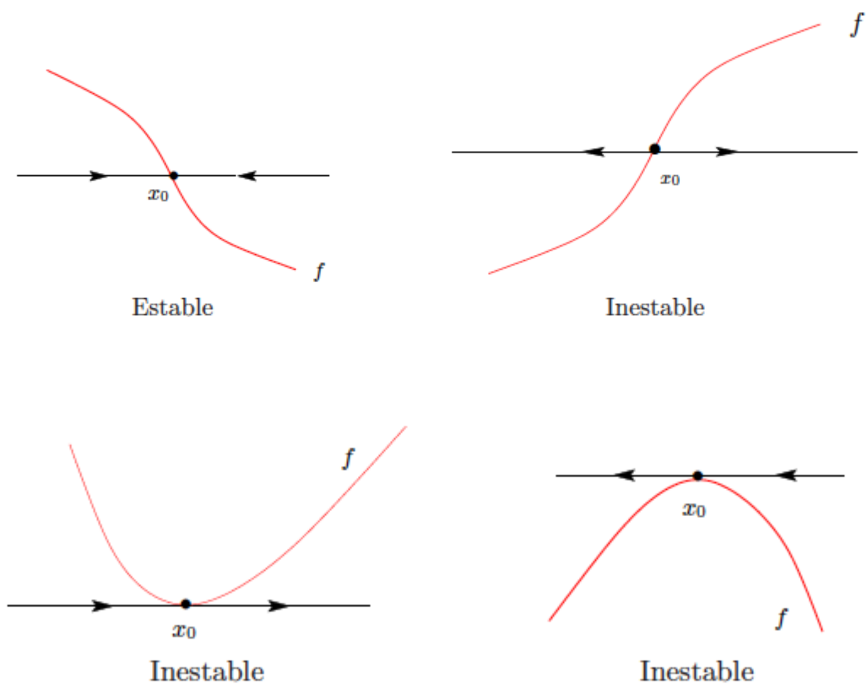
Teorema de existencia: Se tiene $\frac{dy}{dt}+f(t,y)=0$, ¿existe si hay una solución para el problema del valor inicial (t_0,y_0)? Si cumple que: $\frac{\delta f(t,y)}{\delta y}$ y $f(t,y)$ son continuas en una región **R** que contenga el punto (t_0,y_0) que es un punto de la región **R**, entonces si el **PVI** tiene una y(t) en un intervalo **D** que contiene en su interior t_0.

Extensión. Cuando requerimos contestar el rango de la longitud del intervalo de tiempo donde se dan la solución, requerimos del principio de extensión. Supóngase **f** es continua en una ventana cerrada y acatada por **D**. Si (t_0,y_0) está dentro de **D**, entonces la curva de solución del problema del valor inicial

$$y'=f(t,y),\qquad y(t_0)=y_0$$

puede extenderse hacia atrás y hacia a delante con respecto del tiempo hasta que toca el límite **D**.

Punto de equilibrio. Un punto de equilibrio x_0 es estable si existe alrededor de x_0 tal que toda solución para un instante ***t***, caiga dentro de ese entorno y permanezca allí en el futuro, teniendo a x_0 cuando ***t*** tiende a $+\infty$. De lo contrario el punto de equilibro es inestable.



Un punto de equilibrio x_0 es estable si f(x) es positiva en un semientorno izquierdo de x_0 y negativa en uno derecho. Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f'(x_0) < 0$.

Un punto de equilibrio x_0 es inestable si f(x) es negativa en un semientorno izquierdo de x_0 y positiva en uno derecho. Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f'(x_0) > 0$.

Comportamiento de largo plazo. Si hay una $f(y)$ y $\frac{df}{dy}$ que son contínuas para toda "**y**" y que $y(t)$ es una solución de la EDO autónoma $y' = f(y)$, que está acotada para $t \geq 0$ y respectivamente $t \leq 0$, esto significa cuando $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), $y(t)$ se aproxima aun solución de equilibrio de la EDO.

3.2. Soluciones a ecuaciones diferenciales elementales

Soluciones a ecuaciones diferenciales elementales, son las que se encuentran mediante la primitiva, misma que dio origen a la ecuación diferencial. Si existe, la primitiva es una familia de curvas cuya ecuación particular es la ecuación de una de ellas. También a la primitiva de una ecuación diferencial se le llama solución general. Al conjunto de puntos de la región **D**, se le llama campos de dirección.

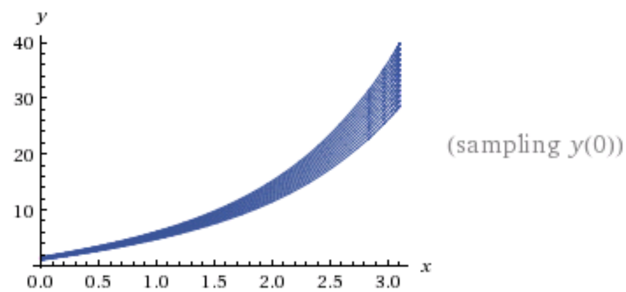
Ejercicio 1: Demostrar que $y = 2x + ce^x$ es la primitiva de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 2(1-x)$ y hallar la solución particular para punto (0,3) es decir la curva que pasa por este punto.

Solución:

Se sustituye la solución en la ecuación diferencial

Código usando WolframAlpha: ver http://m.wolframalpha.com/examples/

DSolve[{Derivative[1][y][x] == 2*(1 - x) + y[x]}, y[x], x]



Sustituyendo la solución $\frac{d(2x+ce^x)}{dx}-y=2(1-x)$ se obtiene $2x+ce^x-(2x+ce^x)=0$

Cuando x=0, y=3

La solución particular es $\begin{array}{l} 3=2\bullet 0+ce^0 \\ c=3 \end{array}$

Ejercicio 2: Encontrar la EDO que satisface la solución $y=A\cos ax-B\,senax$ donde A y B son contantes arbitrarias y a es una constante fija.

Solución:

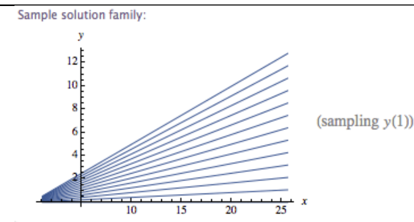
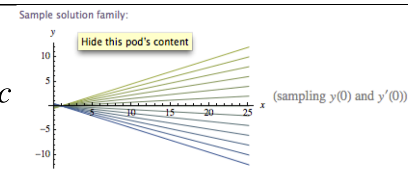
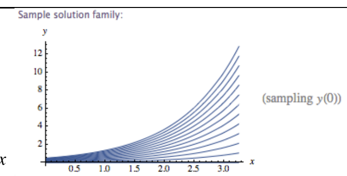
Derivando

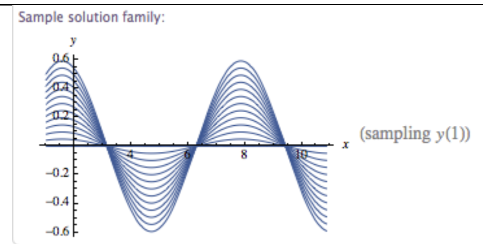
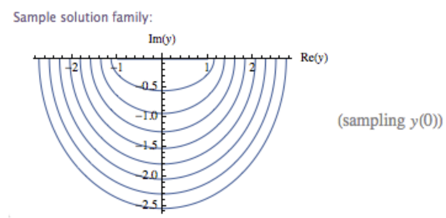
$$
\begin{aligned}
&y=A\cos ax-B\,senax \\
&\frac{dy}{dx}=a(A\cos(ax)-B\sin(ax)) \\
&\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2(A\,sen(ax)+B\cos(ax)) \\
&\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y
\end{aligned}
$$

La ecuación diferencial es

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=0$$

Ejercicio 3: Encontrar la EDO que satisface la solución, donde c y k son constantes arbitrarias.

a) $y = kx$	 $y = kx$ $\frac{dy}{dx} = k$ $y = \frac{dy}{dx}x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
b) $y = kx + c$	 $y = kx + c$ $\frac{dy}{dx} = k$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
c) $y = e^{x+k} = ce^{x}$	 $y = e^{x+k} = ce^{x}$ $\frac{dy}{dx} = e^{x+k} = ce^{x}$ $\frac{dy}{dx} = y$
d) $y = k\ sen(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d(k\ sen(x))}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = k\cos(x)$ $si \quad k = \frac{y}{sen(x)}$ *entonces* $\frac{dy}{dx} = y\frac{\cos x}{sen\ x} = y\ Cot(x)$ $\frac{dy}{dx} = y\ Cot(x)$

	
e) $y = sen(x+k)$	$y = sen(x+k)$ $sen^{-1}(y) = x+k$ $\frac{d(sen^{-1}(y))}{dx} = \frac{d(x+k)}{dx}$ $\frac{1}{\sqrt{-y^2+1}}\frac{dy}{dx} = 1$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{-y^2+1}$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -y^2+1$ 

Ejercicio 4: Encontrar la solución de EDO, donde c y k son constantes arbitrarias.

<table>
<tr>
<td>a) $xy' = 2y$</td>
<td>

$$xy' = 2y$$

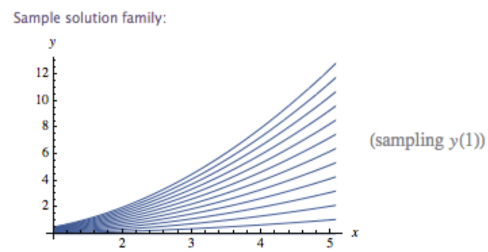
$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y}dx = \int \frac{2}{x}dx$$

$$Log(y) = 2Log(x) + c \qquad Log(x^n) = n\ Log(x)$$

$$y = c\,x^2 \quad Solución$$



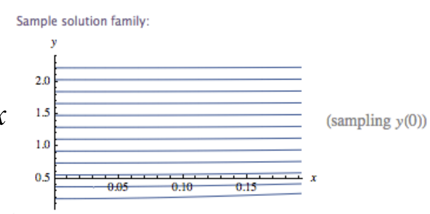
</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $y\frac{dy}{dx} + x = 0$</td>
<td>

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int y\frac{dy}{dx}dx = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

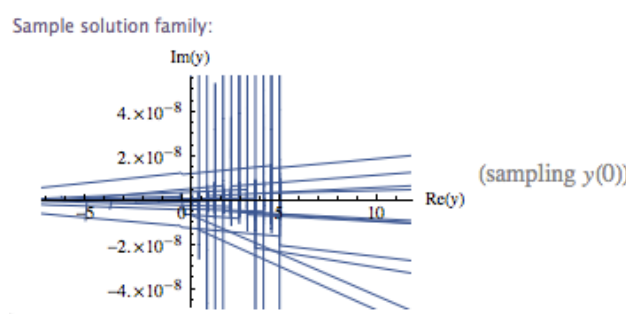


Soluciones

$$y = \mp\sqrt{x^2 + 2c}$$

$$y = \mp\sqrt{x^2 + c}$$

</td>
</tr>
</table>

c) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4$	$y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4$ $y = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + x\dfrac{dy}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx} = 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) + \dfrac{dy}{dx}$ Factor $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d^2y}{dx^2}(x + 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3)$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}(x + 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3) = 0$ Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ y $x + 4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ para $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ $\int \dfrac{d^2y}{dx^2}dx = \int 0\,dx = c$ Sustituyendo $\dfrac{dy}{dx} = c$ *en* $y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4$ $y = cx + c^4$ *Solución* 

3.3. Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales

La **interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales**, recordemos de nuestro curso de cálculo diferencial que la derivada y′ es el ángulo de la función tangente y(x) en el punto (x,y(x)) en el plano (x,y), de esta manera que la ecuación diferencial escalar $y' = f(x,y)$ se define:

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

La curva de solución es una curva explícita $y = \varphi(x)$, cuya pendiente $\varphi'(x)$ coincide con la pendiente prescrita por el campo en el punto $(x,\varphi(x))$. El campo de pendientes permite observar el efecto de las soluciones. Son isóclinas (pendientes constantes) que dibujan la forma de las soluciones. El campo de pendientes es posible graficarlo con apoyo del software Mathematica 9 o Winplot.

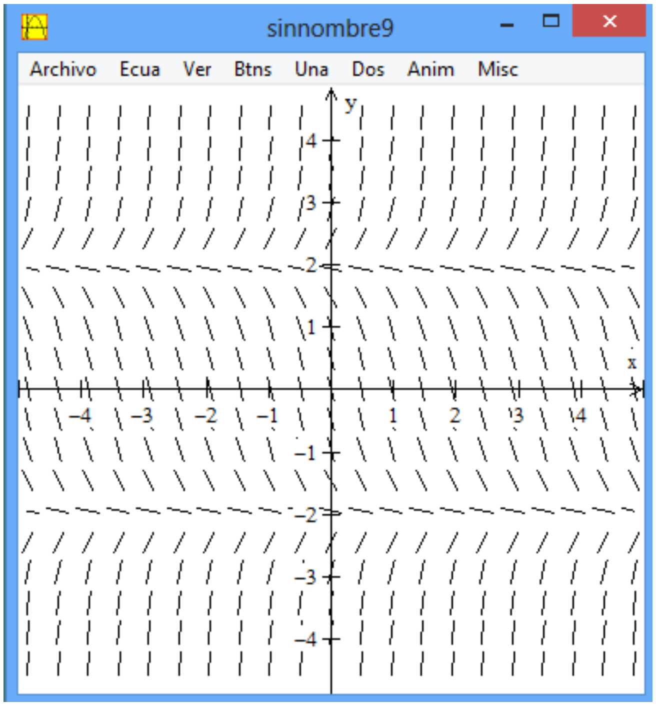
El término isóclina deriva del concepto griego "misma pendiente." Para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden las isóclinas son curvas que atraviesan segmentos de pendientes idénticas. Las Isóclinas pueden ser utilizadas como un método gráfico de la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

El término también se utiliza para referirse a los puntos en los mapas del mundo que tiene inclinaciones magnéticos idénticos dentro de un diagrama de flujo del campo vectorial.

Un diagrama de fase de un acceso al sistema dinámico de pesca abierto incluye dinámica biológica (isóclina azul) y las dinámicas económicas (isóclina roja). El primero representa el crecimiento biológico por una ecuación de crecimiento logístico, mientras que el crecimiento del esfuerzo de pesca es proporcional a la renta obtenida.

La terna (t,y,y′) determina la dirección de una recta que pasa por el punto (t,y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es representado geométricamente por un campo de dirección.

Por ejemplo el campo de dirección para $y' = x^2 - 4$ sugiere las curvas de solución.



3.4. Ecuaciones de variable separables

Partimos de una EDO de primer orden donde su solución pasa por la condición de que f es integrable, basta con integrar ambos miembros con respecto a x, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y así se obtiene la solución general

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx + c$$

Más general, toda ecuación de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ en la que y' pueda expresarse como producto de dos funciones, una que depende solo de la variable x, y otra solo de la variable y, esto es, de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Para resolver se multiplica ambos miembros por h(x) para obtener

$$h(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$$

Se observa que si $y=f(x)$ es una solución de esta última ecuación, entonces

$$h(f(x))f'(x)=g(x)$$

Por lo que al integrar se obtendrá

$$\int h(f(x))f'(x)dx=\int g(x)dx+c$$

Pero como $dy=f'(x)dx$, entonces se puede reescribir así

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+c$$

El razonamiento anterior no sugiere un método para resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$

Ejemplo: Resolver por método de separación de funciones $\frac{dy}{dx}=y^2-4$

Solución:

Escribimos la ecuación de la forma $\frac{1}{-4+y^2}dy=dx$, descomponemos una función racional en fracciones parciales

$$\frac{1}{-4+y^2}=$$

$$\frac{1}{(-2+y)(2+y)}=\frac{A}{-2+y}+\frac{B}{2+y}$$

$$1=(2+y)A+(´2+y)B$$

$$1=2A-2B+y(A+B)$$

Por lo tanto se forma el sistema de ecuaciones

$$1=2A-2B$$

$$0=A+B$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{-4+y^2} = \frac{1}{4(-2+y)} - \frac{1}{4(2+y)}$$

De esta manera queda

$$\int \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{4(-2+y)} - \frac{\frac{dy}{dx}}{4(2+y)}\right)dy = \int dx$$

Nota: si el logaritmo no especifica base nos referimos al Logaritmo natural “In”.

$$\frac{1}{4}\log(2-y) - \frac{1}{4}\log(y+2) = x+c$$

$$\log\left(\frac{2-y}{y+2}\right) = 4(x+c)$$

$$\log\left(\frac{-y+2}{y+2}\right) = 4(x+c)$$

$$\log\left(\frac{4-(y+2)}{y+2}\right) = 4(x+c)$$

$$\log\left(\frac{4}{y+2} - 1\right) = 4(x+c)$$

$$e^{\log(\frac{4}{y+2}-1)} = e^{4(x+c)}$$

$$\frac{4}{y+2} - 1 = e^{4(x+c)}$$

$$\frac{4}{y+2} = e^{4(x+c)} + 1$$

$$\frac{y+2}{4} = \frac{1}{e^{4(x+c)} + 1}$$

$$y + 2 = \frac{4}{e^{4(x+c)} + 1}$$

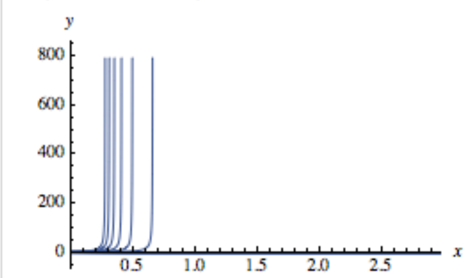
$$y = \frac{4}{e^{4(x+c)} + 1} - 2$$

$$y = \frac{-2e^{4(x+c)} + 2}{e^{4(x+c)} + 1}$$

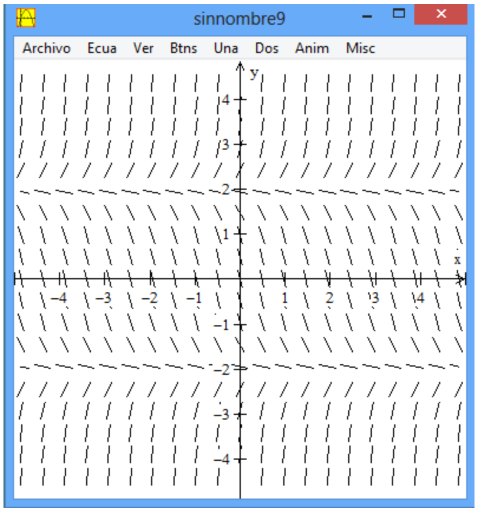
Campo de direccional formado por isóclinas para

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

Sample solution family:



(sampling $y(0)$)



Ejemplo: Resolver por variables separables $y' = \frac{x^2y^2}{\sqrt{3-x^2}}$

Solución por variables separables

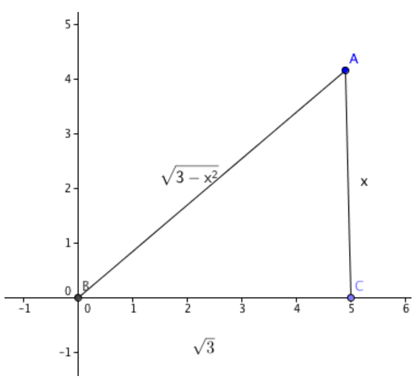
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y^2} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx$$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx$$

Para $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx$ sustituimos



$$x = \sqrt{3}\ sen(u)$$
$$dx = \sqrt{3}\cos(u)du$$

$$\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3-3sen^2(u)} = \sqrt{3(1-sen^2(u))} = \sqrt{3}\sqrt{\cos^2(u)} = \sqrt{3}\cos u$$

$$u = sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})$$

$$\int \frac{x^2\sqrt{3}\cos(u)du}{\sqrt{3}\cos(u)} = \int \frac{3sen^2(u)\sqrt{3}\cos(u)du}{\sqrt{3}\cos(u)} =$$

Entonces
$$\int 3\, sen^2(u)du =$$
$$3\int sen^2(u)du =$$

Usando la fórmula $sen^2(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)du$

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx$$
$$-\frac{1}{y} = 3\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u))du$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}\int du - \frac{3}{2}\int \cos(2u)du$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}\int du - \frac{3}{4}\int \cos(2u)2\,du$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}u - \frac{3}{4}\int \cos(2u)2\,du$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}u - \frac{3}{4}sen(u) + c$$

Sustituyendo $u = sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})$

$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) - \frac{3}{4}sen(2sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$$
$$-\frac{1}{y} = \frac{3}{2}sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2} + c$$
$$y = \frac{2}{-3sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}}) + x\sqrt{3+x^2}}$$

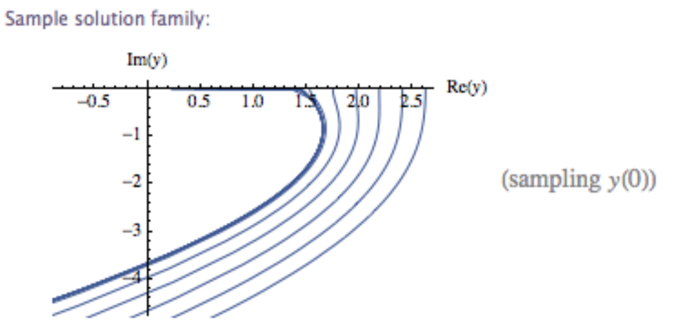
También podemos emplear la fórmula de integración

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

Se obtiene la misma solución

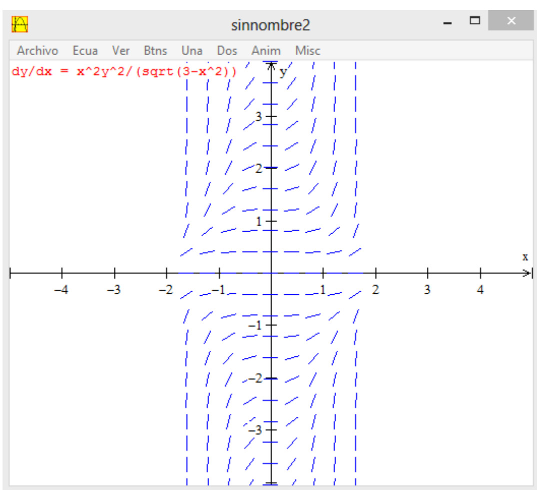
$$\frac{3}{2}sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})-\frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2}+c$$

Entonces la solución de $y'=\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{3-x^2}}$ es



$$y=\frac{2}{-3sen^{-1}(\frac{x}{\sqrt{3}})+x\sqrt{3+x^2}}$$

Gráfica de isóclinas con WinPlot



3.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

Es concreto y perceptible la extensión de los sentidos a través de las matemáticas, sus abstracciones han adquirido tal objetividad mediante la tecnología que las emplea, que ha logrado que sus objetos ideales parezcan tan reales como los materiales. Las ecuaciones diferenciales por ejemplo, hacen de la **biología de sistemas** la posibilidad de hacer observaciones menos ingenuas sobre su dinámica[5]. Las etapas del modelado comienzan con definir la utilidad del modelo, en términos de entrada (excitación) y salida (respuesta), generalmente se redibuja como bloques de variables sobre un **fenómeno causal**, llámese temperatura, metabolismo, voltaje, etc.

Debemos construir mediante una ecuación las relaciones matemáticas de las variables de entrada y salida. Normalmente la variable dependiente es la salida y la independiente la entrada. Es decir, las variables naturales como amortiguamiento, viscoso, el tiempo **t** son variables independientes. Por ejemplo, para el movimiento de una partícula, la posición, la velocidad y la aceleración en un instante **t**, son variables naturales.

Los modelos de leyes naturales por lo general incluyen constantes, que deben ser parte del modelo, podemos definirlo como un proceso natural en función de un sistema de estados (sistema dinámico); los estados son los valores que toma el sistema. Debemos además validar el modelo, al conocer el lenguaje en términos de conceptos que explican y describen lo que gobierna a un sistema, es la fenomenología del mismo, es confiar en la predictibilidad del comportamiento de un sistema, dentro de un intervalo de validez, de este proceso de modelado de ecuaciones diferenciales han surgido miles de aplicaciones científicas y tecnológicas.

Aplicaciones científicas y tecnológicas

El hecho de tener entidades que se relacionan o sistema físico, nos permite representarlo de manera numérica mediante un modelo. Un modelo tiene como una de las finalidades el pronosticar en el tiempo el comportamiento de estructuras complejas.

Uno de los sistemas importantes es el sistema mecánico, donde la fuerza, el desplazamiento y la velocidad son variables que forman parte de la segunda ley de Newton.

Segunda ley de Newton del movimiento:

Siempre que una fuerza no equilibrada actúe sobre un cuerpo, se produce una aceleración en la dirección de la fuerza que es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo, que se expresa mediante la ecuación:

$$\sum F = m\,a$$

donde a es la aceleración que depende del tiempo $a(t)$.

En el curso anterior de Análisis Derivativo de Funciones[6] se vio el significado físico de la derivada del vector posición el cual representa la velocidad, esto es $\frac{dx}{dt} = v$ donde x representa el vector posición que depende del tiempo $x(t)$, también se vio que la derivada de la velocidad respecto del tiempo es la aceleración $\frac{dv}{dt} = a$, o bien $\frac{d^2x(t)}{d^2t}$, aplicando lo anterior, este principio puede ser representado de la siguiente manera[7]:

$$\sum F = m\frac{d^2x(t)}{dt}$$

la cual expresa que la suma de todas las fuerzas $\sum F$ que actúan sobre una masa *m* es igual al producto de su masa *m* por la aceleración $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

La segunda ley de Newton permite analizar situaciones dinámicas como la que se muestra a continuación.

Resorte de amortiguamiento[8]

Considere la masa m de un bloque colocada sobre una superficie horizontal unida a una pared con un resorte, y sobre la cual se ejerce una fuerza exterior F(t).

El resorte ejerce una fuerza en sentido contrario al desplazamiento, que puede suponerse proporcional a la elongación con constante de proporcionalidad k.

La fuerza normal (N) es igual y de sentido opuesto al peso (w=mg), por lo que la fuerza final en la dirección vertical es cero.

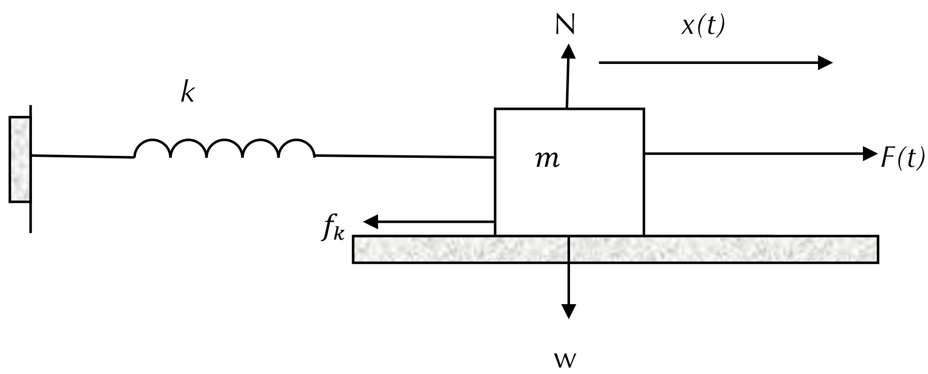
En el sentido horizontal y debido al rozamiento la fuerza de fricción, $f_k = \mu_k N$ donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, la masa m en contacto con la superficie genera dicha fuerza opuesta al desplazamiento, que puede suponerse proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad b.

Aplicando la ley de Newton antes descrita tenemos:

$$F(t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Dado que se conoce la fuerza aplicada *F(t)*, y las condiciones iniciales, es decir la posición y la velocidad, entonces puede determinarse la posición *x(t)* en cualquier instante. Las derivadas sucesivas nos permiten encontrar la velocidad y la aceleración.

Este sistema puede representarse con el siguiente diagrama



Resorte de amortiguamiento

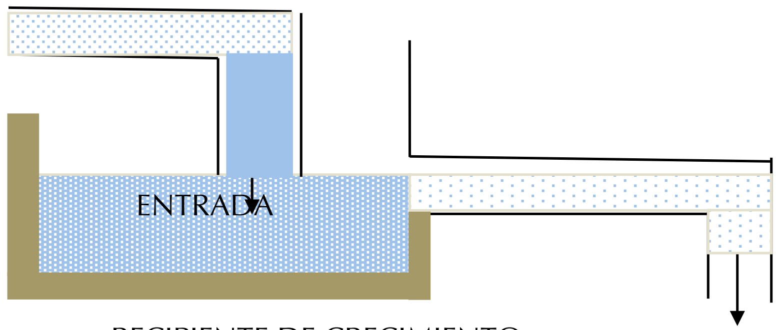
Una especie de microorganismos en competencia

Este modelo de competencia entre microorganismos de una especie cuyo crecimiento depende solamente de un solo nutriente; el cual es agregado a una velocidad constante a través del conducto de entrada del recipiente de crecimiento, o quimiostato, es un buen ejemplo donde se observa la transición de ecuaciones escalares diferenciales en un sistema que involucra un sistema de dos ecuaciones, que pueden ser reducidas a una[9]. Este modelo fue planteado por el Biólogo Monod en 1950.

El quimiostato es un equipo de cultivo continuo que consiste de un recipiente con una entrada y una salida, donde a los microorganismos se les agrega un medio de cultivo fresco a velocidad constante (v) .

Por la salida del recipiente el contenido del cultivo de microorganismos es vaciado a la misma velocidad (v) de manera que el volumen (V) permanece constante.[10]

Un diagrama esquemático se presenta en la figura siguiente:



Esquema del quimiostato

Para derivar el modelo de Monod, C_i denotará la concentración del nutriente de crecimiento limitado en el medio de cultivo de entrada, $C(t)$ denotará la concentración del nutriente en el tiempo t y $x(t)$ el organismo en el recipiente de crecimiento en el tiempo t. Si se establecen las condiciones del quimiostato sin organismos presentes, entonces $C(t)$ satisface la siguiente ecuación:

$$C' = D(C_i - C) \qquad (1)$$

donde $D=v/V$ (la velocidad de bombeado dividida por el volumen)

la velocidad per cápita a la cual el organismo es capaz de absorber el nutriente cuando la concentración del nutriente está al nivel C es representada por la función $p(C)$.

Modificando $C' = D(C_i - C)$, para tomar en cuenta la toma de nutrientes, nos da

$$C' = D(C_i - C) - p(C)x \qquad (2)$$

La velocidad de cambio de la concentración de organismos está dada por

$$x' = p(C)x - Dx \qquad (3)$$

A fin de reducir el modelo a una simple ecuación, las ecuaciones (2) y (3) se suman para obtener

$(C+x)' = D(C_i - C) - p(C)x + p(C)x - Dx = D(C_i - (C+x))$

la cual nos da

$C(t) = x(t) - C_i + (C_0 + x_0 - C_i)\, e^{-Dt}$ (4)

La velocidad exponencial de convergencia de $C(t) + x(t)$ para el límite C_i provee la justificación →para considerar solamente las condiciones iniciales (C_0, x_0) con $C_0 + x_0 = C_i$. Considerando el comportamiento asintótico de las soluciones de (2)-(3) cuando $t \to \infty$ y las condiciones iniciales de x_0 donde $0 \leq x_0 \leq C_i$, se obtiene el modelo reducido:

$x' = (p(C_i - x) - D)x$ (5)

En el Laboratorio se han encontrado resultados interesantes, tales como el caso de la función de toma de nutrientes, p(C), con un crecimiento monótono y un límite superior que toma la forma común $p(C)=v_mC(a+C)$; donde $v_m>0$ es la velocidad máxima de absorción y a>0 es la constante de saturación media.

3.6. Notación sigma

Notación sigma, surge como resultado práctico de expresar sumas. El símbolo griego en mayúsculas para letras **s**, $\sum$ denota suma[11]. Su estructura la componen el índice **i** que indica el comienzo de la suma en **m** y el límite **n** donde termina la suma, su ventaja radica en compactar, por ejemplo

$$\sum_{i=m}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \ldots + b_n$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

Donde **m** y **n** son enteros, $m \leq n$.

Reglas algebraicas para las sumas finitas, donde **k** es una constante.

$$\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} c = n \bullet c$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Una famosa demostración sobre el número más grande que se puede expresar, fue realizada por Karl Friedrich Gauss, la anécdota histórica dice que Gauss en su infancia aprendió a leer solo, que a los tres años le corrigió un error aritmético a su padre[12], en palabras del historiador Hayes:

> En 1784, tras su séptimo cumpleaños, el pequeño entró en una escuela pública de educación primaria donde las clases las impartía un profesor llamado Büttner. La escuela estaba ubicada en una habitación sombría, de techo bajo, suelo desigual, ... donde cerca de un centenar de pupilos de Büttner iban y venían. El profesor imponía una disciplina rígida y nadie podía llevarle la contraria. En esta escuela, que seguía el patrón de la Edad Media, Gauss llevaba dos años como alumno sin provocar ningún incidente reseñable.
>
> *El primer día que Gauss asistió a la clase de Aritmética, en la que había niños de hasta 15 años, ocurrió un incidente que Gauss solía contar ya anciano para el deleite de sus contertulios. Cuando el profesor proponía un*

problema, el alumno que acababa el primero tenía que llevar su pizarrita hasta la mesa del profesor. El segundo que lo lograra colocaba la suya encima, y así sucesivamente. El primer día que el joven Gauss entró en clase, el profesor Büttner, a viva voz, estaba dictando un problema de aritmética para sus alumnos. Justo al acabar de dictar el problema, Gauss colocó su pizarrita sobre la mesa del profesor, quien con absoluta seguridad afirmó: "Debe estar mal." Mientras, el resto de los alumnos continuaron con su tarea (contando, multiplicando, y sumando). Büttner recorría la clase observando a sus alumnos con una mirada irónica, casi compasiva, hacia sus alumnos. Solo un niño estaba sentado, callado, con su tarea ya finalizada, consciente de que la había resuelto correctamente y que su resultado era el único posible.

Al final de la clase, el profesor dio por acabado el examen y volvió las pizarras hacia arriba. La primera, la del joven Gauss, solo contenía un número. Cuando Büttner lo leyó, para su sorpresa y la de todos los presentes, resultó que la respuesta del joven Gauss era correcta. Muchos de sus compañeros, sin embargo, habían obtenido una respuesta errónea. Sartorius no nos dice qué problema de aritmética era, ni hace mención a la suma aritmética de los números 1 al 100.

Johann Carl Friedrich Gauss.[13]

Se especula que la serie de los 100 números*, el niño prodigio Gauss, se dio cuenta de que 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, etc., todos suman 101, y que hay 50 de estos pares, resultando 50 × 101 = 5050. La fórmula más general para la suma aritmética de 1 al n es n(n+1)/2*.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Se estructura las series ascendente y descendente de la suma:

$$\sum = 1+2+3+4+..+(n-1)+n$$

$$\sum = n+(n-1)+\ldots+4+3+2+1$$

se suman ambas expresiones:

$$2\sum = (n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)$$

$$\sum = \frac{n(n+1)}{2}$$

De esta manera se generan las reglas:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Para los siguientes ejemplos aplique las reglas dadas para resolver los problemas.

Ejemplo: calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right]$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+1\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3}{n^3}i^2+\frac{3}{n}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+\frac{3}{n}n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{2n}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n}\right)+3\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\bullet(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right)+3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\bullet 1\bullet 2+3=4$$

Ejemplo: Calcule el valor de las sumatorias

a) $\sum_{i=4}^{8}(3i-2)$	$\sum_{i=4}^{8}(3i-2)=(3(4)-2)+(3(5)-2)+(3(6)-2)+(3(7)-2)+(3(8)-2)=$ $\sum_{i=4}^{8}(3i-2)=10+13+16+19+22=80$
b) $\sum_{i=1}^{4}(5)^{i+1}$	$\sum_{i=1}^{4}(5)^{i+1}=5^2+5^3+5^4+5^5=3900$
c) $\sum_{i=1}^{17}(-1)^n=$ $\sum_{i=1}^{20}(-1)^n=$ $\sum_{i=1}^{21}(-1)^n=$ $\sum_{i=1}^{22}(-1)^n=$	$\sum_{i=1}^{17}(-1)^n=-1$ $\sum_{i=1}^{20}(-1)^n=0$ $\sum_{i=1}^{21}(-1)^n=-1$ $\sum_{i=1}^{22}(-1)^n=0$

3.7. Cálculo del límite de una sumatoria

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{i^2}{n^3}\right]=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{i^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{1}{n^3}\right]=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]=$ $\frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right]=$ $\frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+2n+2(n+1)}{2n}\right]=$ $\frac{1}{12}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+2n+2(n+1)}{n}\right]=$ Usando L'Hôspital y recuerde que el límite de una constante es la misma constante $\frac{1}{12}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{d[1+2n+2(n+1)]}{dn}}{\frac{dn}{dn}}\right]=\frac{1}{12}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{1}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]=\frac{1}{3}$
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^3}{n}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=$ $\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=$ Usando L'Hôspital

	$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}(n+1)^2}{\frac{d}{dn}n^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+n)}{2n}=$ $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=$ $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\lim_{n\to\infty}n}\right)=\frac{1}{4}$
c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}+1\right)^3=$	$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}+1\right)^3=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n+5n^2}{4n^2}=$ $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n+5n^2}{n^2}=$ Usando L'Hôspital $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}1+2n+5n^2}{\frac{d}{dn}n^2}=$ $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=$ $\frac{1}{4}\left(5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=$ $\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{\lim_{n\to\infty}n}\right)=\frac{5}{4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^{3}+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]=$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^{3}+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(1+n)(2+7n)}{n^{2}}=$ $2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)(2+7n)}{n^{2}}=$ $2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}(1+n)(2+7n)}{\frac{d}{dn}n^{2}}=$ $2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+7n+7(1+n)}{2n}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+7n+7(1+n)}{n}=$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}2+7n+7(1+n)}{\frac{d}{dn}n}=14$

3.8. Sumas e Integral de Riemann

Bernhard Riemann 1826-1866[14]

El padre de Bernhard Riemann, Friedrich Bernhard Riemann, fue un ministro luterano. Friedrich Riemann se casó con Charlotte Ebell cuando él estaba en su edad madura. Bernhard era el segundo de sus seis hijos, dos niños y cuatro niñas. Friedrich Riemann actuó como maestro de sus hijos, y fue profesor Bernhard hasta que tenía diez años.

En 1840 Bernhard entró directamente en la tercera clase en el Liceo de Hannover. Mientras que en el Liceo vivió con su abuela, pero, en 1842, su abuela murió y Bernhard se trasladó a la Johanneum Gymnasium en Lüneburg. Bernhard parece haber sido bueno, pero no excepcional, alumno que trabajó duro en los temas clásicos como el hebreo y teología. Mostró especial interés en las matemáticas y el director del Gimnasio dejó a estudiar a Bernhard un texto de matemática de su propia biblioteca, fue el libro de Bernhard Legendre en teoría de los números y Riemann lee el libro de 900 páginas en seis días.

En la primavera de 1846 Riemann se matriculó en la Universidad de Göttingen. Su padre le había animado a estudiar teología y por lo que entró en la facultad de teología. Sin embargo, él asistió a algunas clases de matemáticas y le preguntó a su padre si podía transferirlo a la facultad de filosofía para que pudiera estudiar matemáticas. Riemann fue siempre muy cercano a su familia, solicitud que fue concedida, sin embargo, y Riemann luego tomó cursos de matemáticas con Moritz Stern y Gauss.

Puede pensarse que Riemann estaba en el lugar adecuado para estudiar matemáticas en Göttingen, pero en este momento la Universidad de Göttingen era un lugar bastante pobre para las matemáticas. Gauss solo estaba dando cursos elementales y no hay evidencia de que en este momento se reconoció el genio de Riemann. Stern, sin embargo, sin duda se dio cuenta de que tenía un estudiante notable y más tarde describió a Riemann en este momento diciendo que[9]:

> "... ya cantaba como un canario. Modelado de circuitos eléctricos."

Dado un intervalo cerrado [a,b] donde existe $f(x)$, se parte en puntos $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, donde se indican las longitudes de los intervalos iguales entre los puntos denotados por $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$. Para los puntos arbitrarios x_i se da un índice con el número entero positivo k:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Se llama suma de Reimann para una función $f(x)$.

Si el límite de la suma de Reimann existe se le conoce como integral de Reimann para el intervalo [a,b]. Las áreas bajo la curva son la suma de rectángulos infinitesimal.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

La integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva exacta entre a y b. Esta se le llama integral definida.

Ejemplo: dada la $f(x)=x^3-6x$ calcule el área aproximada con 6 rectángulos y el área exacta entre a=0 y b=3.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k^3-6x_k)\Delta x=$$

Solución:

Área aproximada

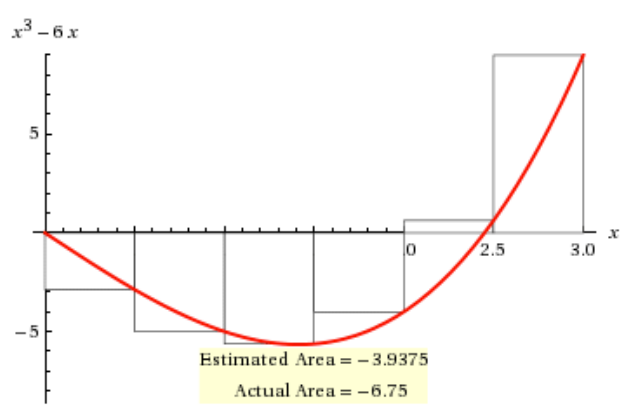
$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-(0)}{n}=\frac{3}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{6}f(x_k)\Delta x=f(.5)\Delta x+f(1.0)\Delta x+f(1.5)\Delta x+f(2)\Delta x+f(2.5)\Delta x+f(3)\Delta x$$

$$\sum_{k=1}^{6}f(x_k)\Delta x=\frac{1}{2}(-2.875-5-5.625-4+0.625+9)$$

$$\sum_{k=1}^{6}f(x_k)\Delta x=-3.9375$$

Área exacta



$$\Delta x_k = \frac{3k}{n}$$

Entonces:

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} [\left(\frac{3k}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3k}{n}\right)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} [\frac{27}{n^3}k^3 - \frac{18}{n}k] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4}\sum_{k=1}^{n}[k^3] - \frac{54}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[k]\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right)] - \frac{54}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)]\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)] - \frac{54}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)]\right] =$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -6.75$$

Observe que el área representada son la suma de los rectángulos por encima del eje x menos la suma de los rectángulos que están por debajo.

Ejemplo: dada la $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ calcule el área aproximada con 10 rectángulos y el área exacta entre a=0 y b=5.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k^4 - 3x_k^2 + 1)\Delta x =$$

Solución:

Área aproximada

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-(0)}{n} = \frac{5}{n} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

x	F(x)	$f(x_i)\Delta x$
0	1	0.5
1/2	5/16	0.15625
1	-1	-0.5
3/2	-11/16	-0.34375
2	5	2.5
5/2	341/16	10.65625
3	55	27.5
7/2	1829/16	57.15625
4	209	104.5
9/2	5605/16	175.15625
5	551	275.5
$\sum_{i=1}^{10} f(x_i)\Delta x$		652.7811

Solución área exacta:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{5k}{n})\Delta x =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{5k}{n})\left(\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} [\left(\frac{5k}{n}\right)^4 - 3(\frac{5k}{n})^2 + 1]\left(\frac{5}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{625k^4}{n^4} - \frac{75k^2}{n^2} + 1\right]\left(\frac{5}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{625k^4}{n^4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{75k^2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right] =$$

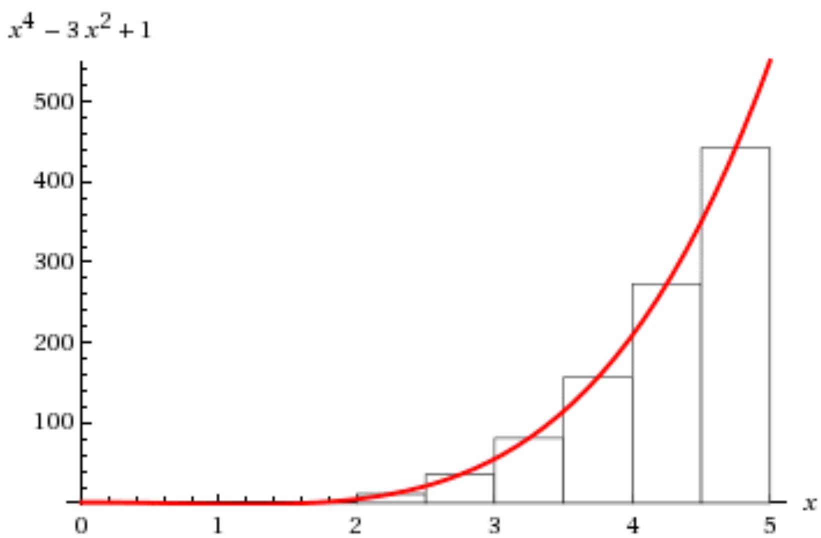
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{625k^4}{n^4}-\sum_{k=1}^{n}\frac{75k^2}{n^2}+\sum_{k=1}^{n}1\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\left[\frac{625}{n^4}\left(\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\right)-\frac{75}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+n\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{625}{6n^4}\left((n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\right)-\frac{375}{6n^2}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{}\right)+5\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{625}{6n^4}\left(6n^4+15n^3+10n^2-1\right)-\frac{375}{6n^2}\left(2n^2+3n+1\right)+5\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(625-\frac{625}{6n^4}+\frac{3125}{3n^2}+\frac{3125}{2n})+(-125-\frac{125}{2n^2}-\frac{375}{2n})+5\right]=625-125+5=505$$



$$\int_0^5 (x^4-3x^2+1)dx=505$$

3.9. Propiedades de la integral definida

Las propiedades de la integral definida proceden de la definición de límite de sumas de Reimann.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

3.10. Aplicación del teorema fundamental del cálculo

El teorema que vincula el cálculo diferencial e integral es conocido como **teorema fundamental del cálculo**. El problema de la tangente a la curva y el problema del área bajo la curva, Isaac Barrow (1630-1677) percibió por geometría dicha relación como un proceso reversible entre diferenciación e integración, esto sistematizó el cálculo mediante tablas de integración.

Isaac Barrow[15].

Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal: Dada una f(x) continua sobre un intervalo [a,b], definimos F(x) sobre [a,b] por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad a\le x\le b$$

Entonces F(x) es derivable y $F'(x)=f(x)$; donde f(x) es la función primitiva.

Ejemplos:

$$\int_0^x t^2\,dt \quad\Rightarrow\quad F'(x)=x^2$$

$$\int_0^{e^x} sen(t)dt \quad\Rightarrow\quad F'(x)=sen(e^{3x})e^{3x}\bullet 3$$

Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal: Dada una f(x) continua en un intervalo [a,b], y sea F(x) cualquier función primitiva de f(x), entonces:

$$\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad si \qquad F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

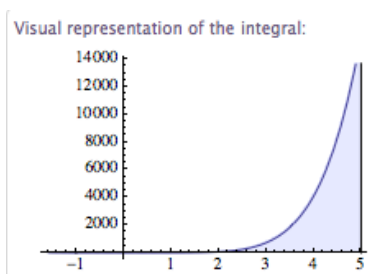
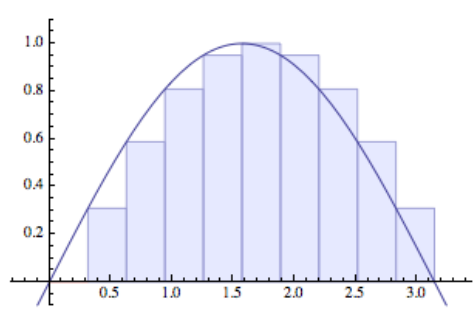
$$\int_a^b f(x) = F(b) + F(a)$$

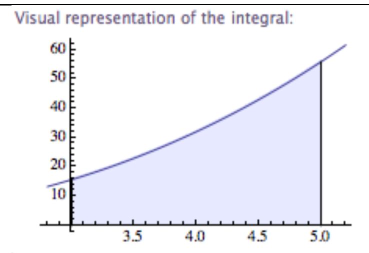
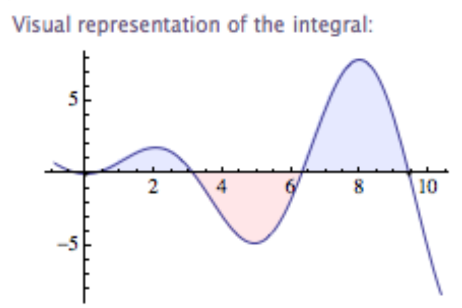
De la siguiente expresión podemos deducir que todas las fórmulas y métodos de integración hasta aquí estudiados se aplican, cambia el paso de la evaluación de la resta de los límites superior **b** e inferior **a**.

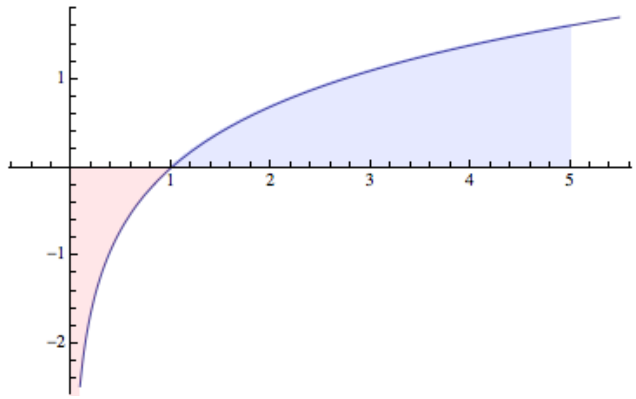
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

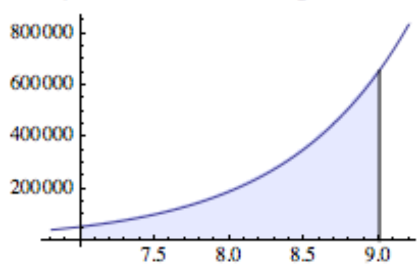
3.11. Cálculo de integrales definidas por métodos

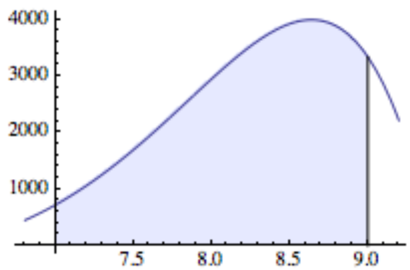
Evalúe las siguientes integrales definidas con los métodos de integración ya estudiados.

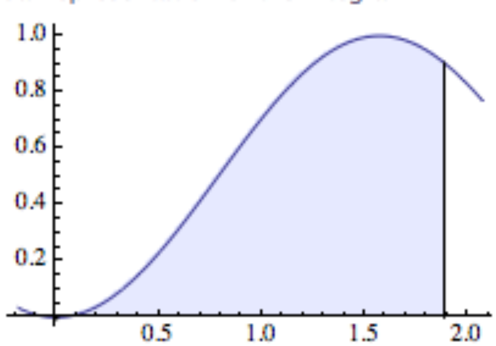
a) $\int_{-1}^{5} x^6\,dx$	$\int_{-1}^{5} x^6\,dx = \frac{x^7}{7}]_{-1}^{5} = \frac{78126}{7}$ 
b) $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$	$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)]_0^{\pi} = 2$ 
c) $\int_3^5 \sqrt{x^5+2}\,dx$	$\int_3^5 \sqrt{x^5+2}\,dx = \frac{5}{7}\sqrt{2}xF_1\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2};\frac{6}{5};-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{2}{7}\sqrt{x^2+2}]_3^5 \approx 66.5666$

	 Función hipergeométrica
d) $\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx$	$\int_3^3 \sqrt{x^5+2}\,dx =]_3^3 = 0$
e) $\int_0^\pi x\,sen(x)dx =$	$\int_0^\pi x\,sen(x)dx =$ método por partes $\int f\,dg = fg - \int g\,df$ f=x, dg=sen(x)dx df=dx, g=-cos(x): =-xcos(x)+ $\int \cos(x)dx$ $= -x\cos(x) + sen(x)]_0^{3\pi} = 3\pi$ 
f) $\int_0^5 \ln(x)dx =$	$\int_0^5 \ln(x)dx =$ método por partes $\int f\,dg = fg - \int g\,df$ f=ln(x), dg=dx df=$\frac{1}{x}$dx, g=x: =xln(x) - $\int 1dx$ = xln(x) -x$]_0^5 = 5\ln(5) - 1 \approx 3.04719$

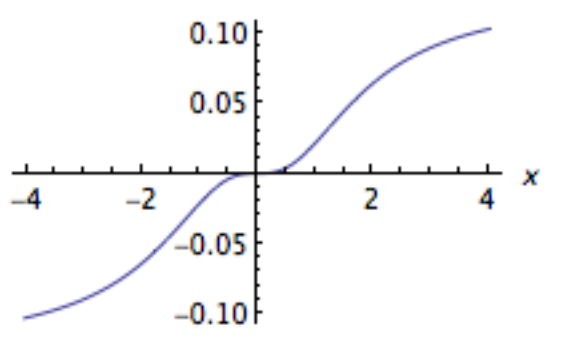
<table>
<tr><td></td><td>Visual representation of the integral:
</td></tr>
<tr><td>g) $\int_7^9 x^2 e^x\,dx =$</td><td>$\int_7^9 x^2 e^x\,dx =$
método por partes $\int f\,dg = fg - \int g\,df$
f=x^2, dg=e^xdx
df=2$x$dx, g=e^x:
=$e^x x^2$ - 2$\int e^x x\,dx$
método por partes otra vez $\int f\,dg = fg - \int g\,df$
f=x, dg=e^xdx
df=dx, g=e^x:
$\int_7^9 x^2 e^x\,dx = -2e^x x + e^x x^2 + 2\int e^x\,dx$
$\int_7^9 x^2 e^x\,dx = -2e^x x + e^x x^2 + 2e^x$
$\int_7^9 x^2 e^x\,dx = e^x(2-2x+x^2)]_7^9 = e^7(65e^2 - 37) \approx 486125$

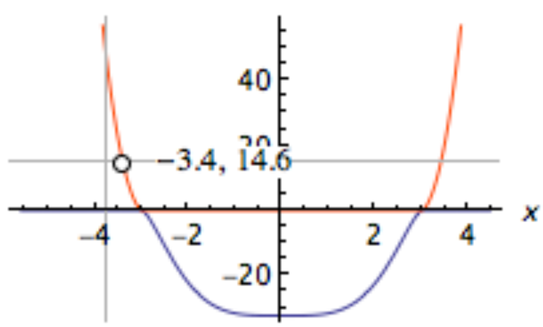
Visual representation of the integral:
</td></tr>
</table>

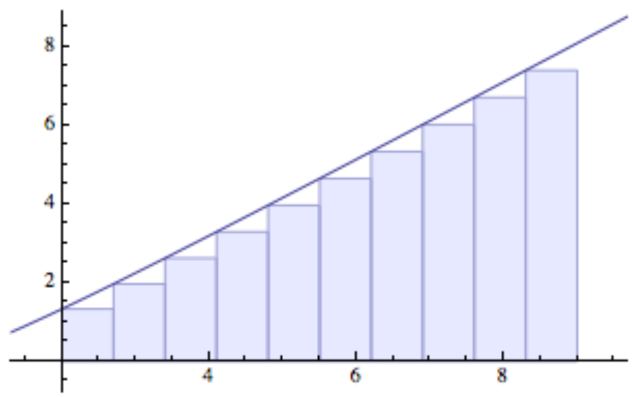
<table>
<tr>
<td>h) $\int_1^6 sen(x)\,e^x dx =$</td>
<td>
$\int_1^6 sen(x)\,e^x dx =$
usando la fórmula
$\int e^{\alpha x} sen(\beta x)dx = \frac{e^{\alpha x}(-\beta\cos(\beta x)+\alpha sen(\beta x))}{\alpha^2+\beta^2}$
$=\frac{1}{2}e^x(-\cos(x)+sen(x))]_7^9 =$
$=\frac{1}{2}e^7(-sen(7)+\cos(7)+e^2(sen(-\cos(9))) \approx 5414.34$
Visual representation of the integral:


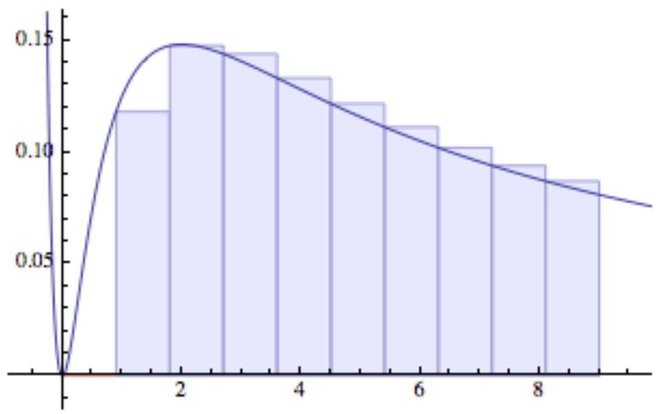
</td>
</tr>
<tr>
<td>i) $\int_0^{\frac{3\pi}{5}} sen^2(x)dx$</td>
<td>
$\int_0^{\frac{3\pi}{5}} sen^2(x)dx =$
$\int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]dx =$
$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{5}} 1\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{5}} \cos(2x)2\,dx =$
$\int_0^{\frac{3\pi}{5}} sen^2(x)dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}sen(2x)]_0^{\frac{3\pi}{5}} =$
$\int_0^{\frac{3\pi}{5}} sen^2(x)dx = \frac{1}{80}\left(5\sqrt{10-2\sqrt{5}}+24\pi\right) \approx 1.08942$
Visual representation of the integral:


</td>
</tr>
</table>

j) $\int_2^3 \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{3/2}}dx =$	$\int_2^3 \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{3/2}}dx =$ $u = x^2, \qquad du = 2xdx:$ $\frac{1}{2}\int \frac{u}{(9+4u)^{3/2}}du$ $s = 9+4u; \qquad ds = 4du:$ $= \frac{1}{8}\int \frac{-9+s}{4s^{3/2}}ds =$ $= \frac{1}{8}\int\left(-\frac{9}{4s^{3/2}} + \frac{1}{4\sqrt{s}}\right)ds =$ $= -\frac{9}{32}\int \frac{1}{s^{3/2}}ds + \frac{1}{32}\int \frac{1}{\sqrt{s}}ds =$ $= \frac{9}{16\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{16} + c$ $= \frac{9}{16\sqrt{9+4u}} + \frac{\sqrt{9+4u}}{16} + c$ $= \frac{9}{16\sqrt{9+4x^2}} + \frac{\sqrt{9+4x^2}}{16} + c = \frac{9+2x^2}{8\sqrt{9+4x^2}} + c$ $\int_2^3 \frac{x^3}{\left(4x^2+9\right)^{3/2}}dx == \frac{9+2x^2}{8\sqrt{9+4x^2}}]_2^3 = \frac{17}{40} - \frac{9}{8\sqrt{5}}$ 

k) $\int_0^3 x^3\sqrt{9-x^2}dx =$	$\int_0^3 x^3\sqrt{9-x^2}dx =$ $u = x^2; \qquad du = 2xdx$ $= \frac{1}{2}\int \sqrt{9-u^2}udu =$ $s = 9-u; \qquad ds = -du$ $= \frac{1}{2}\int (-9+s)\sqrt{s}ds =$ $= \frac{1}{2}\int (-9\sqrt{s}+s^{3/2})ds =$ $= -\frac{9}{2}\int \sqrt{s}\,ds + \frac{1}{2}\int s^{3/2}\,ds =$ $= -3s^{3/2} + \frac{s^{5/2}}{5} + c =$ $s = 9+u:$ $= -3(9+u)^{3/2} + \frac{1}{5}(9-u)^{5/2} + c =$ $u = x^2:$ $= -3(9-x^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(9-x^2)^{5/2} + c =$ $= -\frac{1}{5}(9-x^2)^{3/2}(6+x^2)]_0^3 = 0 - \frac{-162}{5} = \frac{162}{5}$ 

l) $\int_2^9 \frac{x^2}{x+1}dx =$	$\int_2^9 \frac{x^2}{x+1}dx =$ $= \int\left(-1+x+\frac{1}{1+x}\right)dx =$ $= -\int dx + \int x\,dx + \int \frac{1}{1+x}dx =$ $= -x + \frac{x^2}{2} + \log(1+x) + c$ $\int_2^9 \frac{x^2}{x+1}dx = -2(1+x) + \frac{1}{2}(1+x)^2 + \log(1+x)]_2^9 =$ $\int_2^9 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{63}{2} + \log(\frac{10}{3}) \approx 32.704$  integral: $\frac{63}{2} + \log\left(\frac{10}{3}\right) \approx 32.704$ Riemann sum: 30.3397 error: 2.36423
m) $\int_0^9 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx =$	$\int_0^9 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx =$ $\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{(1+x)^3} =$ $x^2 = (1+x)^2 A + (1+x)B + C$ $x^2 = A + x^2 A + B + x(2A+B) + C$ $0 = A+B+C$ $0 = 2A+B$ $1 = A$

	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A=1$ $B=-2$ $C=1$ $\int_0^9 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^9 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} \right) dx =$ $= \int_0^9 \frac{1}{(x+1)}dx - 2\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int_0^9 \frac{1}{(x+1)^3}dx =$ $= \log(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}]_0^9 =$ $\int_0^9 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \log(10) - \frac{261}{200} \approx 0.997585$  integral: $\log(10) - \frac{261}{200} \approx 0.997585$ Riemann sum: 0.952936 error: 0.0446495

Caja de texto: Fórmulas de integración

INTEGRAL INDEFINIDA Donde c es una constante arbitraria
Método de sustitución $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$
Integración por partes
$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$
Integrales de funciones racionales e irracionales
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int \frac{1}{x} dx = In\lvert x\rvert + c$ $\int c\,dx = cx + c$ $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$ $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$ $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arcsenx + c$
Integrales de funciones trigonométricas
$\int sen\ x\ dx = -\cos x + c$ $\int \cos x\,dx = senx + c$ $\int \tan x\,dx = In\lvert\sec x\rvert + c$ $\int \sec x\,dx = In\lvert\tan x + \sec x\rvert + c$ $\int sen^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - sen\ x \cos x) + c$ $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + sen\ x \cos x) + c$ $\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ $\int senhx\,dx = \cosh x + c$ $\int \cosh dx = \sinh x + c$

Integrales de exponenciales y logaritmos
$\int In\, x\, dx = x\ln x - x + c$ $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$ $\int e^x\, dx = e^x + c$ $\int b^x\, dx = \frac{b^x}{\ln b} + c$
Integrales de funciones irracionales
$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad (para \;\; n \neq -1)$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + c$ $\int x(ax+b)^n\, dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + c \quad (para \;\; n \neq 1,\; n \neq -2)$ $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} In\|ax+b\| + c$ $\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} In\|ax+b\| + c$ $\int \frac{x}{(ax+b)^n} dx = \frac{a(1-n)a-b}{a^2(n-1)(n-2)(ax+b)^{n-1}} + c \qquad (para \;\; n \neq 1,\; n \neq -2)$ $\int \frac{x^2}{(ax+b)^n} dx = \frac{1}{a^3}(-\frac{(ax+b)^{3-n}}{n-3} + \frac{2b(a+b)^{2-n}}{n-2} - \frac{b^2(ax+b)^{1-n}}{n-1} + c \quad (para \;\; n \neq 1,2,3)$ $\int \frac{1}{a(ax+b)} dx = -\frac{1}{b} In\left\|\frac{ax+b}{x}\right\| + c$ $\int \frac{1}{a^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} In\left\|\frac{ax+b}{x}\right\| + c$ $\int \frac{1}{a^2(ax+b)^2} dx = -a(\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{a}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} In\left\|\frac{ax+b}{x}\right\| + c$ $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$

Integrales de funciones exponenciales
$\int xe^{cx}\,dx=\frac{e^{cx}}{c^2}(cx-1)+k$
$\int x^2e^{cx}\,dx=e^{cx}(\frac{x^2}{c}-\frac{2x}{c^2}+\frac{2}{c^3})+k$
$\int x^ne^{cx}\,dx=\frac{1}{c}x^ne^{cx}-\frac{n}{c}\int x^{n-1}e^{cx}\,dx+k$
$\int \frac{e^{cx}}{x}dx=In\|x\|+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(cx)^i}{i\bullet i!}+k$
$\int e^{cx}Inx\,dx=\frac{1}{c}e^{cx}In\|x\|+E_i(cx)+k$
$\int e^{cx}sen(bx)dx=\frac{e^{cx}}{c^2+b^2}(c\,sen(bx)-b\cos(bx)+k$
$\int e^{cx}\cos(bx)dx=\frac{e^{cx}}{c^2+b^2}(c\cos(bx)-b\,sen(bx)+k$
$\int e^{cx}sen^n(x)\,dx=\frac{e^{cx}sen^{n-1}(x)}{c^2+n^2}(c\,sen(bx)-n\cos(bx)+\frac{n(n-1)}{c^2+n^2}\int e^{cx}sen^{n-2}(x)\,dx$
Integral de funciones logarítmicas
$\int In(cx)dx=x\,In(cx)-x+k$
$\int In(ax+b)dx=x\,In(ax+b)-x+\frac{b}{a}In(ax+b)+k$
$\int (In(x))^2\,dx=x\,(In(x)^2-2x\,In(x)+2x+k$
$\int (In(cx)^2\,dx=x\,In(cx)^n-n\int (In(cx))^{n-1}\,dx+k$
$\int \frac{dx}{In(x)^n}=\frac{x}{(n-1)\,(In(x))^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{In(x)^{n-1}}+k \quad (para\;\; n\neq 1)$
$\int x^mIn(x)dx=x^{m+1}(\frac{In(x)}{m+1}-\frac{1}{(m+1)^2})+k \quad (para\;\; n\neq 1)$
$\int x^mIn(x)^n\,dx=\frac{x^{m+1}In(x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^mIn(x)^{n-1}\,dx+k \quad (para\;\; n\neq 1)$
$\int \frac{(In(x))^n}{x}dx=\frac{(In(x))^{n+1}}{n+1}+k \quad (para\;\; n\neq 1)$

$$\int \frac{In(x^n)}{x}dx = \frac{(In(x^n))^2}{2n} + k \qquad (para \;\; n \neq 0)$$

$$\int \frac{In(x)}{x^m}dx = \frac{In(x)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + k \qquad (para \;\; m \neq 1)$$

$$\int \frac{(In(x))^n}{x^m}dx = -\frac{(In(x))^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1}\int \frac{(In(x))^{n-1}}{x^m} + k \quad (para \;\; m \neq 1)$$

$$\int \frac{(In(x))^n}{x}dx = \frac{(In(x))^{n+1}}{n+1} + k \qquad (para \;\; n \neq 1)$$

$$\int \frac{In(x)^n}{x}dx = \frac{(In(x)^n)^2}{2n} + k \qquad (para \;\; n \neq 0)$$

$$\int \frac{In(x)}{x^m}dx = \frac{In(x)^n}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + k \qquad (para \;\; n \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{xInx} = In\left|In(x)\right| + k$$

$$\int \frac{dx}{x(In(x))^n} = -\frac{1}{(n-1)(In(x))^{n-1}} + k \qquad (para \;\; n \neq 1)$$

$$\int In(x^2 + a^2)dx = x\; In(x^2 + a^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + k$$

$$\int sen(In(x))dx = \frac{x}{2}(sen(In(x)) - \cos(In(x)) + k$$

$$\int \cos(In(x))dx = \frac{x}{2}(sen(In(x)) + \cos(In(x)) + k$$

Propiedades de los logaritmos

1) $\log_c (a \times b) = \log_c a + \log_c b$

2) $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

3) $\log_c a^n = n \log_c a$

4) $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

5) $\log_c c = 1$

6) $\log_c c^n = n$

7) $\log_{c^m} c^n = \frac{n}{m}$

8) $\log_{c^m} c = \frac{1}{m}$

9) $\log_{c^{\frac{1}{n}}} c = n$

10) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$

11) $\log_c 1 = 0$

12) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

13) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

14) $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = -\log_c \left(\frac{b}{a}\right)$

15) $a^{\log_a b} = b$

El logaritmo natural se representa por ln:

$\ln a = \log_e a \quad donde \quad e = 2,718281828$

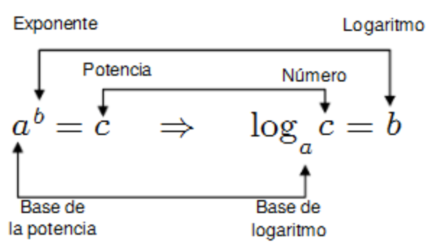
Cuando la base es 10 no se la anota:

$\log_{10} a = \log a$

No existe logaritmo de número negativo:

$\log_c (negativo) \rightarrow no \ existe$

Definición de Logaritmo



$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$
$$\exp(x - y) = \exp(x)/\exp(y)$$
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$
$$\exp(0) = 1$$

exp(log (x))=x

3.12. Problemario

1. Determinar el orden de la ecuación diferencial

a) $\frac{dr}{dt} = kr^2$

b) $5\frac{d^2p}{dt^2} + 10\frac{dp}{dt} + 50p = 140sen\ 50p$

c) $\frac{d^2y}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = x^6 - x$

d) $784\ \frac{d^5y}{dx^5} = x$

2. Comprueba que la función $f(x) = e^{-5x} + 3$ es solución de $y' + 5y = 15$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

3. Resuelve la ecuación diferencial

$$x' = e^t - \frac{2t}{t^2 - 1}$$

4. Muestra que $y = \frac{C}{x}, x > 0$ con $C = constante$ es solución general de

$$y'x = -y$$

5. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

6. Resolver la ecuación diferencial $y' + \frac{1}{x}y = 0$ con la condición inicial:

$$y(1) = 2$$

7. Calcular el valor de la sumatoria:

$$\sum_{i=5}^{8} (5i - 1)$$

8. Calcula el área aproximada y de forma exacta entre 0 y 7, de $f(x) = x^2$, utiliza 7 rectángulos.

9. Evalúa la integral

$$\int_0^7 x^2 dx$$

10. Evalúa las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{1} x\, dx$

b) $\int_0^{\pi} \cos x \;\, dx$

c) $\int_5^5 2x\sqrt{x^2+1}\;\, dx$

3.13. Autoevaluación

1. Comprobar que $y = e^{2x}$ es solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6x = 0$$

2. Verifica que $h(x) = \frac{1}{x} + x$ es solución de la ecuación diferencial:

$$y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} = 0$$

3. Comprueba que $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ es solución de $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

4. Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5}{y-1}$$

5. Calcula el valor de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{3} (3)^i$$

6. Halla la solución general de $\frac{dy}{dx} = 10x$ así como su solución particular cuando $y(3) = 1$

7. Calcula el valor de la integral definida $\int_{-3}^{5} 6\, dx$

8. Evalúa la integral $\int_0^5 x^2$

9. Calcula $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

10. Evalúa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\, x\ \ dx$

3.14. Soluciones del problemario

1.

a) Primer orden

b) Segundo orden

c) Segundo orden

d) Quinto orden

2. $y = e^{-5x} + 3$

3. Integrando

$$\int x' = \int e^t\, dt - \int \frac{2t}{t^2-1} dt$$

$$x(t) = e^t - ln|t^2 - 1| + C$$

$y' = -5e^{-5x}$ estas son contínuas y derivables $\therefore$ están definidas en $\mathbb{R}$

Sustituimos en $y' + 5y = 15$

$$(-5e^{-5x}) + 5(e^{-5x} + 3) = 15$$

$$-5e^{-5x} + 5e^{-5x} + 15 = 15$$

$$15 \equiv 15$$

$\therefore f(x)$ es solución de la ecuación diferencial

4. despejando y' de: $y'x = -y$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$y = \frac{C}{x}$

$y' = -\frac{C}{x^2}$ sustituyendo

$$-\frac{C}{x^2} = \frac{-\frac{C}{x}}{\frac{x}{1}}$$

$-\frac{C}{x^2} \equiv -\frac{C}{x^2} \therefore$ es solución.

5. Ya está despejada y′

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+3)\left(\frac{1}{x-4}\right)$$

observe que la primera función depende de y , y la segunda de x $\therefore$ es una ecuación diferencial separable a que tiene la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

agrupamos $\left(\frac{1}{y+3}\right) dy = \frac{dx}{x-4}$

integramos $ln|y+3| = ln|x-4| + C$

aplicando la función **e** a ambos miembros, recordemos que **e** se elimina con ln

$$e^{ln|y+3|} = e^{ln|x-4|+C}$$

$$y+3 = e^{ln|x-4|}e^{C}$$

$$y+3 = C|x-4|$$

$$y = C|x-4| - 3$$

Solución de la ecuación diferencial en forma explícita.

6. $y' + \frac{1}{x}y = 0$ despejando y'

$y' = -\frac{1}{x}y$ observe que es separable

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$$

integrando $\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$

$ln|y| = -ln|x| + C$ note que x>0

aplicando **e** $e^{ln|y|} = e^{ln|x|^{-1}}e^{C}$

$y = |x|^{-1}C$ note que $e^{C} = C$

$y = \frac{C}{|x|}$ solución general en forma explícita

como y(1)=2 esto es (1,2)

$$2 = \frac{C}{|1|}$$

$$C = 2$$

$$\therefore \textit{la solución explícita particular es } y = \frac{2}{|x|}$$

7. Calcular el valor de la sumatoria:

$$\sum_{i=5}^{8}(5i-1) = (5(5)-1) + (5(6)-1) + (5(7)-1) + (5(8)-1) =$$

$$= 24 + 29 + 34 + 39 = 126$$

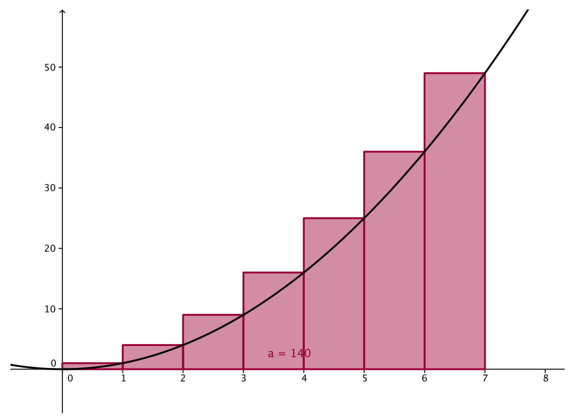
8. $f(x) = x^2 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta x$

Área aproximada:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{7-0}{n} = \frac{7}{n} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{7} f(x_k)\Delta x = \; f(1)\Delta x + f(2)\Delta x + f(3)\Delta x + f(4)\Delta x + f(5)\Delta x + f(6)\Delta x + f(7)\Delta x$$

$$\sum_{k=1}^{7} f(x_k)\Delta x = 1(1+4+9+16+25+36+49) = 140$$



Área exacta:

$$\Delta x_k = \frac{7}{n}\,k$$

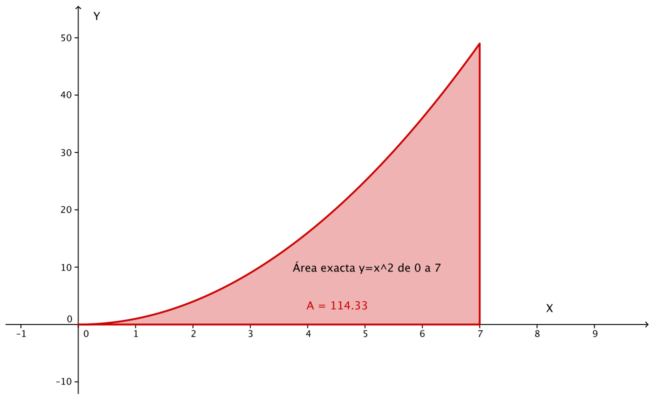
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{7}{n}k\right)\left(\frac{7}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{7}{n}k\right)^2\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{49k^2}{n^2}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{343}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{343}{n^3}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{343}{6} \left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = 114.33$$



9. $\int_0^7 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^7 = \frac{343}{3} = 114.33$

10.

a) 0

b) 0

c) 0

3.15. Soluciones de autoevaluación

1.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

$$y = e^{2x}$$

$$y' = 2e^{2x}$$

$$y'' = 4e^{2x}$$

sustituyendo $4e^{2x} + 2e^{2x} - 6e^{2x} = 0$

$$0 \equiv 0$$

2. $h(x) = \frac{1}{x} + x$

$h'^{(x)} = -\frac{1}{x^2} + 1$

$h''(x) = \frac{2}{x^3}$

sustituyendo en : $y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} = 0$

$$\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{x} + x\right) + \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{2x}{x^2} + \frac{2}{x} = 0$$

$$-\frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 0$$

$$0 \equiv 0$$

∴ h(x) es solución

3. $y' = c_1 sen\, x - c_2 \cos x$

$y'' = -c_1 \cos x - c_2 sen\, x$

sustituyendo en: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$$(-c_1 \cos x - c_2 sen\, x) + c_1 sen\, x - c_2 \cos x = 0$$

$$0 \equiv 0$$

4. $(y-1)dy = (2x+5)dx$

integrando tenemos $\frac{y^2}{2} - y = x^2 + 5x + C$ esta es la forma implícita

multiplicando todo por 2 y completando cuadrados

$$y^2 - 2y + 1 = 2x^2 + 10x + 2C$$

factorizando, despejando y y sacando raíz cuadrada

$y = \sqrt{2x^2 + 10x + 2C + 1} + 1$ solución en forma explícita dada en su forma general

5. $\sum_{i=1}^{3}(3)^i = 3^1 + 3^2 + 3^3 = 3 + 9 + 27 = 39$

6. $$\frac{dy}{dx} = 10x$$

$$dy = 10x\,dx$$

integrando $y = 5x^2 + C$ solución general en forma explícita.

Dado que $y(3) = 1$

$$1 = 45 + C$$

$$-44 = C$$

por lo tanto la solución particular explícita es:

$$y = 5x^2 - 44$$

7. $\int_{-3}^{5} 6\,dx = 6[(5) - (-3)] = 6[8] = 48$

8. $\int_{0}^{5} x^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{125}{3}$

9. $\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx = sen\,x\,\Big|_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^3\,x\;dx = \frac{2}{3}$

3.16. Conclusión

Este fue un acercamiento a las ecuaciones diferenciales, vimos que pueden modelar fenómenos en distintas áreas, como la biología: que nos permite calcular la rapidez de crecimiento de un cultivo; la física: en modelos en los que las variables velocidad, aceleración, corriente, voltaje, etc. intervienen; la aeronáutica: definiendo la relación entre fuerza de sustentación, velocidad, potencia, y muchas otras áreas más, te invitamos a investigar otras áreas de acción donde se aplican, y a seguir estudiando los diferentes métodos de resolución para las ecuaciones diferenciales, según sea su tipo.

URL's

Tipos de ecuaciones diferenciales

http://eqworld.ipmnet.ru/en/methods/meth-ode.htm

Software libre WinPlot para graficar ecuaciones diferenciales

http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

http://www.youtube.com/watch?v=1T46tME7QDo

http://mazinger.sisib.uchile.cl/repositorio/ap/ciencias_quimicas_y_farmaceuticas/apmat4d/09a.html

Simulador

http://demonstrations.wolfram.com/search.html?query=differential+equations

Revista CODEE sobre aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

http://www.codee.org/library/articlesWolfram

http://mathworld.wolfram.com/DifferentialEquation.html

http://mathworld.wolfram.com/OrdinaryDifferentialEquation.html

http://www.khanacademy.org/math/differential-equations/first-order-differential-equations/differential-equations-intro/v/what-is-a-differential-equation

http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011/

http://ejde.math.txstate.edu

http://link.springer.com/journal/10625

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/de.html#deh

http://arxiv.org/list/math.AP/recent

http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/

http://arxiv.org/list/math.NA/recent

http://www.sosmath.com/diffeq/diffeq.html

http://jacobi.fis.ucm.es/~pparanda/EDOs.html

http://www.codee.org/library/projects/differential-equations-laboratory-workbook-1

http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011/unit-i-first-order-differential-equations/first-order-autonomous-differential-equations/

http://mathinsight.org/solving_single_autonomous_differential_equations_graphical

Integral de Riemann

http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html

Referencias

[1] Jiménes Zamudio, J.J. & López García, J. (2005)Métodos analíticos para ecuaciones diferenciales ordinarias. México: UNAM. Consulta: 30 de julio de 2013, de http://books.google.es/books?id=xRIbV9j8jwcC&pg=PA21&dq=gráfica+de+ecuaciones+diferenciales&hl=es&sa=X&ei=-#v=onepage&q=gráfica%20de%20ecuaciones%20diferenciales&f=false

[2] Gracia, Calandín, Luis (2005) Modelado de sistemas dinámicos: aplicaciones. Alicante: TELF. Consulta: 30 de julio de 2013, de http://books.google.es/books?id=bHHpa3ud2YAC&printsec=frontcover&dq=sistemas+dinámicos&hl=es&sa=X&ei=2-P3UcqVIIf6qAHr2YH4Dw&ved=0CDMQ6AEwAA#v=onepage&q=sistemas%20dinámicos&f=false

[3] Steiner Erich (2003) Matemáticas para las ciencias aplicadas. Barcelona: Reverté

[4] Borrelli, Roberto L. & Coleman, Courtney S. (2005) Ecuaciones diferenciales una perspectiva de modelación. México: Oxford

[5] S.F. Ellermeyer (1995) Competing Microorganisms. Winter CODEE. Consulta: 6 de agosto de 2013, de http://www.codee.org/library/newsletters/Winter%201995

[6] Molina José , Gónzález Francisco (2011) Análisis derivativo de funciones .México: CONALEPMICH

[7] R. E. Terrell. Cornell University. Mathematics Department. Ithaca Campus. Notes on Differential Equations. P. 49. 2012. New York. Consulta: 6 de Agosto de 2013 de http://www.math.cornell.edu/~bterrell/dn.pdf

[8] Pagola, F.L., . Modelado de sistemas dinámicos. (9-10). Universidad Pontifica. Escuela Técnica Superior de Ingeniería.. Madrid. España. Consulta: 6 de agosto de 2013, de www.dea.icai.upco.es/~pagola/Material/modelado.pdf

[9] Ellermeyer, S. F. Competing Microorganisms. Boston University. CODEE Newsletter, Wintner, 1995. Consulta: 6 de Agosto de 2013, de http://www.codee.org/library/newsletters/Winter%201995

[10] Gustafson, G. University of Utah. Mathematics Department. Systems of Differential Equations. 528-529. Salt Lake City. 2012. Consulta: 6 de Agosto de 2013, de http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf

[11] Stewart James(2006) Cálculo de una variable. México: Thomson

[12] Hayes, Brian (2006) Gauss's Day of Reckoning. American Scientist Classics http://www.americanscientist.org/issues/pub/2006/3/gausss-day-of-reckoning

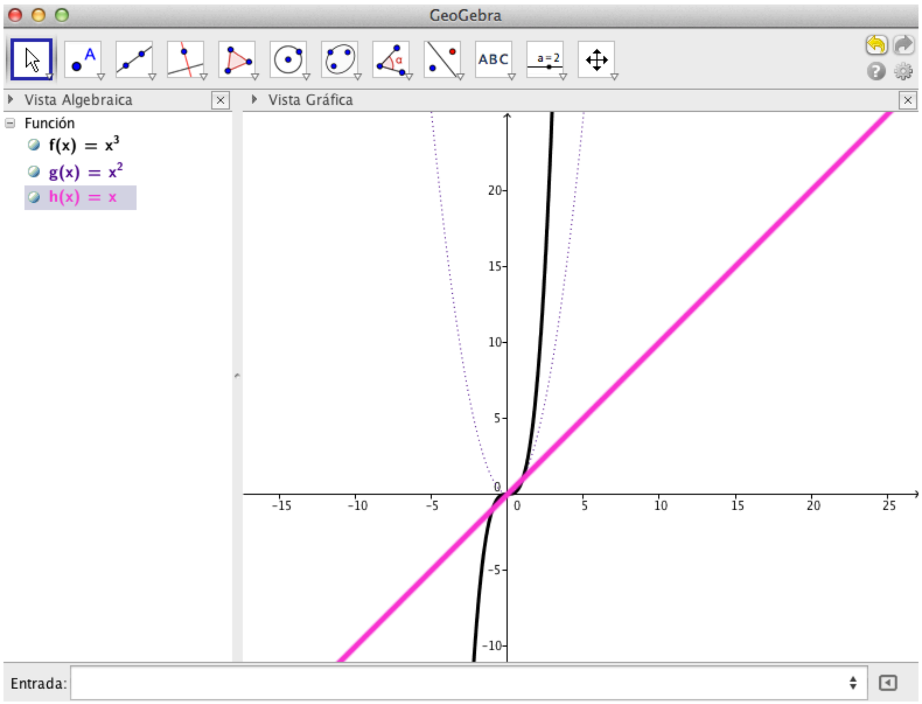
[13] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss.html

[14] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html

[15] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Barrow.html

Capítulo 4:

Cálculo de áreas



4. Cálculo de áreas

Sin profundizar en un análisis matemático riguroso, se dice que la integral definida es una integral que nos lleva a obtener un valor numérico específico.

Es la integral definida la que nos permite obtener el valor de áreas, volúmenes, longitudes curvas y obtener el valor numérico de magnitudes, entre otras, tales como la fuerza, velocidad, aceleración[1], etc.

La notación de la integral definida es:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

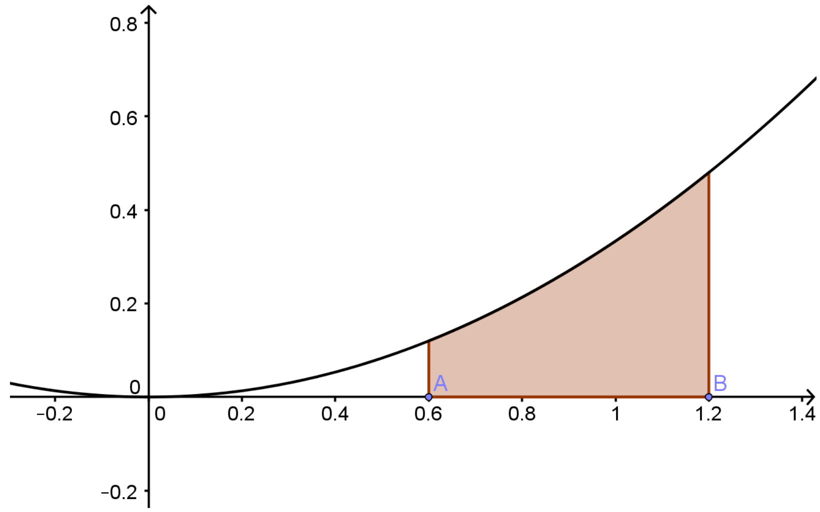
La integral definida nos lleva a evaluar dicha integral dentro de un intervalo de la variable de integración, esto es, desde el valor $x = a$ hasta el valor $x = b$. A dichos valores se les conoce como límites de integración.

La evaluación de una integral se denota como sigue:

$$\int_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esto nos indica que una vez obtenida la integral $F(x)$, esta se evalúa en el límite superior y se le resta la evaluación del límite inferior.

Una interpretación de la integral definida[2], es el área delimitada por la curva de una función, el eje x y los límites de integración a y b.



Veamos algunos ejemplos:

1. $\int_2^5 x^3\,dx$

$$\int_2^5 x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\Bigg]_2^5 = \frac{x^4}{4}\Bigg]_2^5 = \frac{(5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{16}{4} = \frac{609}{4} = 152\ \frac{1}{4}$$

$$\int_2^5 x^3\,dx = 152\ \frac{1}{4} \quad o \quad \int_2^5 x^3\,dx = 152.25u^2$$

2. $\int_0^2 (x^2 + x + 1)\,dx$

$$\int_0^2 (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Bigg]_0^2 = \left(\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2\right) - (0 + 0 + 0)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

$$\int_0^2 (x^2 + x + 1)\,dx = \frac{20}{3}u^2$$

3. $\int_{\pi}^{2\pi} sen\, x\, dx$

$$\int_{\pi}^{2\pi} sen\, x\, dx = -\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -\cos 2\pi + \cos \pi$$

$$considerar\ que\ los\ ángulos\ se\ dan\ en\ radianes$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} sen\, x\, dx = -2\, u^2$$

4. $\int_0^3 e^{2x}\, dx$

$$\int_0^3 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 e^v\, dv = \frac{1}{2}e^v = \frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^6\right] - \left[\frac{1}{2}e^0\right] = \left[\frac{1}{2}(403.42)\right] - \left[\frac{1}{2}(1)\right] = 201.71 - 0.5 = 201.21$$

$$\int_0^3 e^{2x}\, dx = 201.21\, u^2$$

5. $\int_1^{10} x^3 \ln x\ dx$

Esta integral se lleva a cabo por el método de integración por partes.

$$Sean\quad u = \ln x\quad y\quad dv = x^3 dx$$

$$entonces\quad du = \frac{dx}{x}\quad y\quad v = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \ln x\ dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\int x^3 \ln x\ dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

Ahora evaluemos la integral en los límites de integración indicados

$$\int_1^{10} x^3 \ln x \ dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}\right]\begin{matrix}10\\1\end{matrix}$$

$$\left[\frac{10^4}{4}\ln 10 - \frac{10^4}{16}\right] - \left[\frac{1^4}{4}\ln 1 - \frac{1^4}{16}\right]$$

$$= [5756.4627 - 625] - [0 - 0.0625] = 5131.4627 + 0.0625 = 5131.5252$$

$$\int_1^{10} x^3 \ln x \ dx \cong 5\,131.52\ u^2$$

4.1. Con una función

El área confinada o limitada por la curva de una función continua $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, el eje x y las rectas $x = a,\ x = b$, se determina mediante la integral definida:

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)\, dx} = \int_a^b \boldsymbol{y\, dx}$$

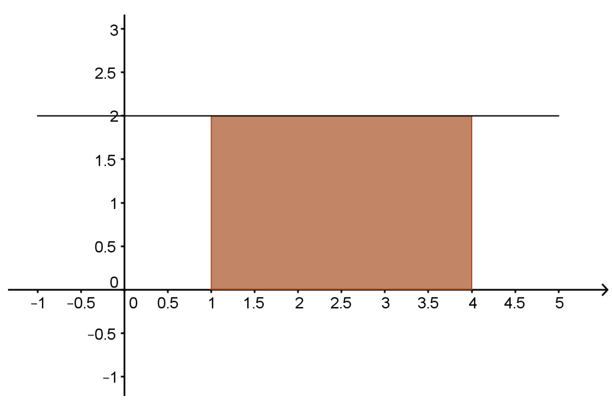
1. Obtener el área limitada por la función constante $y = 2$, el eje X en el intervalo [1,4].

Para obtener el área de esta región limitada, aplicamos integral definida a la función, utilizando el intervalo como límites de integración:

$$\text{Á}rea = \int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^4 y\, dx = \int_1^4 2\, dx = 2\int_1^4 dx$$

$$= 2x\Big]_1^4 = [2(4)] - [2(1)] = 8 - 2 = 6$$

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \boldsymbol{6\, u^2}$$



Como se aprecia en la figura, esta área es fácil de calcular, utilizando la fórmula para el área de un rectángulo:

$$\boldsymbol{A = b\, h = (3)(2) = 6\, u^2}$$

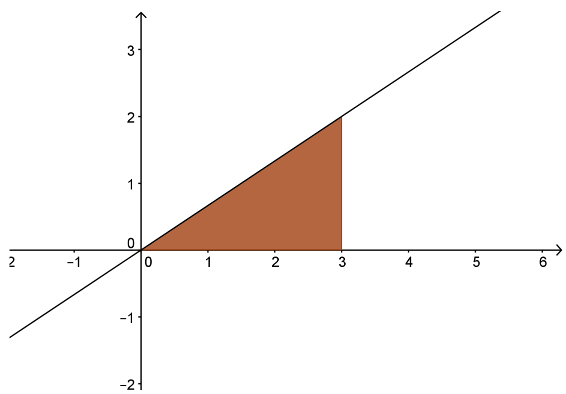
2. Obtener el área limitada por la función $y = \frac{2}{3}x$, el eje X en el intervalo [0,3].

Para obtener el área de esta región limitada, aplicamos integral definida a la función, utilizando el intervalo como límites de integración:

$$Área = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 = \frac{x^2}{3}\Big]_0^3$$

$$= \frac{3^2}{3} - \frac{0^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\boldsymbol{Área = 3\ u^2}$$

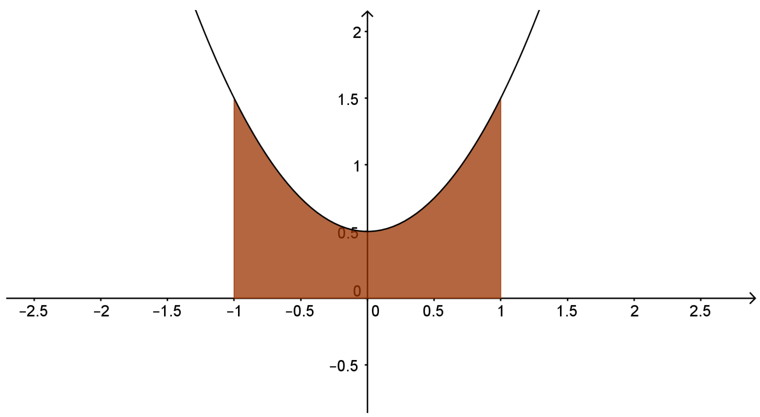


El área delimitada, representa un triángulo, su área en este caso, se puede determinar mediante la fórmula:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(3)(2)}{2} = \frac{6}{2} = \boldsymbol{3\ u^2}$$

3. Obtener el área limitada por la función $y = x^2 + \frac{1}{2}$, el eje X en el intervalo $[-1,1]$.

Se trata de una parábola, desplazada positivamente en el eje Y.

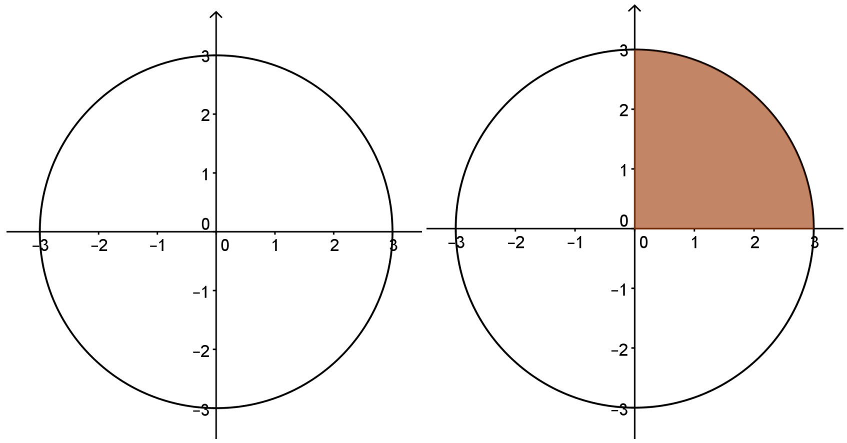


$$A = \int_{-1}^{1} y\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{((-1)^3)}{3} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5}{6}\right] - \left[-\frac{5}{6}\right] = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6}$$

$$A = \frac{5}{3}\,u^2 \cong 1.67\,u^2$$

4. Obtener el área de la circunferencia de radio r



La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = r^2$ siendo r^2 una constante.

Para obtener el área sombreada, integrar el primer cuadrante, con la función despejada en y.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\int_0^r y\, dx = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Aplicando la fórmula de integración

$$\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} arc\ sen\ \left(\frac{v}{a}\right) + c$$

Tenemos que

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\ arc\ sen\ \left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2}\ arc\ sen\ \left(\frac{r}{r}\right) - 0 - 0$$

$$= \frac{r^2}{2}\ arc\ sen\ 1$$

Recordemos que en cálculo las unidades angulares se expresan en radianes, por lo que de la expresión anterior

$$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4}$$

Este valor expresa el área del primer cuadrante, así que al multiplicar por 4, se tiene finalmente el área total:

$$A_c = 4\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = \pi r^2$$

Áreas negativas

Cabe mencionar que cuando el área a calcular se ubica por debajo del eje x, se tendrá un valor negativo, por lo que considera el valor absoluto de dicha área o se determina también como:

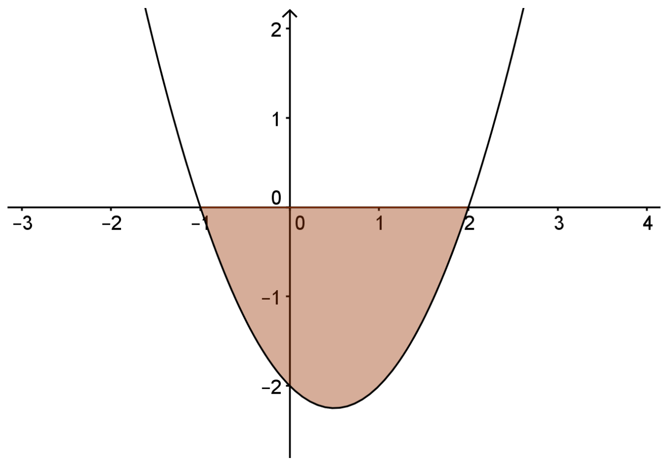
$$\acute{A}rea = -\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Determinar el área limitada por la función $f(x) = x^2 - x + 2$, y el eje x.

La función representa una parábola que abre hacia arriba. Los puntos en los que corta al eje X, se obtienen al igualar la función a cero y resolver la ecuación:

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \therefore \quad x = 2 \;\; y \;\; x = -1$$

Esto permite definir los límites de integración que van de -1 a 2. Al graficar la función se tiene:



$$A = \int_{-1}^{2} f(x) = \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg]_{-1}^{2} = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1)\right]$$

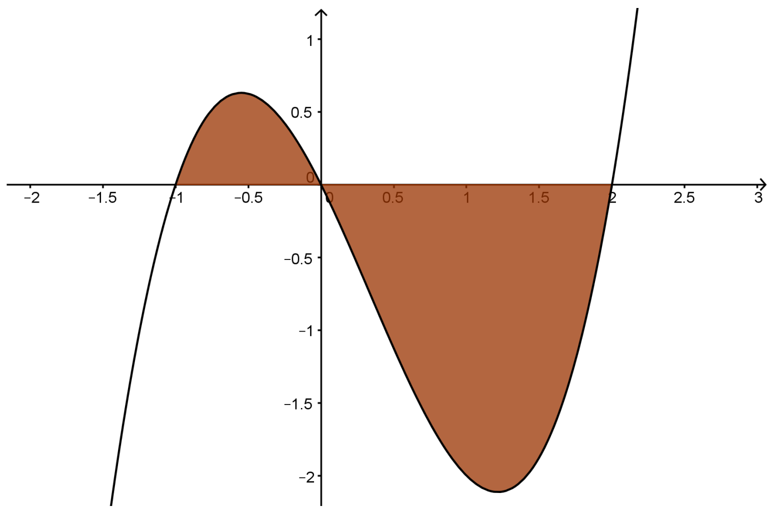
$$= \left[\frac{8}{3} - 2 - 4\right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right] = \left[\frac{8}{3} - 6\right] - \left[\frac{7}{6}\right] = -\frac{10}{3} - \frac{7}{6} = -\frac{27}{6}$$

Pero como el área siempre es un número positivo:

$$A = -\int_{-1}^{2} f(x) = -\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx = \frac{27}{6}\, u^2$$

6. Obtener el área total limitada por la función $y = x^3 - x^2 - 2x$, el eje X en el intervalo de $(-1,2)$.

Se muestra la gráfica de dicha función



Como se tiene una región arriba y otra debajo del eje x, se realizará una integración de -1 a 0 y otra de 0 a 2. Esta última por ser negativa se tomará su valor absoluto o simplemente se cambia de signo.

$$Área = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{0} y\,dx + \left|\int_{0}^{2} y\,dx\right|$$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = [0] - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

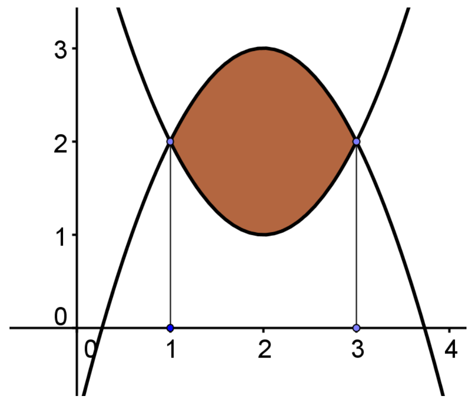
$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \left[\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right] - [0] = -\frac{8}{3}$$

$$Área = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12}\ u^2$$

4.2. Con dos y tres funciones

Área entre dos funciones

Para obtener el área comprendida entre dos funciones: $y = f(x)$ y $y = g(x)$, de modo tal que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo $[a, b]$

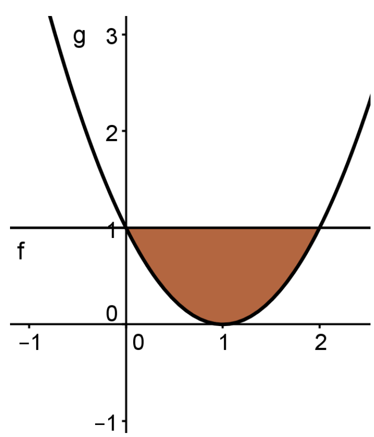


Llevar a cabo la integración:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

7. Obtener el área comprendida entre las funciones $f(x) = 1$ y $g(x) = (x - 1)^2$

La figura muestra las gráficas de ambas funciones:



Los límites de integración se determinan de la intersección entre ambas gráficas. Para ello se igualan las funciones y se resuelve la ecuación. Las raíces obtenidas definen los límites inferior y superior.

$$f(x) = g(x)$$
$$1 = (x-1)^2$$
$$\sqrt{1} = \sqrt{(x-1)^2}$$
$$\pm 1 = x - 1$$
$$\pm 1 + 1 = x$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

En el intervalo $[0,2]$ se ve que $f(x) \geq g(x)$ por lo tanto se integra como:

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_0^2 [1-(x-1)^2]\,dx = \int_0^2 [1-(x^2-2x+1)]\,dx = \int_0^2 [1 - x^2 + 2x - 1]\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \left[-\frac{8}{3}+4\right] - [0] = -\frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

$$Área = \frac{4}{3}\,u^2$$

8. Obtener el área limitada por las funciones: $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$

Primeramente se tiene que determinar los puntos de intersección de las funciones para que tengamos los límites de integración, igualando las funciones:

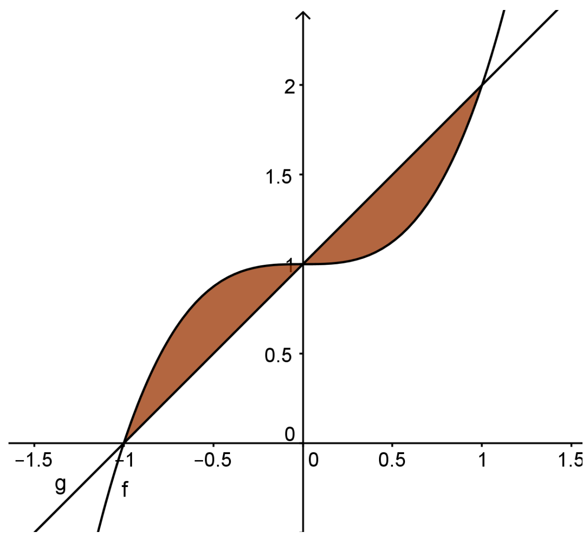
$$x^3 + 1 = x + 1$$
$$x^3 + 1 - x - 1 = 0$$
$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 1$$

Observar la figura siguiente, la cual muestra las gráficas correspondientes:



Se tienen dos intervalos de integración:

$$de\ \ (-1{,}0)\ \ f \geq g$$

$$y\ \ en\ (0{,}1)\ \ g \geq f$$

$$Área = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} [(x^3 + 1) - (x + 1)]\, dx + \int_{0}^{1} [(x + 1) - (x^3 + 1)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

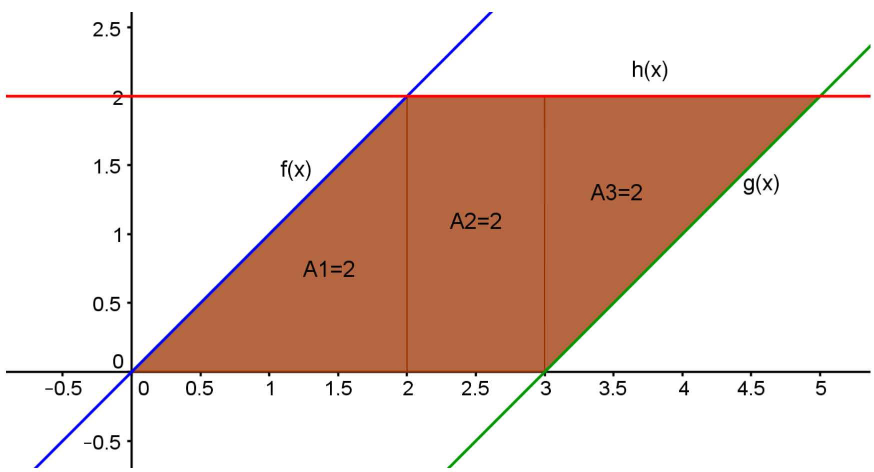
$$Área = \frac{1}{2}\,u^2$$

Área entre tres funciones

El siguiente ejemplo ilustra una forma de calcular el área confinada por los contornos de las curvas de tres funciones y el eje X.

9. Obtener el área limitada por las funciones: $f(x) = x \quad g(x) = x - 3 \;\; y \;\; h(x) = 2$

La gráfica de estas funciones se muestra a continuación.



Aunque estas regiones pueden ser calculadas con las fórmulas básicas de geometría para un triángulo y un rectángulo, el método de la integración definida manifiesta que para curvas más complejas, el procedimiento en el cálculo de áreas es correcto.

Los límites de integración son evidentes en la figura, sin embargo, se requiere determinarlos analíticamente como ya se mencionó en ejemplos anteriores, igualando funciones.

$$f(x) = h(x) \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$h(x) = g(x) \;\rightarrow\; \quad 2 = x - 3 \quad \therefore \;\; x = 5$$

$Notar\ que:$

$f\ y\ g\ son\ rectas\ paralelas, por\ lo\ que\ no\ tienen\ intersecciones$

$En\ el\ intervalo\ (0{,}2)\ \ integramos\ bajo\ la\ curva\ f$

$En\ el\ intervalo\ (2{,}3)\ \ integramos\ bajo\ la\ curva\ h$

$En\ el\ intervalo\ (3{,}5)\ \ integramos\ bajo\ dos\ curvas\ donde\ h \geq g$

$$A = A1 + A2 + A3 = \int_0^2 f dx + \int_2^3 h\, dx + \int_3^5 (h - g)\, dx$$

$$A = \int_0^2 x\, dx + \int_2^3 2\, dx + \int_3^5 [2 - (x - 3)]\, dx$$

$$A = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 2x]_2^3 + \int_3^5 (5 - x)\, dx$$

$$A = [2 - 0] + [6 - 4] + \left.\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_3^5$$

$$A = 2 + 2 + \left[\left(25 - \frac{25}{2}\right) - \left(15 - \frac{9}{2}\right)\right] = 2 + 2 + \left(10 - \frac{16}{2}\right) = 2 + 2 + 2$$

Como se esperaba el resultado final es:

$$A = 6\, u^2$$

10. Obtener el área limitada por las funciones:

$f(x) = x^2 \quad g(x) = (x - 1)^2 - 1 \quad y \quad h(x) = (x - 2)^2$

Primeramente se buscan las intersecciones de las curvas, para definir los intervalos de integración:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \quad \rightarrow \quad x^2 = (x - 1)^2 - 1$$

$$x^2 = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$x^2 - x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$$

$$x = 0$$

$$\boldsymbol{f(x) = h(x)} \quad \rightarrow \quad x^2 = (x-2)^2$$

$$x^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

$$\boldsymbol{g(x) = h(x)} \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 - 1 = (x-2)^2$$

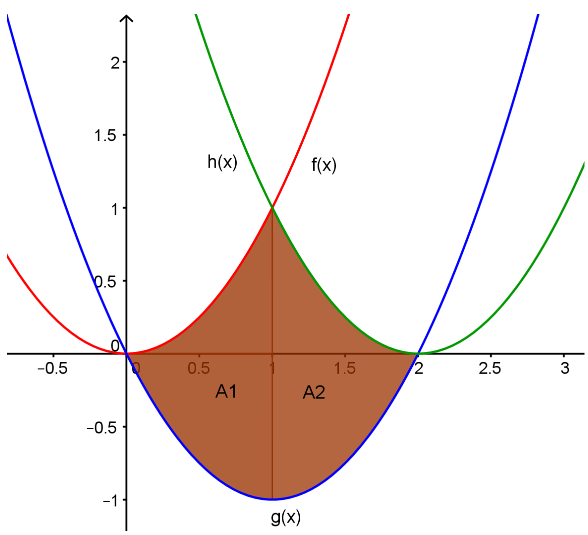
$$x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$-2x + 4x = 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

La figura siguiente muestra la gráfica de cada función:



Como se puede observar, se usarán dos intervalos de integración:

$$En\ el\ intervalo\ (0{,}1){:}\ f(x) \geq g(x)$$

$$En\ el\ intervalo\ (1{,}2){:}\ h(x) \geq g(x)$$

$$A = A1 + A2 = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [h(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - ((x-1)^2 - 1)]dx + \int_1^2 (x-2)^2 - [(x-1)^2 - 1]dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - (x^2 - 2x + 1 - 1)]\, dx + \int_1^2 x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 2x + 1 - 1)\, dx$$

$$= \int_0^1 2x\, dx + \int_1^2 (-2x + 4)\, dx$$

$$= \left.\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{2x^2}{2} + 4x\right]_1^2$$

$$= x^2]_0^1 + [4x - x^2]_1^2$$

$$= [1 - 0] + [(8-4) - (4-1)] = 1 + 4 - 3 = 1 + 1$$

$$A = 2\, u^2$$

11. Determinar el área confinada por las funciones: $f(x) = -2x \qquad g(x) = x^2 \quad y \quad h(x) = \frac{x^2}{2}$

Se igualan las funciones para obtener las intersecciones y definir los límites de integración:

$$f(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad -2x = x^2$$

$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x+2) = 0$$
$$x = 0 \;\; y \;\; x = -2$$

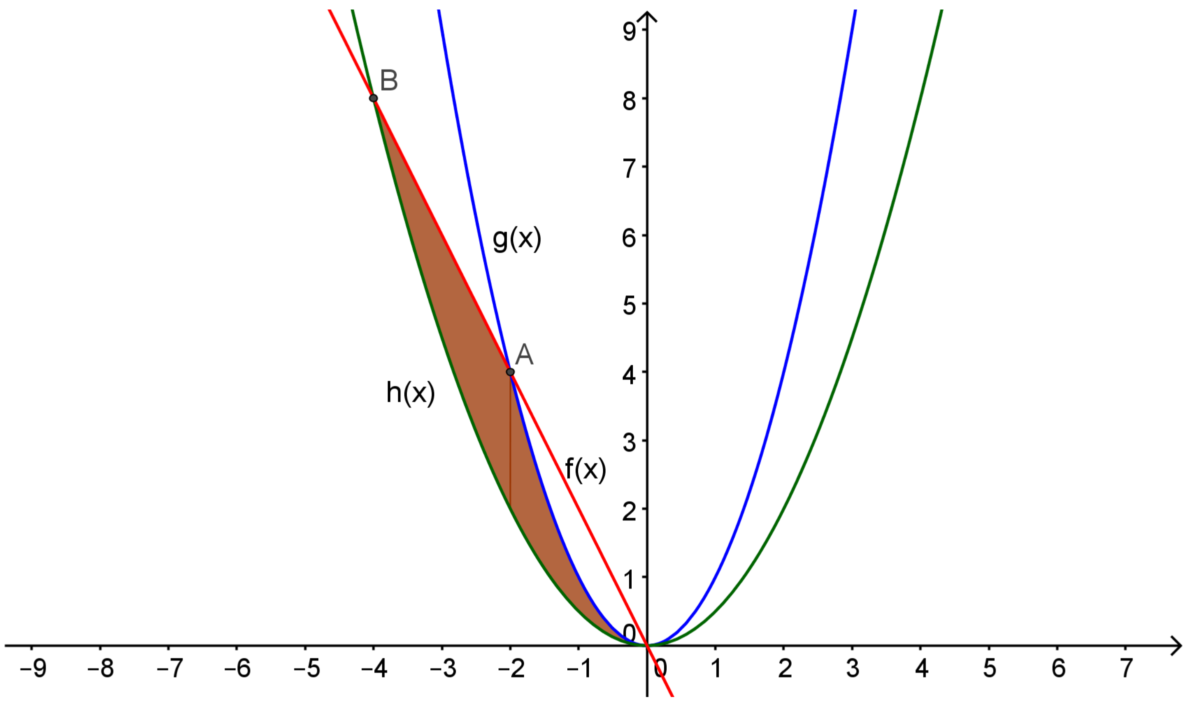
$$f(x) = h(x) \quad \rightarrow \quad -2x = \frac{x^2}{2}$$

$$-4x = x^2$$
$$x^2 + 4x = 0$$
$$x(x+4) = 0$$
$$x = 0 \;\; y \;\; x = -4$$

$$g(x) = h(x) \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$2x^2 = x^2$$
$$2x^2 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Se ha graficado cada función. La siguiente figura muestra los puntos de intersección que existen entre estas tres funciones:



Se puede apreciar que los límites de integración quedan definidos por los siguientes intervalos:

$$En\ el\ intervalo\ (-4,-2){:}\quad f(x) \geq h(x)$$

$$En\ el\ intervalo\ (-2{,}0){:}\quad g(x) \geq h(x)$$

Así que el área correspondiente se determina de la siguiente manera:

$$A = \int_{-4}^{-2} (f - h)dx + \int_{-2}^{0} (g - h)\, dx$$

$$\int_{-4}^{-2} (f - g)dx = \int_{-4}^{-2} \left[(-2x) - \left(\frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \left[-\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{-2} = \left[-x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{-2}$$

$$= \left(-4 + \frac{8}{6}\right) — \left(-16 + \frac{64}{6}\right) = -4 + \frac{8}{6} + 16 - \frac{64}{6} = 12 - \frac{56}{6} = \frac{72}{6} - \frac{56}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\int_{-2}^{0} (g - h)\, dx = \int_{-2}^{0} \left[(x^2) - \left(\frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \int_{-2}^{0} \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-2}^{0} \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big]_{-2}^{0} = \left[0 - \left(-\frac{8}{6}\right)\right] = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

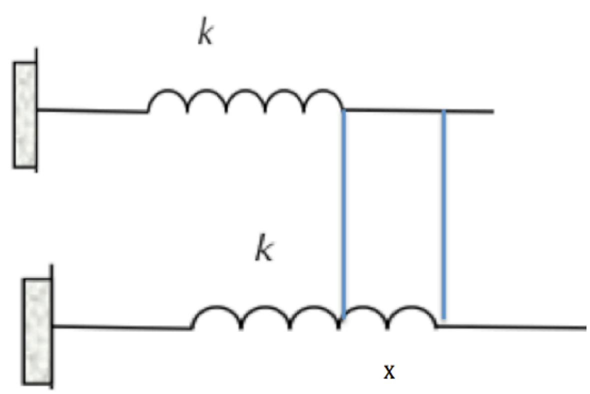
$$A = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3}$$

$$A = 4\, u^2$$

4.3. Aplicaciones

Una de las aplicaciones de la integral definida en física es la demostración de la ley de Hooke.

Se puede demostrar que para cualquier resorte que cumple con la ley de Hooke, el trabajo realizado W al estirar un resorte una distancia d está dado por: $W = \frac{1}{2}kd^2$



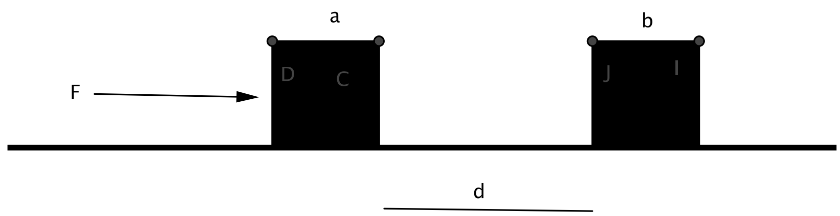
Para demostrar que el trabajo W que se requiere para estirar un resorte una distancia d, está dado por $W = \frac{1}{2}kd^2$

Partimos de tener un resorte con una longitud original d y lo estiramos una distancia x.

La fuerza necesaria para estirar el resorte es proporcional a K constante del resorte por y la distancia que se estira x.

Recordemos que el trabajo W que realiza una fuerza F para mover un cuerpo de un punto a a un punto b esta dado por:

$$W = F \times d$$



Por definición el trabajo que se aplica para mover una partícula de un punto a a un punto b una distancia d esta dado por:

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

En nuestro ejemplo del resorte la fuerza viene dada por $F = kx$ la sustituimos y tenemos:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^d Kx\, dx = k\int_0^d x\, dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^d$$

$W = k\left[\frac{d^2}{2} - 0\right] = k\frac{d^2}{2} = \frac{1}{2}kd^2$ que es lo que se quería demostrar.

4.4. Problemario

1. Calcular el área de la región comprendida entre las funciones:

$g(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $f(x) = -x^2 + 2x$

2. Calcular el área entre las funciones $sen\, x$, y $\cos x$, desde $\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{9\pi}{4}$.

3. Hallar el área bajo la parábola $y = x^2$, el eje de las abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

4. Calcular el área entre las funciones:

$f(x) = x^2 - x - 2$, el eje OX $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

5. Calcular el área limitada por las funciones $y = \cos x$, $y = 0$ entre los valores $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

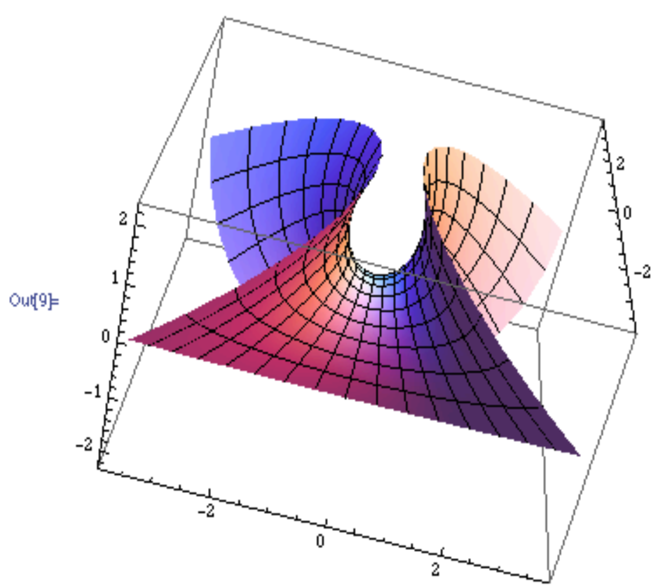
6. Calcular el área entre las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 6$ y $g(x) = 2x$

7. Calcular el área limitada entre las funciones $y^2 = 4x$ y $y = x$.

8. Calcular el área entre las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = \frac{x^2}{3}$

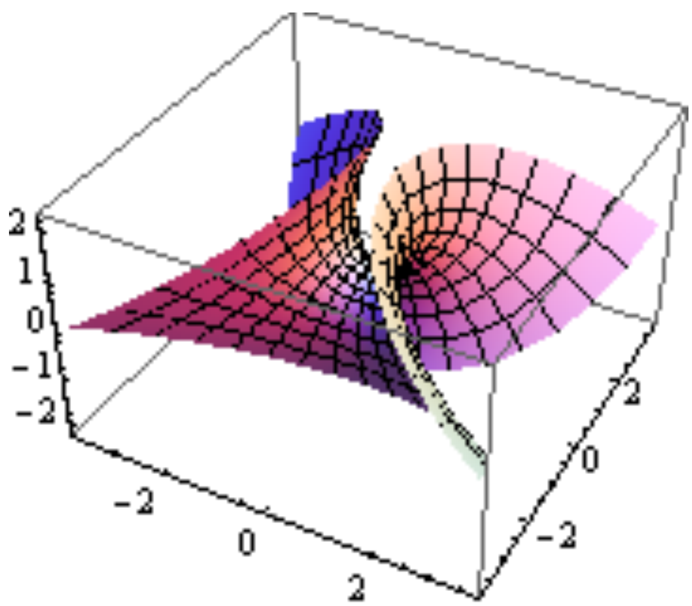
In[9]:=

```
ParametricPlot3D[{u - u^3/3 + u v^2, -v - u^2 v + v^3/3, u^2 - v^2},
 {u, -1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5}]
```



4.5. Autoevaluación

1. Calcular el área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x$.
2. Calcular el área comprendida entre la función $f(x) = sen\, x$, y la función $y = 0$
3. Calcular el área entre las siguientes funciones: $f(x) = x^3, g(x) = 0, x = 4$.
4. Calcular el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.
5. Calcular el área bajo la curva de la función $f(x) = \cos x$ y el eje OX esto es $y = 0$.



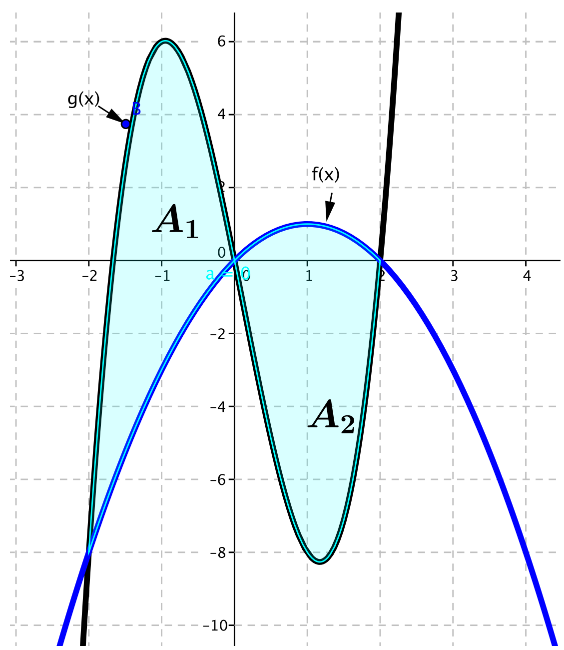
4.6. Soluciones del problemario

1.

a) Primero debemos encontrar las intersecciones entre las gráficas que representan las funciones, para hacerlo igualamos $g(x) = f(x)$

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$
$$3x^3 - 12x = 0$$
$$3x(x^2 - 4) = 0$$
$$3x(x + 2)(x - 2) = 0$$
$$\therefore \quad x = 0, \qquad x = -2, \qquad x = 2$$

b) En seguida grafica las funciones, puede ser con un programa de apoyo como geogebra o mediante una tabla de valores, donde asignes valores a la variable independiente x, para obtener los de la variable dependiente y



c) El cálculo del área en general, es igual a la integral definida $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ donde la función que representa el minuendo es la superior y la que representa el sustraendo es la inferior.

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} [(3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{12}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$A_1 = 0 - (-12) = 12u^2$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{0}^{2} [(-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 - 10x)]dx$$

$$= \int_{0}^{2} (12x - 3x^3)dx = \left(\frac{12}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{2}$$

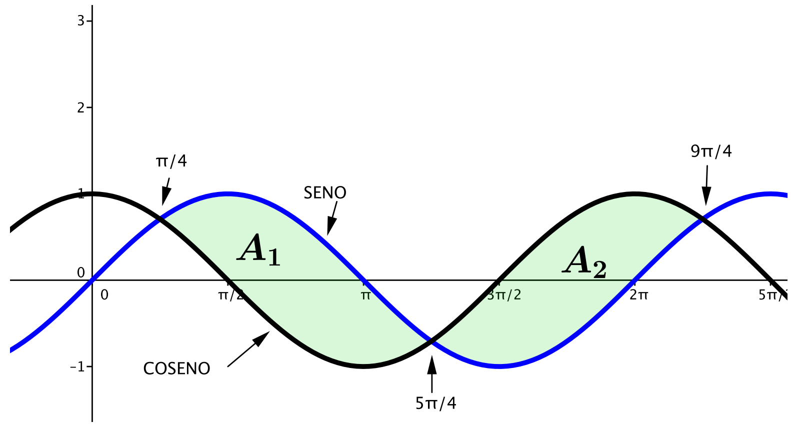
$$A_2 = (24) - (12) = 12u^2$$

Por lo tanto el área total:

$$A_T = A_1 + A_2 = 12u^2 + 12u^2 = 24u^2$$

2.

a) Primero graficamos las funciones



b) Identificamos las intersecciones resolviendo la ecuación trigonométrica

$$sen\, x = \cos x$$

esto sucede cuando $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi$

c) Calculamos el área A_1 y A_2, observe que en A_1 el área es $sen\, x - \cos x$, mientras que en A_2 es $\cos x - sen\, x$.

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\, x - \cos x)dx$$

$$A_1 = (-\cos x - sen\, x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$A_1 = \left(-\cos\frac{5\pi}{4} - sen\,\frac{5\pi}{4}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4} - sen\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Calculando A_2:

$$A_2 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos x - sen\, x\,)dx$$

$$A_2 = \left(sen\, x + \cos x\right)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}}$$

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$A_2 = (\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})$$

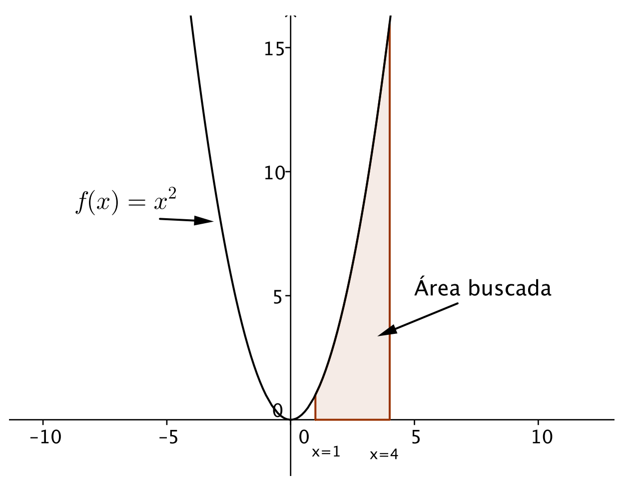
$$A_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$A_2 = 2\sqrt{2}$$

$$A_{Total} = A_1 + A_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}\, u^2$$

3.

a) Comenzamos trazando el lugar geométrico que representa la función $y = x^2$, así como las rectas que limitan dicha área.

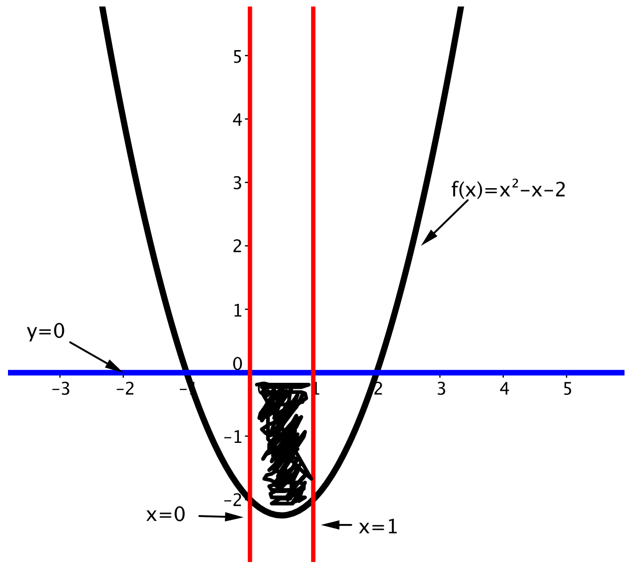


b) Calculando el área:

$$A = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21u^2$$

4.

a) Primero hacemos las gráficas de las funciones, y tenemos:



b) El área sombreada es la que queremos calcular, por lo tanto:

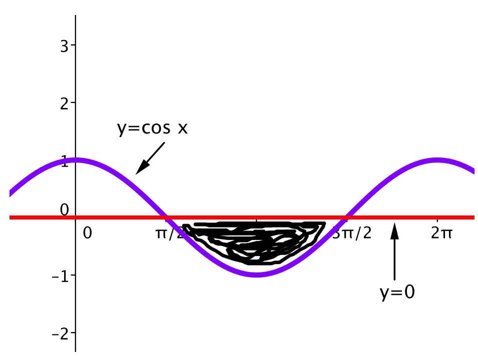
$$A = -\int_0^1 (x^2 - x - 2)dx =$$

$$A = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1$$

$$A = -\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) - (0)\right] = -\left[-\frac{13}{6}\right] = \frac{13}{6} = 2.16u^2$$

5.

a) Trazamos la gráfica de las funciones $y = \cos x$, $y = 0$:

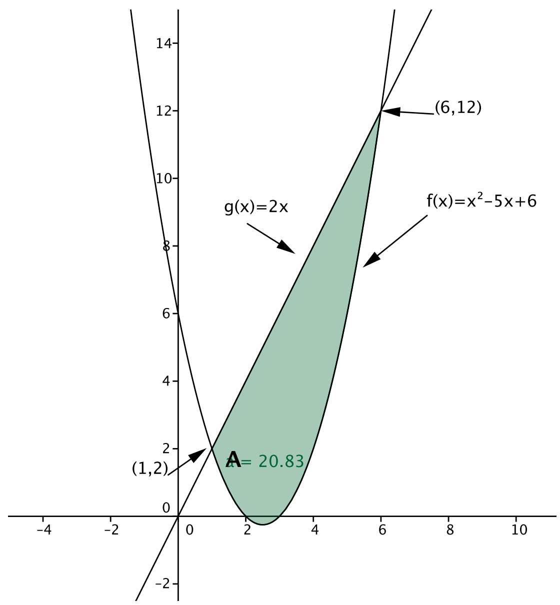


b) Observe que el área que está sobre el eje OX es un área negativa ∴ ponemos un signo negativo antes de la integral:

$$A = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx = -(sen\, x)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\big((-1)-(1)\big) = -(-2) = 2u^2$$

6.

a) Trazando los lugares geométricos de las dos funciones tenemos:



b) En la gráfica se muestran las intersecciones que se obtienen igualando las dos funciones:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2x$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

factorizando:

$$(x-1)(x-6 = 0$$

$$\therefore \quad x = 1 \text{ y } x = 6$$

c) Una vez establecidos los puntos de intersección de las funciones procedemos a integrar:

$$A = \int_1^6 (g(x) - f(x))dx = \int_1^6 [(2x) - (x^2 - 5x + 6)]\, dx$$

$$A = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 6x\right]_1^6$$

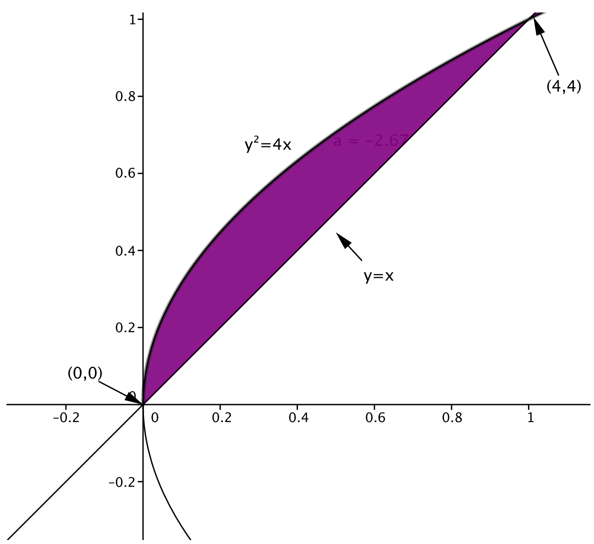
$$A = \left(-\frac{126}{3} + \frac{252}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right)$$

$$A = (-72 + 126 - 36) - \left(-\frac{17}{6}\right)$$

$$A = 18 + \frac{17}{6} = \frac{125}{6} = 20.83u^2$$

7.

a) Trazando el lugar geométrico tenemos:



b) Igualamos las funciones para encontrar los puntos en común:

$$y^2 = 4x \ \text{ y } \ y^2 = x^2$$

$$4x = x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

factorizando: $$x(x-4) = 0$$

$$\therefore \ x = 0 \ \text{ y } \ x = 4$$

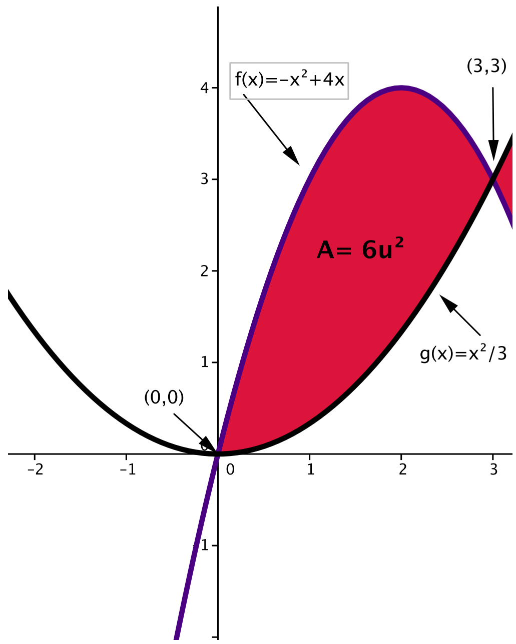
c) Una vez que se tienen los límites para integrar, procedemos a calcular la integral definida entre los límites anteriores:

$$A = \int_0^4 (\sqrt{4x} - x)dx = \int_0^4 \sqrt{4x}\,dx - \int_0^4 x\,dx$$

$$A = \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{16}{2} = \frac{8}{3} = 2.66u^2$$

8.

a) Trazando los lugares geométricos de las dos funciones tenemos:



b) Igualando las funciones para encontrar los puntos de intersección:

$$-x^2 + 4x = \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{4}{3}x^2 - 4x = 0$$

factorizando: $$\frac{4}{3}x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \ \ x = 0 \ \text{ y } \ x = 3$$

c) Calculando la integral definida:

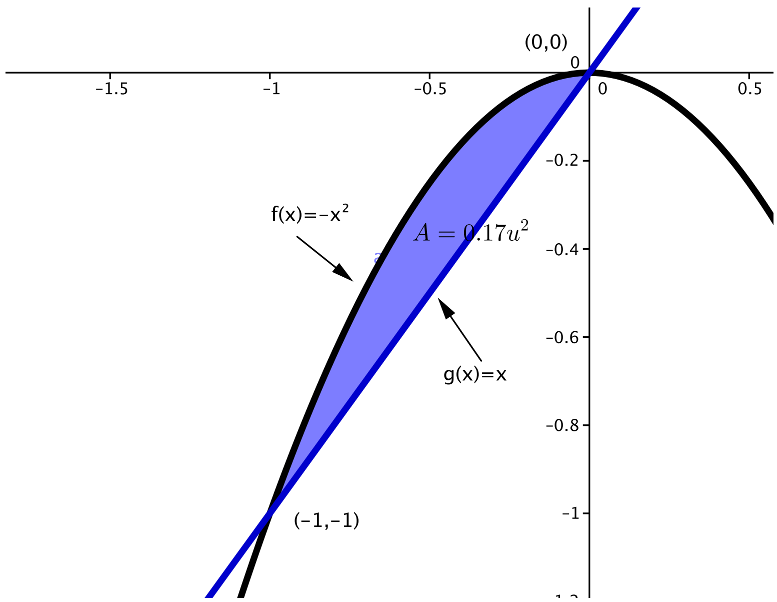
$$A = \int_0^3 [f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 \left[(-x^2 + 4x) - \left(\frac{x^2}{3}\right)\right] dx$$

$$A = \int_0^3 \left[-\frac{4}{3}x^2 + 4x\right] dx = \left[-\frac{4}{9}x^3 + 2x^2\right]_0^3 = (-12 + 18) - (0) = 6u^2$$

4.7. Soluciones de autoevaluación

1.

a) Comenzamos por encontrar el lugar geométrico, puede ser por una tabla de valores una vez que localice los puntos de intersección, esto es para que conozca el dominio o valores que le puede dar a la variable independiente x.



b) Los puntos de intersección se localizan igualando las dos funciones:

$$-x^2 = x$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$así\ \ x = 0\ \ y\ \ x = -1$$

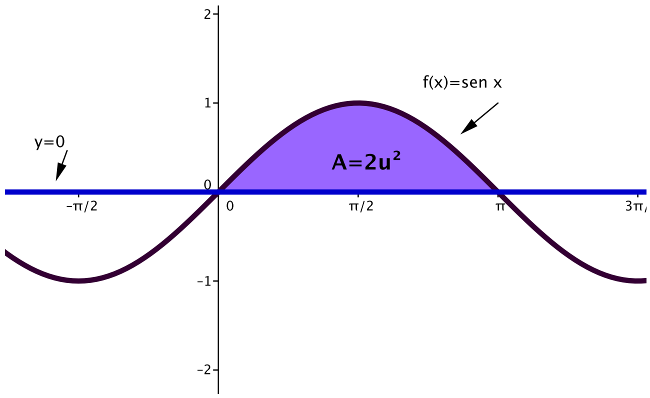
$$A = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{0} [(-x^2) - (x)]dx$$

$$A = \int_{-1}^{0} (-x^2 - x)dx = (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{0}$$

$$A = (0) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} = 0.0166u^2$$

2.

a) Trazamos las funciones:



b) La intersección entre las funciones la encontramos resolviendo la ecuación trigonométrica:

$$sen\ x = 0$$

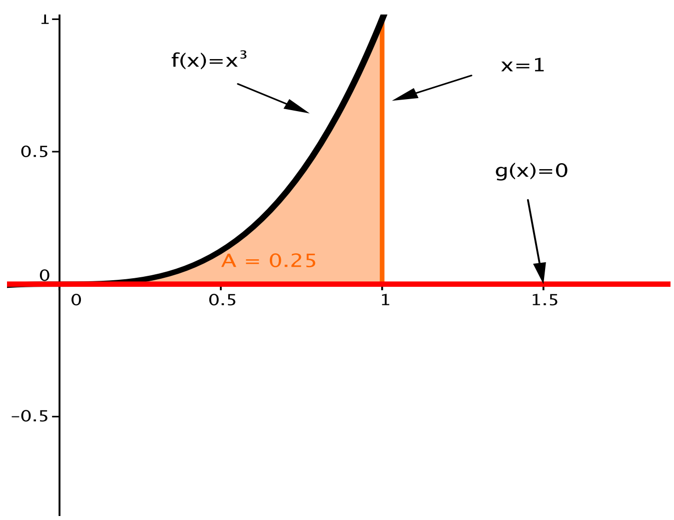
$$x = 0, x = \pi$$

c) Resolviendo la integral entre los límites encontrados tenemos:

$$A = \int_0^{\pi} sen\ x\ dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = \big(-(-1)\big) - (-1)) = 2u^2$$

3.

a) El lugar geométrico que representan estas funciones se muestra a continuación:



b) Las intersecciones entre las funciones son:

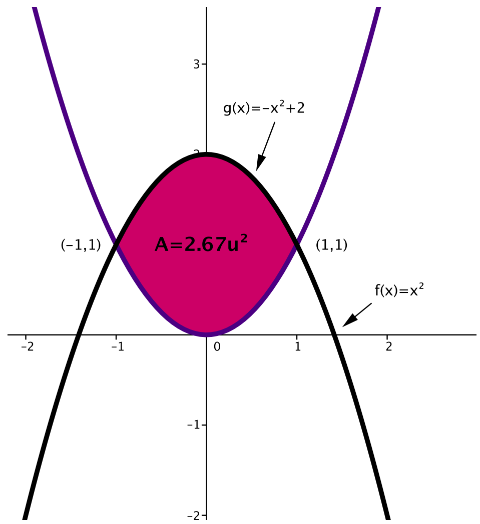
(0,0) y (1,1) por lo tanto tenemos los límites de integración .

c) Calculando la integral:

$$A = \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 0.25u^2$$

4.

a) El lugar geométrico que representan dichas funciones es:



b) Los puntos de intersección se muestran, y van desde -1 hasta 1 en las x.

c) Integrando:

$$A = \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]dx$$

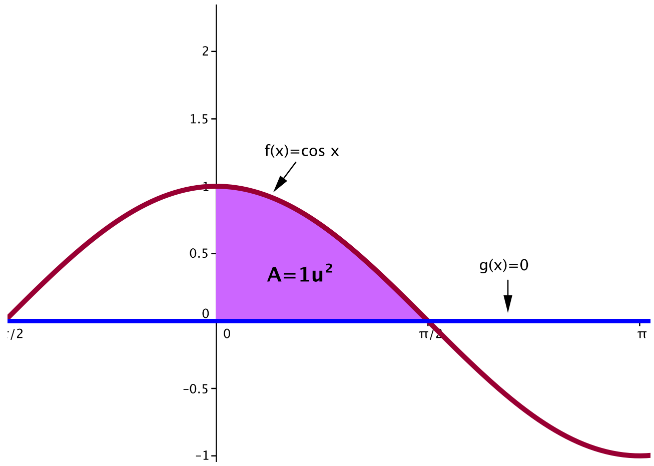
$$A = \int_{-1}^{1} [(-x^2 + 2) - (x^2)]dx$$

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx = -\frac{2}{3}x^3 + 2x\,\Big|_{-1}^{1} = \left(-\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right)$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2.66u^2$$

5.

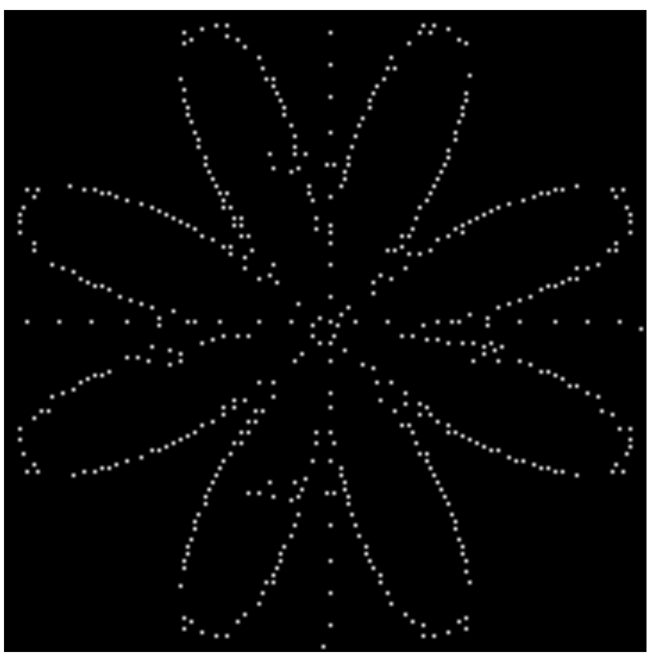
a) Graficando las funciones tenemos:



b) Las funciones se intersectan en (0,0) y $(\frac{\pi}{2},0)$

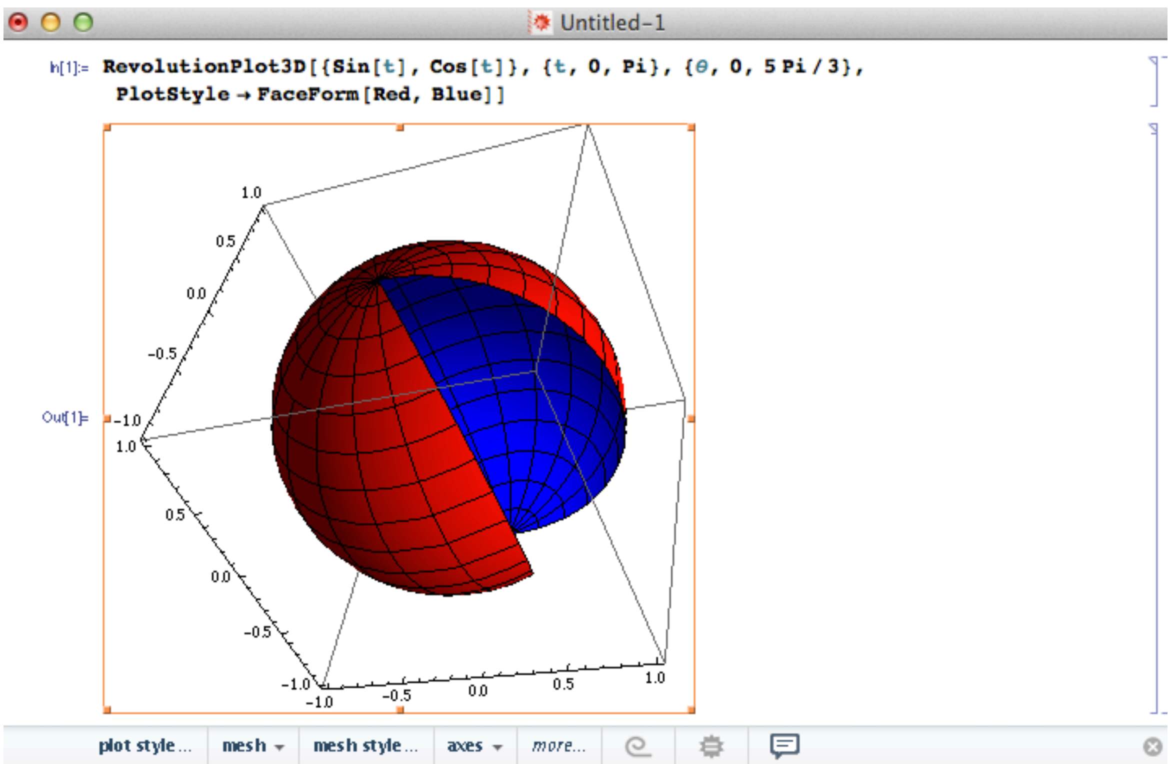
c) Calculando la integral definida tenemos:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}}=sen\,\frac{\pi}{2}-sen\,0=1-0=1u^2$$



4.8. Conclusión

El cálculo de áreas tiene aplicaciones variadas, por ejemplo la integral de la velocidad respecto al tiempo nos da la distancia recorrida en dicho intervalo de tiempo, al calcular el área bajo una curva en una distribución de una variable aleatoria nos da la probabilidad, también nos permite el cálculo de longitudes de curvas, de volúmenes de cuerpos de revolución. En este capítulo se hizo una introducción para dichos cálculos, invitamos al lector a profundizar más en el tema y a utilizar paquetería que lo apoye en las representaciones gráficas tales como geogebra y mathematica.



Referencias

[1] Quiroga Ramiro (2008) Introducción al Cálculo II. España: Delta, Publicaciones Universitarias
[2] Stewart James (2007) Cálculo diferencial e integral. México: Thomson Learning