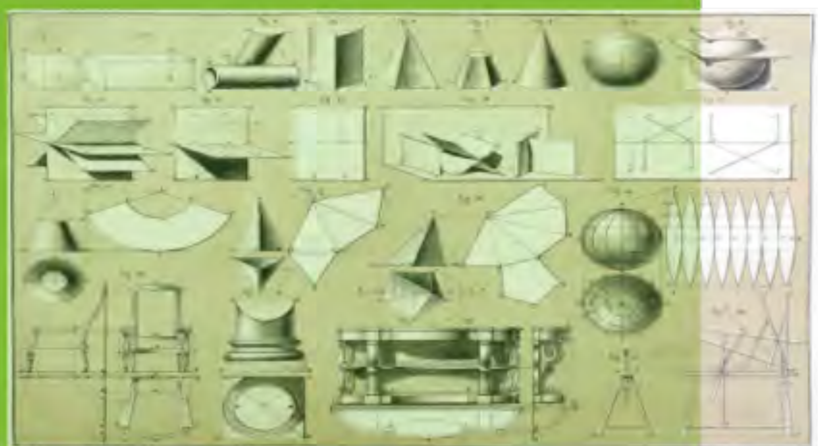
Representación simbólica y angular del entorno



J. Jesús Carreño García
Silvia Ochoa Hernández

Semestre 2

conalep
Michoacán

PRESENTA:

Representación simbólica y angular del entorno

Autores

J. Jesús Carreño García
Silvia Ochoa Hernández

Coordinadores:
Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Ing. Eduardo Ochoa Hernández
Lic. Filho Enrique Borjas García

Título original de la obra:

Registro: **CONALEP-LIB-SIM-01A**

Programa: Profesor escritor, objetos de aprendizaje. Desarrollo de la competencia de la producción de información literaria y lectura.

Carreño García, J. Jesús.; *et al.* (2014) **Representación simbólica y angular del entorno.** México: CONALEP/CIE

xiii, 251 p.; carta

Registro: **CONALEP-LIB-SIM-01A** Documentos en línea

Editores:
Ing. Eduardo Ochoa Hernández
Lic. Filho Enrique Borjas García

Editorial: CONALEP Michoacán
Col. Chapultepec norte, Gral. Nicolás Bravo No. 144, Morelia, Michoacán.
http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/

Registro: **CONALEP-LIB-SIM-01A**
ISBN: En trámite
Impreso en______________________
Impreso en México –Printed in Mexico

DIRECTORIO

Lic. Fausto Vallejo Figueroa
Gobernador Constitucional del Estado de Michoacán

Lic. J. Jesús Sierra Arias
Secretario de Educación

Mtro. Álvaro Estrada Maldonado
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Ing. Fernando Castillo Ávila
Director de Educación Media Superior

M.A. Candita Victoria Gil Jiménez
Directora General del Sistema CONALEP

M.C. Víctor Manuel Lagunas Ramírez
Titular de la Oficina de Servicios Federales en Apoyo a la Educación en Michoacán

Dr. Salvador Jara Guerrero
Rector de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

L.E. Rogelio René Hernández Téllez
Director de Planeación, Programación y Presupuesto

Lic. Faradeh Velasco Rauda
Directora de Promoción y Vinculación

Ing. Mónica Leticia Zamudio Godínez
Directora de Informática

Lic. Víctor Manuel Gómez Delgado
Director de Servicios Administrativos

Ing. Genaro González Sánchez
Secretario General del SUTACONALEPMICH

Tec. Juan Pineda Calderón
Secretario General del SUTCONALEP

Prefacio

Estimado estudiante:

Las palabras que sombrean estas páginas, no son simple ciencia dentro del diálogo como depósitos de datos e información, ni son cuestión de vocabulario o listado de definiciones, son la experiencia generosa de la comunidad CONALEP Michoacán, esa realidad oculta pero necesaria que respaldó las tareas de investigación y composición literaria del discurso que integra este libro. Nos referimos a los profesores, administrativos y sindicatos que hoy convergen en el umbral de la existencia para apoyar a un grupo de profesores escritores que han creado en el sereno libre, arquitecturas de conocimientos como un viaje de aprendizaje que exigirá del estudiante, lo mejor de sí mismo ante la presencia luminosa del texto, ese que pretende enseñarle a caminar con la frente en alto.

Las ideas asociadas en este libro, equivalen a la imaginación lograda en el acto de escribir desde otros textos, al decodificarlas el estudiante, se le exige más vocabulario para enriquecer su habla y hacer ver a sus ojos más allá de la estrechez de la información que inunda a la sociedad moderna. El libro no presenta la superficie de la existencia como cruda observación, procura que su dificultad incite a perforar la realidad hasta reflexiones que renueven los modos inciertos de dar significado al mundo. La ciencia, la literatura y la tecnología no las percibimos como mundos incomunicables, los valores son explícitos caminos que las vinculan entorno al currículo del técnico bachiller. Tienen estos textos organización de premisas, técnicas, justificaciones, normas, criterios y como Usted se dará cuenta, también mostrará nuestros límites para seguir haciendo puentes entre las incesantes creaciones de nuevas fronteras de la investigación científica y técnica. Se pretende que estos libros sean contenido y no un libro de prácticas escolares, sean la herramienta de complementación para enriquecer los discursos de la enseñanza-aprendizaje.

Los profesores de CONALEP enfrentan a diario las carencias visibles de medios tecnológicos, materiales y documentales, sería fácil usar las palabras para señalar hasta el cansancio nuestras apremias, pero se ha decidido mejor producir libros como testimonios vivos y luminosos que renueven el rol social de la academia colegiada sensible a la condición social, susceptible de ir perfeccionándose con la acumulación de esta experiencia literaria, para servir de mejor manera al enriquecimiento de las competencias necesarias para realizar el sueño de éxito de tantos jóvenes Michoacanos.

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Mensaje a la comunidad académica

Se vive una época difícil para los libros, no son momentos de lectura tampoco, sin embargo, esto no debe ser un motivo para no producir literatura para educar mentes creativas, nuestra generación considera importante que sea la literatura la que emocione a realizar los grandes sueños de nuestros jóvenes. Si el libro escrito por mexicanos para mexicanos se perdiera, la conciencia de nuestra sociedad quedaría en orfandad, congelada de sentido y seriamos habitantes de un mundo siempre detrás de mascaras en rituales de simulación. Este argumento presente en *El laberinto de la soledad*, Octavio Paz nos dice al hombre moderno, seamos universales sin dejar de ser diferentes. El efecto de producir literatura en una sociedad, es como dice Steven Pinker, es "sacar los ángeles que llevamos dentro", es lo mejor de nuestro ser como oferta de conocimiento y valores al servicio de nuestra sociedad. El efecto Malinche que prefiere libros de traducción, ocasiona la perdida de identidad y crear la cultura de producir experiencias de conocimiento como herencia educativa para nuestros estudiantes. Los Aztecas en su derrota se sintieron abandonados por sus dioses, en el presente si cancelásemos que la voz de nuestro profesores que hablaran desde libros a las nuevas generaciones, es algo equivalente, al negar que las ideas en su crecimiento son una respuesta sociolingüística económica y democrática de identidad de una nación. Michoacán es un proyecto histórico de libertad, sin ignorar la realidad del malestar de la cultura actual, CONALEP desarrolla un programa académico para impulsar su capacidad y compromiso social para generar las ideas curriculares para enriquecer la sensibilidad y la imaginación científica, técnica y humanista de su comunidad.

Producir literatura curricular en CONALEP Michoacán, es asumir su personalidad moral, como dueña de una conciencia movida para una educación con la pasión de razones y expresiones culturales con la competencia para transformar positivamente la realidad. Aun cuando esta realidad adversa, de actitudes de autoridades renuentes a transformar la realidad educativa y de presiones económicas, hoy entregamos esta literatura escrita con profesores de CONALEP, máxime reconocimiento, porque trabajaron de manera altruista durante extenuantes y largas jornadas de trabajo; la comunidad CONALEP y la sociedad Michoacana toda, reciban esta obra como testimonio de la grandeza de este histórico Michoacán.

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

Enfoque por competencias

Este texto de apoyo es una introducción a las representaciones simbólicas del entorno que sirven como antecedentes y base para la geometría analítica y el cálculo de variables. Tales representaciones simbólicas incluyen desigualdades, funciones exponenciales, geometría y trigonometría.

Características del libro de apoyo para el estudiante:

Cada capítulo cuenta con una introducción, que incluye contexto histórico y aplicaciones, definiciones, ejemplos de ejercicios resueltos, datos curiosos, preguntas reto, problemario, autoevaluación, soluciones y conclusiones, que sin ser finales, más bien son una invitación al análisis de otras posibilidades y aplicaciones de este tema.

En su versión digital, las referencias son accesibles siguiendo la liga en la red.

En toda obra literaria se afirma una realidad independiente de la lengua y del estilo: la escritura considerada como la relación que establece el escritor con la sociedad, el lenguaje literario transformado por su destino social. Esta tercera dimensión de la forma tiene una historia que sigue paso a paso el desgarramiento de la conciencia: de la escritura transparente de los clásicos a la cada vez más perturbadora del siglo XIX, para llegar a la escritura neutra de nuestros días.

Roland Barthes, *El grado cero de la escritura*

Palabra escrita bajo luz

En un mundo cada día con más canales de comunicación, la palabra escrita camina por los muros que denuncian el drama catastrófico sobre el medio ambiente y sobre el control de la vida humana; el combustible de esta desesperanza produce apatía profunda por tener contacto con el mundo de la literatura, esta distorsión moral parece reflejarse entre los que no quieren sentir responsabilidad ni pensar, dejando a otros su indiferencia al ser prisioneros de ligeras razones y tirria justificada en la empresa de sobrevivir.

Especular en un mundo sin libros es exponer al mundo a la ausencia de pensamiento, creatividad y esperanza. Los libros, dedicados a ser arrebatados por el lector, están expuestos a ser poseídos por las bibliotecas vacías y que con el tiempo opacan sus páginas y empolvan la cubierta de lo que alguna vez fue un objeto de inspiración. Resulta difícil transcribir este instante de un peligroso espacio donde ya muy pocas palabras sobreviven dentro de la reflexión y las pocas sobrevivientes han abandonado la unión del sentido de vivir y el sentido del pensar científico. Escribir pasa de ser un placer repentino a ser una necesidad inminente, es el puente entre lo conocido y lo inexplorado. Es un reto de hoy en día inmiscuirse en lo que una vez fue lo cercano y dejar de lado la novedad tecnológica para poder a través de las barreras que nos ciegan abrir fronteras literarias. Es un proyecto que conspira a favor de la libertad creativa, de la felicidad lúcida cargada de libros embajadores de nuevas realidades.

Entre un mar de razones dentro del libro escolar en crisis, se percibe la ausencia de esa narrativa del cuerpo del texto, misma que alimenta al lector de una experiencia de conocimiento, su ausencia, es más un mal glosario, de un mal armado viaje literario científico o de ficción. En esos viajes de libros en crisis, nos cansamos de mirar espacios vacíos de talento, emociones y sensibilidad para responder a un entorno adverso; son muchas veces un triunfalismo de autoevaluación y una falsa puerta de una real competencia para actuar en la realidad. Uno no solo vive, escucha la voz interior de un libro, uno es fundado en el manejo del lenguaje que explica, crea, aplica o expande los límites del horizonte de nuestro imaginario actuante en lo real. No vivimos leyendo texto, sino leyendo el paisaje de una realidad, el libro toma la voz del progreso en una siempre reconstrucción lingüística del sujeto que explica, transforma y comunica desde los desafíos de su generación.

La información cruda que tanto rellena los libros grises, oscuros y papel pintado; requiere ser dotada de conceptos que permitan alimentar al sujeto que toma decisiones, que explora con paso lento, que mira por dentro del lenguaje y aplica la información que cobra sentido en la siempre expansión de las ideas.

Escribir un libro es siempre reconstruir un discurso, sus lectores en este discurso son el puente a un texto profundo que demanda esfuerzo en la reconstrucción de los procesos de razonamiento y el entretejido del discurso que involucra información de fondo, esas fuentes que justifican su análisis y poseen significado privilegiado para la comprensión de una realidad.

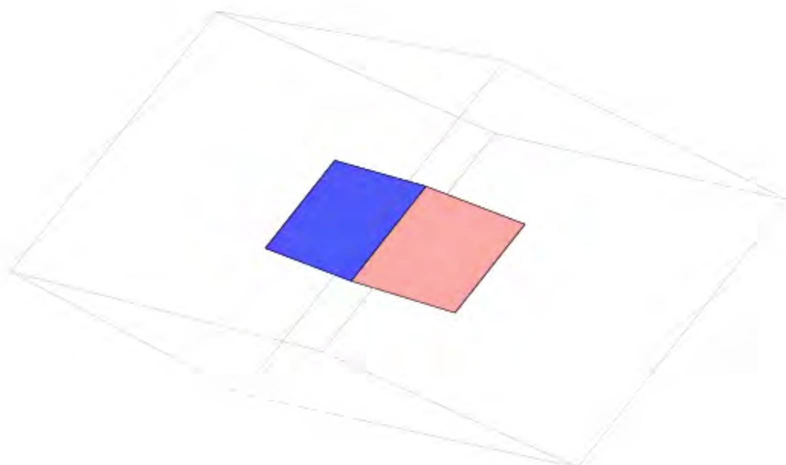
El lector puede hacer uso del libro con su propia experiencia y con su autoayuda, al precisar términos y conceptos para prolongar su horizonte de interpretación, el libro se hace cargo de la memoria de un plan de estudios, es un discurso de diferentes capas de argumentos, tras este texto se anuncia un orden de experiencia propuesto para su aprendizaje. El libro está conformado para jóvenes con memoria sin dolor para nuevas palabras, aborda el olvido como una deficiencia de interactividad entre el discurso argumentativo y los referentes conceptuales. Esto es el reto en la producción de los libros CONALEP. La propuesta es una reconstrucción de una semántica más profunda, como el principal reto del estudiante técnico bachiller del siglo XXI.

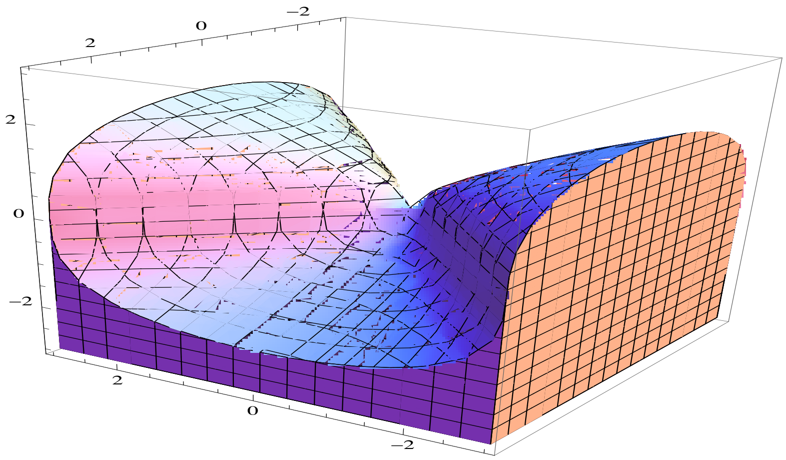
Libro,…
todos te miran,
nosotros te vemos bajo la piel.

SUMARIO

Capítulo 4

Capítulo 1: Desigualdades





Representación de la desigualdad $x^2+y^3-z^2 \leq 0$. Gráfica hecha en mathematica 9

En arquitectura y diseño se aplica el uso y solución de desigualdades

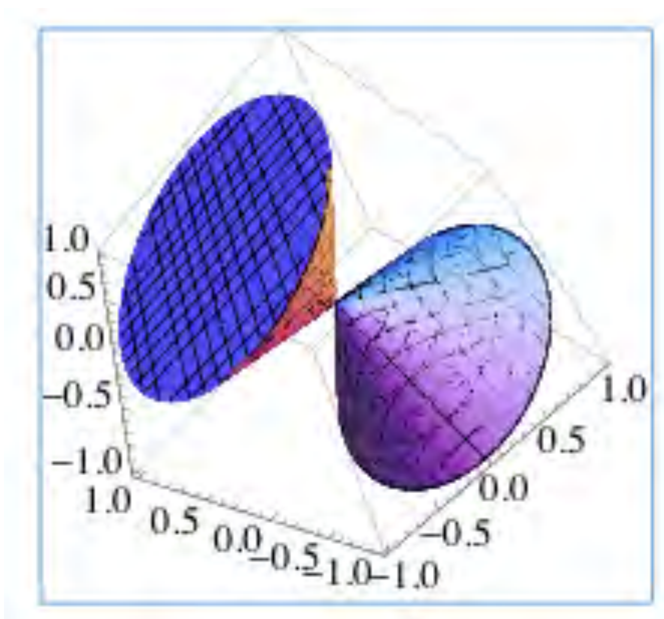
Ciudad de Pátzcuaro Michoacán

Introducción

En 1631, Walter Warner, matemático y filósofo publicó en El Álgebra de Thomas Harriot[1], el artículo *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes resolvendas*, donde por primera vez aparecen los signos de desigualdades que actualmente son usados.

La geometría analítica hace uso de desigualdades en la resolución de dominio y contradominio de funciones y la desigualdad triangular.

Algunas desigualdades en el sentido propio de una inecuación pueden ser relacionadas con el desarrollo del Cálculo, como por ejemplo, máximos y mínimos.[2]



Gráfica hecha con mathematica 9

Pregunta reto:

Si disminuyo en diez la tercera parte de un número, me queda uno mayor que 50. ¿Qué puedes decir del número? 1.

Desigualdades

Se define en la matemática a la desigualdad como la relación que existe entre dos valores cuando estos son distintos. En nuestro caso los valores que se usan son elementos del conjunto ordenado de los reales, para casos de comparación. Al conjunto de todas las soluciones se le llama el conjunto solución y constituyen la resolución de la desigualdad.

Los signos de desigualdad son:

Signos de desigualdad	Se lee
$>$	mayor que
$<$	menor que
$\geq$	mayor que o igual a
$\leq$	menor que o igual a

Definición de intervalo:

Es un conjunto de números reales ($\mathbb{R}$) con la propiedad de que cualquier número que se encuentra entre dos números en el conjunto está también incluido en el conjunto. La solución de una desigualdad puede representarse en notación gráfica, notación de intervalo y notación de conjuntos por comprensión.

Curiosidades matemáticas: un matemático de nombre Edward Kasner notó que no existía un término para designar el número 10^{100}, entonces creó el neologismo GOO-GOL, palabra que según Kasner inventó su sobrino de 9 años de edad, ¿te parece conocido el término con el del buscador Google?

Nomenclatura

Tipo de intervalos	Notación de intervalos	Notación gráfica	Notación por comprensión
Abierto	(a, b)	 a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Semi-abierto por la derecha	[a, b)	 a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Semi-abierto por la izquierda	(a, b]	 a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Cerrado	[a, b]	 a b	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Nota: (a, a), [a, a), y (a, a] representan el conjunto vacío, [a, a] denota el conjunto {a}. Cuando $a > b$, se asume que todas las notaciones representan el conjunto vacío. Estándar internacional ISO-31-11.

Como se puede ver en las desigualdades, el conjunto de soluciones son de tamaño infinito. Por ejemplo, considere la desigualdad $x > 3$. Tiene un conjunto infinito de soluciones debido a que cualquier número real mayor que 3, tales como 3.0001, 4, 5.2, 6, $\frac{15}{2}$, 14.5, 100 000, verifican la desigualdad.

Los símbolos -∞ y ∞ representan infinito negativo y positivo e indican que los números continúan indefinidamente en la dirección negativa o positiva. El infinito siempre lleva un paréntesis en la notación de intervalos. Estos símbolos no deben ser confundidos con números reales.

Como se puede ver en los siguientes intervalos:

$(a, +\infty) = \{ x \mid x > a\}$
$(-\infty, b) = \{ x \mid x < b\}$
$[a, +\infty) = \{ x \mid x \geq a\}$
$(-\infty, b] = \{ x \mid x \leq b\}$
$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

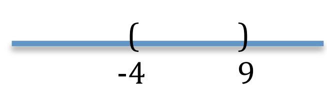
En los intervalos (a, b), [a, b], [a, b) y (a, b], los números a y b son los puntos extremos del intervalo.

Ejemplos:

a) El intervalo abierto (-4,9)

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x < 9\}$
Esto indica que x toma cualquier valor entre -4 y 9, excepto estos valores llamados extremos.

Su representación gráfica :



b) El intervalo semi-abierto por la derecha [3,12)

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 12\}$

Esto indica que x toma cualquier valor mayor o igual a 3 y menor que 12.

Su representación gráfica:

c) El intervalo semi-abierto por la izquierda (0,6]

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 6\}$

Esto indica que x toma cualquier valor mayor que 0 y menor o igual que 6.

Su representación gráfica :

d) El intervalo cerrado [-2,5]

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 5\}$

Esto indica que x toma cualquier valor mayor o igual que -2 y menor o igual que 5.

Su representación gráfica :

e) La figura siguiente ilustra el intervalo $(10,\infty)$:

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / \ 10 < \ x \}$

Esto indica que x toma cualquier valor mayor que 10 .

f) La figura siguiente ilustra el intervalo $(-\infty, -7)$:

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / \ -7 > \ x \}$

Esto indica que x toma cualquier valor menor que -7.

g) La figura siguiente ilustra el intervalo $[3,\infty)$:

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / \ 3 \leq \ x \}$

Esto indica que x toma cualquier valor mayor o igual a 3.

h) La figura siguiente ilustra el intervalo $(-\infty, 6]$:

En notación de conjuntos por comprensión $\{x \in \mathbb{R} / \ 6 \geq x\}$

Esto indica que x toma cualquier valor menor o igual a 6.

i) La figura siguiente ilustra el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$:

Teoremas de las desigualdades

Si a, b, c y d son números reales y a<b entonces

Teorema	Observaciones
1. Si a<b, entonces a+c <b +c	
2. Si a<b, entonces a - c<b - c	
3. Si a<b, entonces ac<bc	Si c>0, la desigualdad no cambia
4. Si a<b, entonces ac>bc	Si c<0, la desigualdad sí cambia
5. Si a<b, entonces a/c < b/c	Si c>0, la desigualdad no cambia
6. Si a<b, entonces a/c > b/c	Si c<0, la desigualdad sí cambia
7. Si a<b y b<c, entonces a<c	
8. Si a<b y c<d, entonces a+c < b+d	
9. Si 0<a<b y 0<c<d, entonces ac< bd	

Ejemplos:

1. $3<5$; $3+2<5+2$, esto es $5<7$.

   Si a ambos miembros de una desigualdad se suma una misma cantidad la desigualdad se mantiene.

2. $-10<-4$; $-10-5<-4-5$, esto es $-15<-9$.

   Si a ambos miembros de una desigualdad se resta la misma cantidad la desigualdad se mantiene.

3. $6<12$; $(6)(7)<(12)(7)$, esto es $42<84$.

   Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número positivo la desigualdad se mantiene.

4. $8\mathbf{<}20$; $(8)(-1)\mathbf{>}(20)(-1)$, esto es $-8\mathbf{>}-21$.

   Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo la desigualdad se **invierte**.

5. $20<40$; $\frac{20}{4}<\frac{40}{4}$, esto es $5<10$.

   Si ambos miembros de una desigualdad se dividen por un número positivo, la desigualdad se mantiene.

6. $20\mathbf{<}40$; $\frac{20}{-4}>\frac{40}{-4}$, esto es $-5\mathbf{>}-10$.

   Si ambos miembros de una desigualdad se dividen por un número negativo la desigualdad se **invierte**.

7. $4<7$ y $7<10$, entonces $4<10$.

   Si una primera cantidad es menor que una segunda y esa segunda menor que una tercera, entonces la primera es menor que la tercera.

8. 3<7 y 5<12; entonces 3+5<7+12, eso es 8<19.

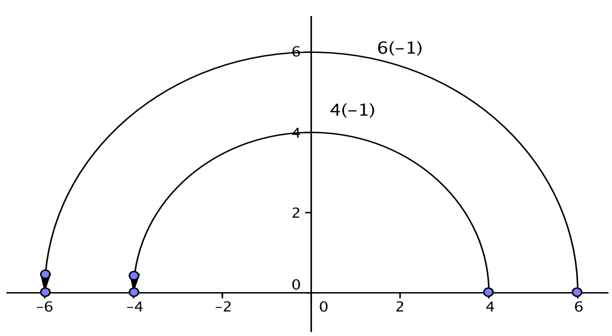
   Si una primera cantidad es menor que una segunda, y una tercera es menor que una cuarta, entonces la suma de la primera con la tercera es menor que la segunda con la cuarta.

9. 0<3<5 y 0<6<11, entonces (3)(6)<(5)(11) esto es 18<55.

   Si un primer número positivo es menor que un segundo, y un tercer número positivo es menor que un cuarto, el producto del primero por el tercero, es menor que el producto del segundo por el cuarto.

Solución de desigualdades

Para resolver desigualdades puede separarse la variable en expresiones que incluyan el uso de $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. Deberá tomarse en cuenta que al multiplicar o dividir una desigualdad por un número negativo afecta la veracidad de la desigualdad. Véase el caso $4 < 6$. Esta expresión señala la posición relativa entre estos dos números. Es decir, 4 está a la izquierda de 6. Cuando se multiplica cada número por (-1), cada número se convierte en su contrario. Esto invierte la posición relativa de los dos números y (-6) queda a la izquierda de (-4).

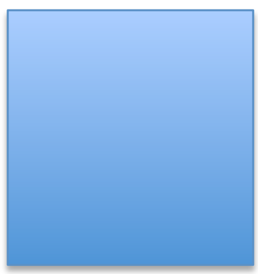


Lo mismo ocurre para la división. De manera que cada vez que ambos lados de una desigualdad son multiplicados o divididos por un número negativo, inviértase la desigualdad para mantener su veracidad.

De manera que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir los miembros de una desigualdad por cualquier número siempre y cuando no se divida por cero.

Podemos comprobar sustituyendo algunos valores del conjunto solución y verificando que satisfacen la igualdad.

Preguntas reto:



$5\text{cm} < L < 7\text{cm}$

El lado de un cuadrado L está entre 5 y 7 cm, ¿cómo es su perímetro?

Para practicar:

Completa la tercera columna de la tabla siguiente, escribiendo el resultado que se obtiene de aplicar la operación marcada en la segunda columna a los dos miembros de la desigualdad de la primera columna:

$8x - 2 > 7$	Sumar 2	
$x + 3 < 11$	Restar 3	
$\frac{x}{8} \leq 4$	Multiplicar por 8	
$-5x < 10$	Multiplicar por -2	
$5x \geq 50$	Dividir entre 5	
$-7x \leq 49$	Dividir entre -7	

¿Identificaste lo que ocurre al aplicar cada una de las operaciones indicadas? Discútelo con tus compañeros.

1.1. Desigualdades absolutas

Desigualdad incondicional o absoluta[3,4]: es la que se cumple o verifica para cualquier valor que se le asigne a las incógnitas que intervienen en ella.

Por ejemplo:

$$x^2 + 1 > x$$

si x toma el valor arbitrario 5, $(5)^2+1>5$

$$26>5$$

esto se verifica para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$.

Otro ejemplo de una desigualdad absoluta es:

$$(x + y)^2 > 0$$

verifiquemos asignando los valores arbitrarios x =-6 y y=4,

$$(-6 + 4)^2 > 0$$

$$(-2)^2 > 0$$
$$4 > 0$$

observe que si el resultado de sumar x con y es positivo el valor de esa cantidad al cuadrado será un número mayor que cero, y si dicha suma es negativa su cuadrado es un número positivo mayor que cero, por lo que cumple con cualquier valor que se les asigne a las variables x y y para $x, y \neq 0$.

Un tercer ejemplo es 10>5.

Para practicar:

Escribe tres desigualdades absolutas y verifica que se cumplan con un valor arbitrario

1.____

2.____

3.____

1.2. Desigualdades condicionales o inecuaciones de dos y de tres partes

Desigualdad condicional o inecuación [1,2,5] : es la que solo se verifica o cumple para ciertos valores de las incógnitas que involucra.

Por ejemplo: $6x > 12$

$x > 2$ dividiendo entre 6 ambos miembros

la desigualdad se cumple para cualquier valor de $x > 2$

$\{x \in \mathbb{R}/x > 2\}$ o bien $x \in (2,\infty)$.

Las inecuaciones pueden tener una o más incógnitas, si contiene varias se llaman inecuaciones indeterminadas, las hay de primer grado o lineales , esto es cuando el exponente más grande de la incógnita es uno, y cuadráticas con una variable donde el mayor exponente de la incógnita es dos[6] . También pueden tener dos términos o tres términos llamados partes.

Existen también los sistemas de inecuaciones lineales que son usados en programación lineal , en este texto solo se analizarán desigualdades con 2 o tres partes y de primer y segundo grado con una incógnita.

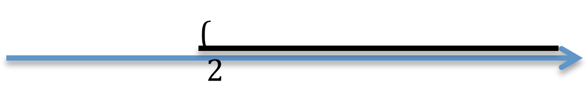
Ejemplo de inecuación con una incógnita y dos partes:

a) $7x > 14$

$7x > 14$ dividiendo ambos miembros entre 7

$x > 2$

$\{x \in \mathbb{R}/x > 2\}$



$x \in (2,\infty)$

b) Ejemplo de inecuación con una incógnita y tres partes:

$$4<8x \leq 16$$

$\frac{1}{2} < x < 2$ dividiendo los tres miembros entre 8

$\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \; < x \leq 2\}$

$x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right]$

c) Ejemplo de inecuación con dos partes y operaciones indicadas:

$2(x+1)<5(x+3)+2$

$2x + 2 < 5x + 15 + 2$ realizando las operaciones indicadas

$2x - 5x < 15 + 2 - 2$ reuniendo términos semejantes

$-3x < 15$ reduciendo

$x > \frac{15}{-3}$ dividiendo entre -3 ambos miembros

$x > -5$

Los valores que satisfacen la inecuación son $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > -5\}$

Es decir, $x \in (-5, \infty)$

Para resolver: indica en forma de intervalo la solución	Solución:
$21x > 63$	
$10 \leq 5x < 20$	
$4(x - 1) < 2(x + 3) - 2$	

1.3. Desigualdades de primer grado sin variables en el denominador

Las desigualdades de los ejemplos anteriores son desigualdades sin variables en el denominador, recordemos que son de primer grado porque el exponente mayor de la incógnita es uno[5].

Es importante abordar el estudio de desigualdades con valor absoluto ya que es base para tus estudios en el cálculo infinitesimal, por ello comenzaremos por definir el valor absoluto de un número.

El símbolo $|x|$, se lee el valor absoluto de x , y se define[7] como

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Debemos tener cuidado en interpretar la definición, ya que $-x$ representa el simétrico de un número negativo, que es un número positivo, por lo tanto podemos concluir que el valor absoluto de un número es siempre el mismo número con signo positivo.

Ejemplos:

$$|5| = 5 \qquad |-5| = 5 \qquad |-3-4| = |-7| = 7 \quad |0| = 0$$

La interpretación geométrica[8] del valor absoluto es la distancia desde el cero hasta el número no importando el sentido.

Es importante antes de comenzar a resolver desigualdades con valor absoluto conocer las propiedades mediante los siguientes teoremas[9]:

Teorema 1: $|x| \leq a \quad si\ y\ solo\ si - a \leq x \leq a, donde\ a \geq 0$

Teorema 2: $|x|\ \geq a \quad si\ y\ solo\ si\ \ x \geq a\ \ o\ bien\ x \leq -a,\ \ donde\ a > 0.$

Ejemplos:

a) Encontrar el conjunto solución que satisface la desigualdad

$|x - 10| < 6.$

Observe que es un corolario del teorema 1, así que cambiaremos en dicho teorema el signo $\leq por\ <$.

Entonces por teorema 1 , $|x - 10| < 6$ se cumple si y solo si

-6 < x -10 < 6 es una desigualdad de 3 partes

$4 < x < 16$ sumando 10 en los tres miembros

esto es $x \in (4,16)$, o $\{x \in \mathbb{R} / \ 4<x<16\}$

su representación gráfica:

b)

Encontrar el conjunto solución que satisface la desigualdad

$|6x + 4| \geq 10.$

Por teorema 2 se cumple si y solo si

$6x+4 \geq 10$ o bien $6x + 4 \leq -10$

$6x \geq 6$ $\qquad$ $6x \leq -14$

$x \geq 1$ $\qquad$ $x \leq -\frac{7}{3}$

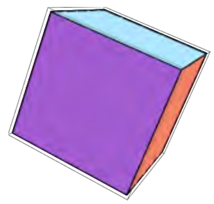
Observemos la representación gráfica:

Así el conjunto solución son las $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, \infty)$

o $\{x \in \mathbb{R} / \ -7/3 > x > 1\}$

Curiosidades matemáticas:

Sabías que el cubo de Rubik tiene 43,252,003,274,489,856,000 = 4.3 x 10^{19} combinaciones posibles.



Gráfica hecha con mathematica 9

Para practicar:

Indica la solución en forma de intervalos y gráfica de las siguientes desigualdades con valor absoluto

$\lvert x+5\rvert \leq 12$		
$\lvert 3x+6\rvert > 18$		

1.4. Desigualdades de segundo grado sin variables en el denominador

En tu curso anterior: Manejo de Espacios y Cantidades, trabajaste con ecuaciones de segundo grado[10], ahora trabajaremos con desigualdades de segundo grado que son aquellas que se pueden expresar de la forma $ax^2+bx+c > 0$ o < 0 donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplos:

a) Encontrar el conjunto solución de la siguiente desigualdad de segundo grado, indicando la solución en notación de intervalo y representándola de forma gráfica

$$x^2 - x - 30 \geq 0$$

$(x+5)(x-6) \geq 0$ factorizando la ecuación

Analicemos dicho producto, tenemos dos factores que dan por resultado un número mayor o igual a cero, esto puede suceder de dos maneras:

Caso 1: $(x+5) \geq 0$ y $(x-6) \geq 0$, los dos factores son positivos o cero

$x \geq -5 \qquad x \geq 6$

se cumple simultáneamente para $x \in [6, \infty)$

Caso 2: $(x+5) \leq 0$ y $(x-6) \leq 0$, los dos factores son negativos o cero

$x \leq -5$ y $x \leq 6$

se cumple simultáneamente para $x \in (-\infty, -5]$

Si combinamos las soluciones de los dos casos tenemos

La solución son las $x \in (-\infty, -5] \cup [6, \infty)$

Para practicar:

¿Cuál es el conjunto solución de la desigualdad de segundo grado $x^2 - 5x - 14 \geq 0$?

b) Encontrar el conjunto solución de la desigualdad de segundo grado

$$x^2+2x-24<0$$

Factorizando $(x+6)(x-4)<0$

Observemos que tenemos dos factores cuyo producto es negativo, tendremos dos casos:

Caso 1: el primer factor es positivo y el segundo negativo para que dicho producto sea negativo es decir <0

$(x+6)>0$ y $(x-4)<0$

$x>-6$ y $x<4$

busquemos la región donde se cumplen ambas condiciones
con ayuda de la representación gráfica

$x \in (-6,4)$

Caso 2: el primer factor es negativo y el segundo positivo, así el producto puede ser negativo, esto es <0

$(x+6)<0$ y $(x-4)>0$

$x<-6$ y $x>4$

busquemos la región donde se cumplen ambas condiciones
con ayuda de la representación gráfica:

Esta no puede ser una solución ya que no existe ningún valor de x que sea menor que -6 y al mismo tiempo cumpla que sea mayor que 4.

Por lo tanto la solución es $x \in (-6,4)$
Y su representación gráfica es

Para practicar:

¿Cuál es el conjunto solución de la desigualdad de segundo grado

$x^2+5x+6 \leq 0$?

1.5. Desigualdades con variable en el denominador

Como su nombre lo indica, son desigualdades que tienen en su denominador a la incógnita, veamos los siguientes ejemplos:

a) $\frac{8}{x} > 4$

este tipo de desigualdad donde el denominador tiene a la variable debemos considerar los casos posibles, observe que el denominador no puede ser cero, y que debe ser un número positivo para que al dividir 8 entre dicho número dé un resultado positivo, ya que la desigualdad dice >4.

Por lo tanto tenemos una condición que debemos considerar x>0, por lo que al multiplicar ambos miembros por x la desigualdad no se altera

8>4 x dividimos ambos miembros entre 4

2> x

Tenemos dos condiciones, $x > 0$ y $x < 2$ observemos en la representación gráfica:

Los valores de x que satisfacen simultáneamente las dos condiciones son las x∈ (0,2), esto es {x ∈ $\mathbb{R}$ / $0 < x < 2$}.

b) Encontrar el conjunto solución de

$$\frac{x}{x-1} < 5$$

Consideremos dos casos:

Caso 1: el denominador es positivo

es decir $x - 1 > 0$

$x > 1$

dado que es positivo podemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad original por $x - 1$ y la desigualdad no cambia.

$$\frac{x}{x-1} < 5$$

$$x < 5(x-1)$$

$$x < 5x - 5$$

$$5 < 4x$$

$$\frac{5}{4} < x$$

Por una parte tenemos que $x > 1$ y por otra que $x > \frac{5}{4}$

Los valores que cumplen con ser mayores que 1 y mayores que $\frac{5}{4}$ son los mayores que $\frac{5}{4}$

Por lo tanto la solución en el caso 1 son las $x \in (\frac{5}{4}, \infty)$

Caso 2: el denominador es negativo,

es decir $x - 1 < 0$

$x < 1$

Dado que estamos considerando que el denominador es negativo al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x - 1$, la desigualdad se invierte

$$\frac{x}{x-1} < 5$$

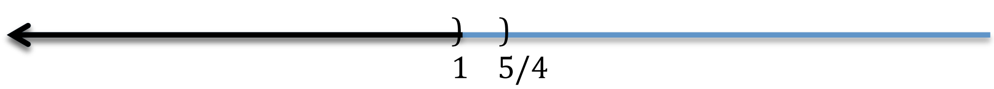
$$x > 5(x-1)$$

$$x > 5x - 5$$

$$5 > 4x$$

$$\frac{5}{4} > x$$

Por una parte tenemos que $x < 1$ y por otra que $x < \frac{5}{4}$



Los valores que cumplen con ser menores que 1 y menores que $\frac{5}{4}$ son los menores que 1.

Por lo tanto la solución en el caso 2 son las $x \in (-\infty, 1)$

combinando las dos soluciones de los casos 1 y 2 , en forma gráfica se puede ilustrar:

El conjunto solución son $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{4}, \infty)$.

O bien $\{x \in \mathbb{R}$ / 1 > x < 5/4} en este caso también podemos indicar la solución como el conjunto de los números reales menos el intervalo abierto de 1 a 5/4, esto es {x ∈ ℝ / x ={ℝ}-(1,5/4)}.

Preguntas reto:

¿Cuál es el conjunto solución de la desigualdad $x^2 - 1 > 0$?

Para resolver:

Indica el conjunto solución de forma gráfica y en notación de intervalos, de las desigualdades:

$\frac{12}{x} \geq 2$		
$\frac{x}{2x+1} \leq 2$		

1.6. Problemario

1. El perímetro de un cuadrado de lado x es mayor que 24cm. ¿Cuánto debe medir su lado?

2. Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado:

El número de autos en un estacionamiento es menor que 432.

3. Aplica los teoremas de desigualdades .

Coloca el signo de desigualdad que corresponda para que la desigualdad se verifique si $0<x \leq 4$

a) x +2_____6

b) x -8 ______-4

4. Encuentra el conjunto solución de $\frac{5-2x}{6} < 2x+1$

5. Encuentra el conjunto solución de 12 x +8≥ 200

6. Encuentra el conjunto solución de 5 x + 3 < 54

7. Encuentra el conjunto solución de $\frac{x}{6} \leq 48$

8. Encuentra el conjunto solución de -5 x >50

9. Encuentra el conjunto solución de 12(3x-4)$\geq 10(5x-1)-12$

10. Encuentra el conjunto solución de $|5x+17| \leq 25$

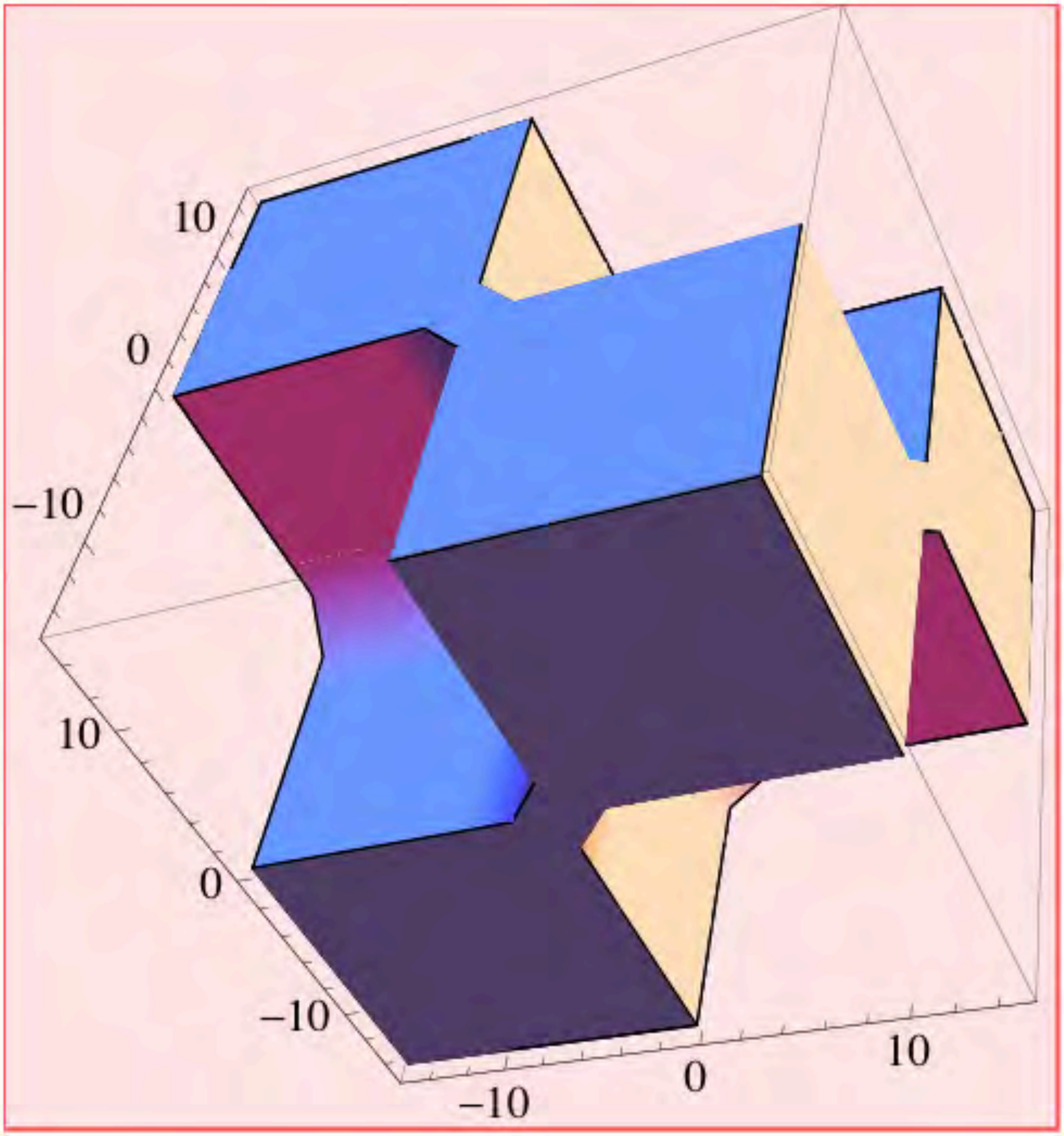
11. Encuentra el conjunto solución de $|20x-5| \geq 38$

12. Encuentra el conjunto solución de x^2-13 x +40>0

13. Encuentra el conjunto solución de x^2+6 x +5≤ 0

14. Encuentra el conjunto solución de $\frac{5x}{2x+3} < 15$

15. Encuentra el conjunto solución de $\frac{20}{x} \leq -5$

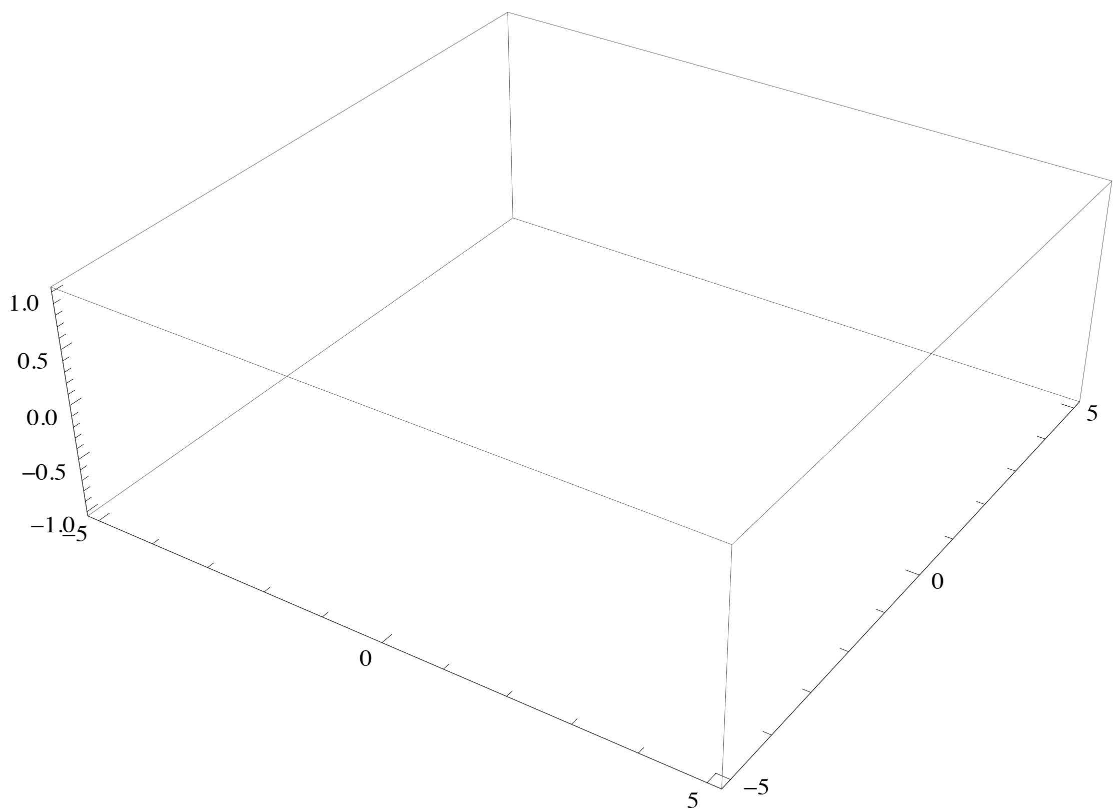


Desigualdad xyz<1. Gráfica hecha con Mathematica 9

1.7. Autoevaluación

Resolver las siguientes desigualdades:

1. $4x - 23 < 8x + 31$
2. $15x + 1 \leq 12x + 2$
3. $40 - 10x > 8 - 16x$
4. $6(2x + 5) < 10x$
5. $\frac{5x+1}{7} < 9 - 10x$
6. $30x + 46 > 26x + 44$
7. $\frac{3-10x}{15} < 9 + 6x$
8. $x^2 - x - 12 < 0$
9. $x^2 - 100 < 0$
10. $x^2 + 22x + 120 \geq 0$

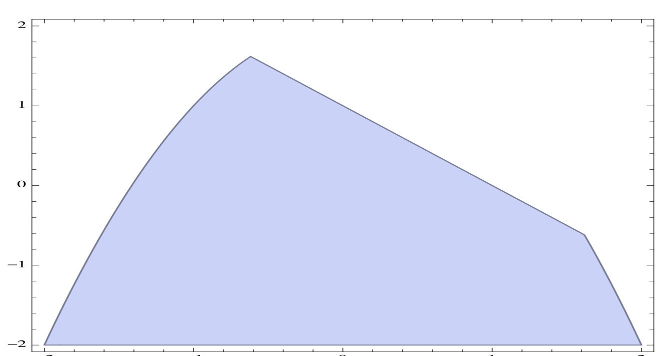


Desigualdad x-y>0. Gráfica hecha con mathematica 9.

1.8. Soluciones del problemario

1. x >6cm
2. x < 432
3. a) x +2≤6

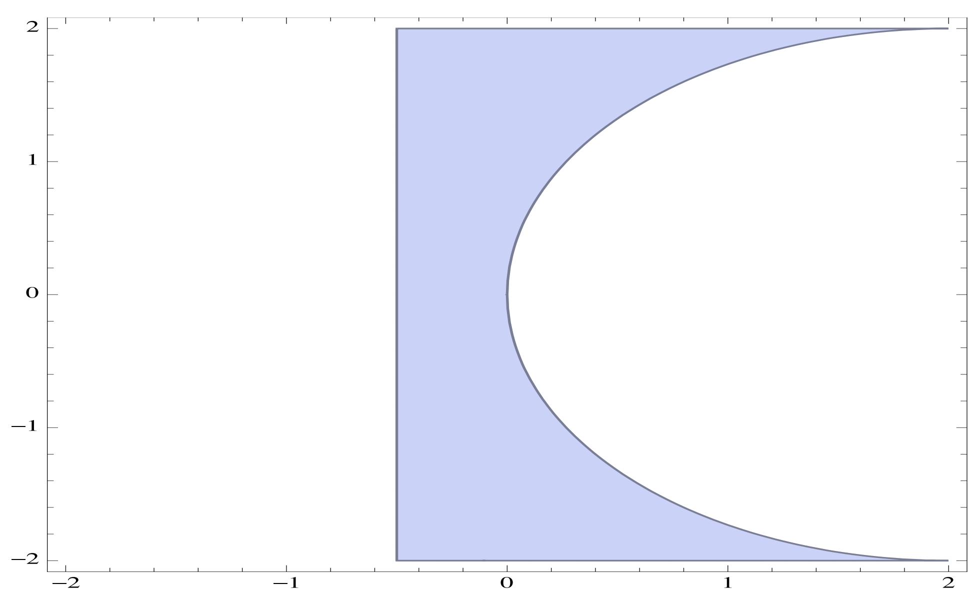
   b) x -8 ≤-4
4. $x \geq -\frac{1}{4}$
5. $x \geq 16$
6. x $<\frac{51}{5}$
7. $x \leq 288$
8. x >-10
9. $x \leq -\frac{13}{7}$
10. $-\frac{42}{5} \leq x \leq \frac{8}{5}$
11. $x \in \left(-\infty, -\frac{33}{20}\right] \cup [\frac{43}{20}, \infty)$
12. $x \in (-\infty, 5) \cup (8, \infty)$
13. $-5 \leq x \leq -1$
14. $x \in \left(-\infty, -\frac{9}{5}\right) \cup (-\frac{3}{2}, \infty)$
15. $-4 \leq x < 0$



Desigualdad $x^2+y<2$ y x+y<1. Gráfica hecha con mathematica 9

1.9. Soluciones de la autoevaluación

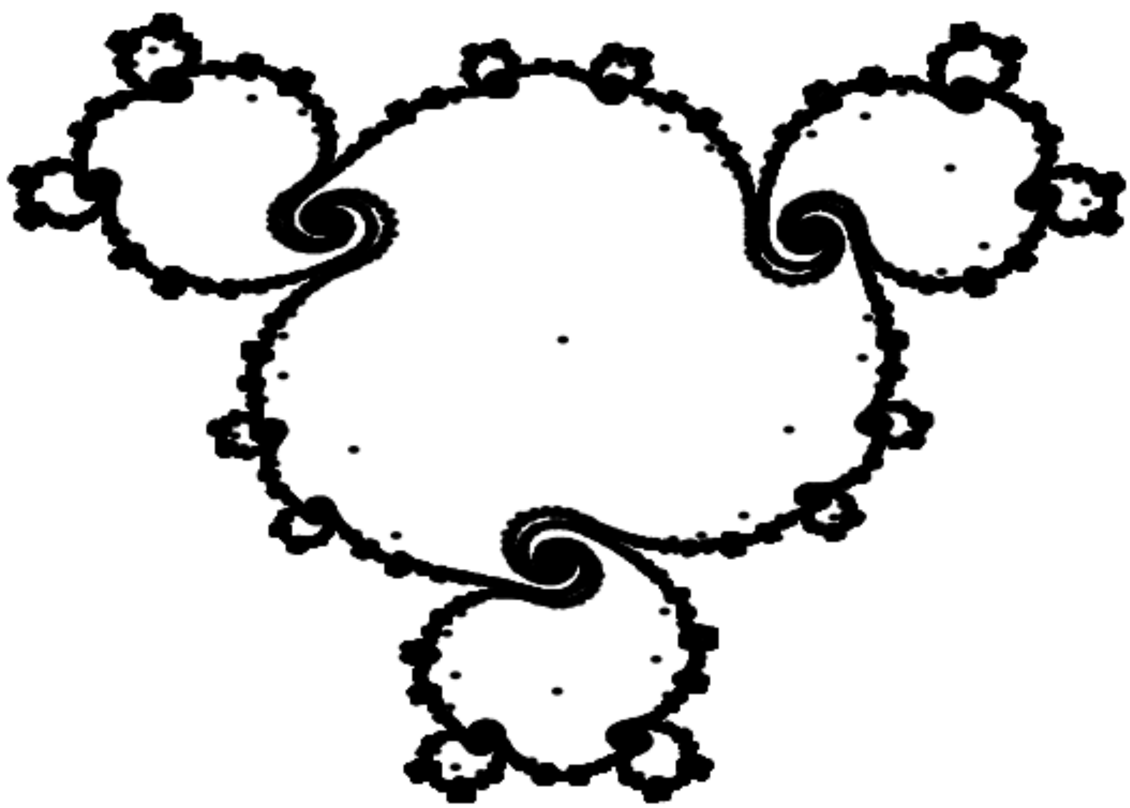
1. $x > -\frac{27}{2}$
2. $x \leq \frac{1}{3}$
3. $x > -\frac{16}{3}$
4. x < -15
5. $x < \frac{62}{75}$
6. $x > -\frac{1}{2}$
7. $x > -\frac{33}{25}$
8. -3< x <4
9. -10 < x <10
10. $x \in (-\infty, -12] \cup [-10, \infty)$



Desigualdad $1 < \left|\frac{(x+iy)+2}{(x+iy)-1}\right|$ <2. Gráfica hecha con mathematica 9.

1.10. Conclusiones

En este capítulo vimos cómo resolver desigualdades con y sin denominador, con dos y tres partes, con valor absoluto, de primer grado y segundo grado, con variable en el denominador, hacemos hincapié en cumplir con los teoremas mencionados dando énfasis en la multiplicación y división por un número negativo. Este fue un pequeño acercamiento al fascinante mundo de las desigualdades y sus aplicaciones, en tu próximo curso de matemáticas las aplicarás para encontrar el dominio y contradominio de funciones, te invitamos a seguir los links de las referencias, ya que encontrarás más información.



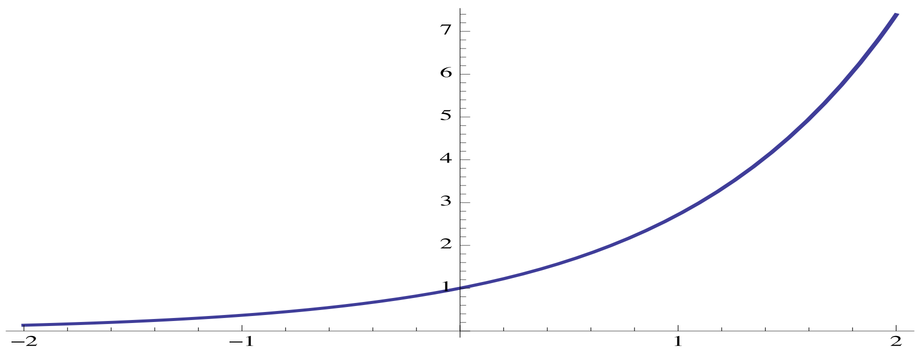
Gráfica hecha con mathematica 9

Referencias:

[1] Tanner, R.C. H. On the role of equality and inequality in the history of mathematics. *The British Journal for the History of Science*. **1**, (1962).
[2] Bosch, M. Inequalities and equations: history and didactcs. *Proceedings of CERME*. **4** 652-662 (2005)

[3] Anfossi Agustín, Meyer Flores(2006)Álgebra. México: Progreso, S.A. de C.V.
[4] Mejía Francisco, Álvarez Rafael et al. (2005) Matemáticas previas al cálculo. Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín
[5] Flores Marco A., Fautsch Eugenio (1981) Temas Selectos de Matemáticas. México: Editorial Progreso, S.A. de C.V.
[6] Del Pozo Eva Mª, Díaz Zuleyka et al. (2007)Matemáticas Fundamentales para Estudios Universitarios. España: Delta publicaciones.
[7] Leithold Louis (1981)El Cálculo con Geometría Analítica. México: Harla, .S.A. de C.V.
[8] Miller Charles, Hornsby John et al. (2006)Matemática: razonamiento y aplicaciones. México: Pearson.
[9] Apostol Tom (2006)Mathematical Analysis. España: Reverté, S.A.
[10] Corona Rafael, González Francisco(2011) Manejo de Espacios y Cantidades. México: CONALEPMICH.

Capítulo 2: Función exponencial y logarítmica



Función exponencial $f(x)=e^x$. Gráfica hecha en mathematica 9.

Introducción

Función es una relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno del segundo conjunto[1, 2, 3], estos conjuntos se llaman dominio y contradominio. El gran matemático Euler[4], llamado por Laplace como "El maestro de todos nosotros[5]", es quien introduce el término en el vocabulario matemático, pareciéndose al concepto de fórmula, término relacionado con variables y constantes. La definición moderna se le atribuye al alemán Peter Dirichlet[6] quien introduce el concepto de función como una expresión, una regla o ley que define una relación entre una variable (variable independiente) y otra variable (variable dependiente).

Si observamos a nuestro alrededor, y tratamos de definir lo que ocurre, podríamos hacerlo en términos matemáticos, tal vez quedar definido mediante los siguientes axiomas[7]:

a) Todo evento en la naturaleza puede ser representado mediante ecuaciones o funciones y viceversa, toda ecuación o función puede ser la representación de algún evento en la naturaleza.

b) Todo evento en la naturaleza tiene patrones.

Desde la antigüedad el hombre ha intentado buscar estas relaciones; comenzó colocando marcas en relación con el número de años o de animales que poseía. Herón de Alejandría en el siglo II D.C. encontró una fórmula que calcula el área de un triángulo en función de sus lados. Tratando de no malinterpretar a Platón[8] podría decirse que llegó a la conclusión de que los números son el lenguaje para expresar las ideas, tal vez aventurándonos pero sin poder afirmarlo podríamos pensar que ya tenían una noción de lo que es una función, de la misma forma se podría afirmar que los mayas, egipcios[9] o chinos entre otras civilizaciones ya manejaban el concepto o solamente uno cercano a él, el de relación.

Galileo[10] al relacionar el movimiento de los cuerpos celestes en función de su posición, pretendió relacionar los conceptos, formulando leyes, así dio un gran paso hacia la concepción de lo que es una función. Poco después de Galileo, Descartes muestra la relación que existe entre una gráfica y una ecuación y viceversa. Sin embargo, la definición de función se ha ido modificando con el tiempo, desde la construcción de tablas de raíces y potencias hasta como se emplea ahora. Se considera que Leibniz introduce este término, seguido por Bernoulli[11] quien en septiembre de 1694 escribe una carta en respuesta a Leibniz; lo que describe como función en el sentido más actual:

… una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes[12]…

En 1748 el concepto de función tomó énfasis gracias a la publicación "Introduction in analysin infinitorum" de Euler donde define función como:

"…una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como cualquiera que lo sea de dicha cantidad y de números o cantidades constantes[13]…"

Así se da el crédito a Euler de precisar el concepto de función y del estudio de funciones elementales. Sin embargo, es Peter Dirichlet quien introduce el concepto moderno de función.

En este capítulo se presentan dos funciones de gran importancia, la función exponencial y la función logarítmica, que son empleadas para modelar observaciones, por ejemplo la memoria humana[14], virus de computadora, análisis de datos: meteorología, datación por carbono, puntajes del C.I., ciencia forense e interés compuesto. De forma exponencial crecen las bacterias en un cultivo, entre muchas otras aplicaciones.

2.1. Función exponencial

Definición:

Se llama función exponencial a la función f definida por

$$f(x) = b^x \qquad \text{b} > 0, \qquad \text{b} \neq 1$$

donde b es llamada base y el exponente $x \in \mathbb{R}$.

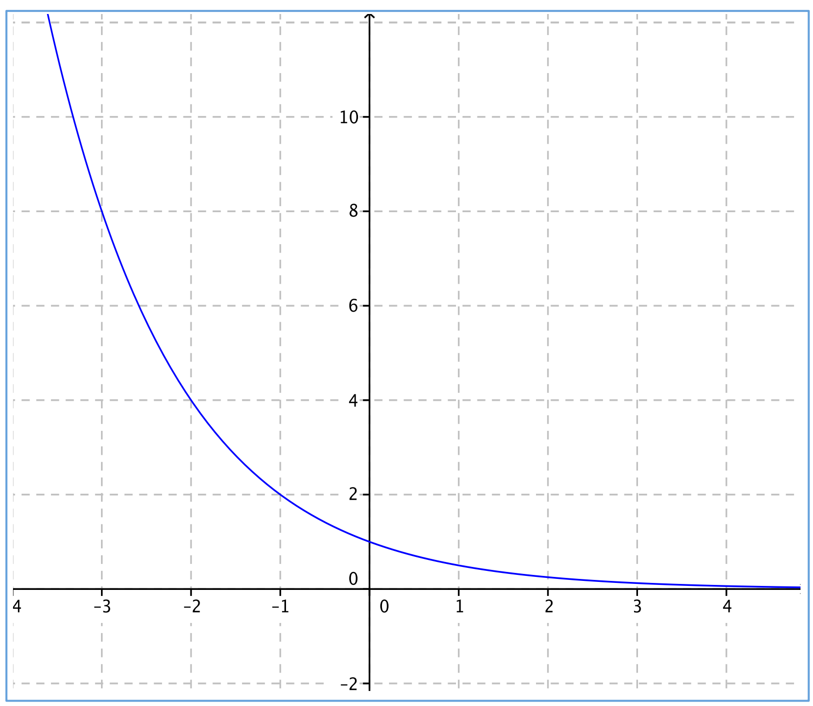
Ejemplos de este tipo de funciones son:

$$f(x) = 5^x \,, f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \,, f(t) = 3e^{-i\omega t}$$

Usaremos una base 0<b<1 y daremos diferentes valores arbitrarios a la variable independiente x, para obtener una tabla de valores y para trazar el lugar geométrico de la función.

En este caso $b = \frac{1}{2}$ y $-3 \leq x \leq 3$.

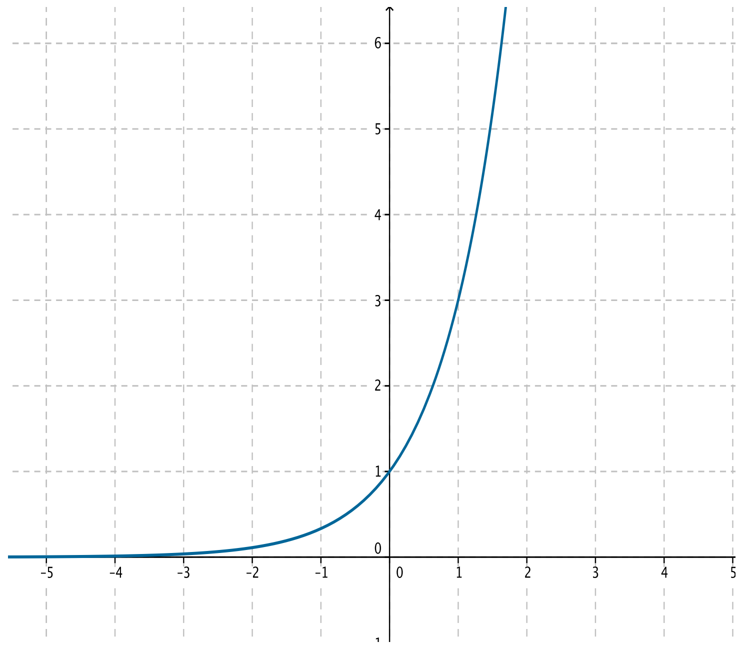
x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Esta gráfica muestra que la función es decreciente

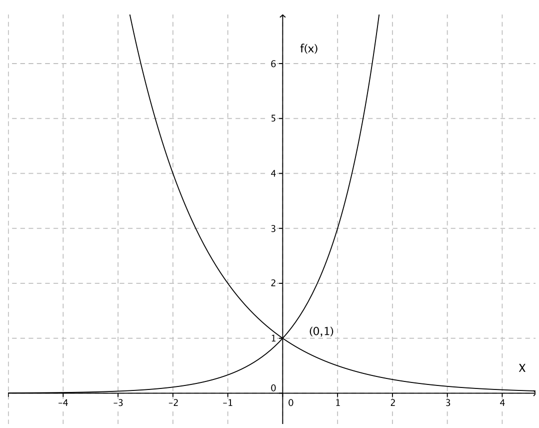
En la gráfica de la función $f(x) = (3)^x$ observe que b>1, análoga a la función anterior damos valores arbitrarios a la variable independiente x para obtener su gráfica.

x	$f(x) = (3)^x$
-3	0.03703
-2	0.11111
-1	0.33333
0	1
1	3
2	9
3	27



Esta gráfica muestra que la función es creciente

En la siguiente gráfica se muestran las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$, observe que ambas pasan por el punto (0,1).



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y \quad f(x) = (3)^x$$

Ejemplo:

México cuenta con una población de 117 millones de habitantes, se calcula que aumentará al triple en 20 años. Suponga que tenemos la misma tasa de crecimiento, ¿qué población tendremos en 10 años, a partir de ahora?

Usaremos el modelo de crecimiento del tiempo de triplicación

$$P = P_0 3^{t/c}$$

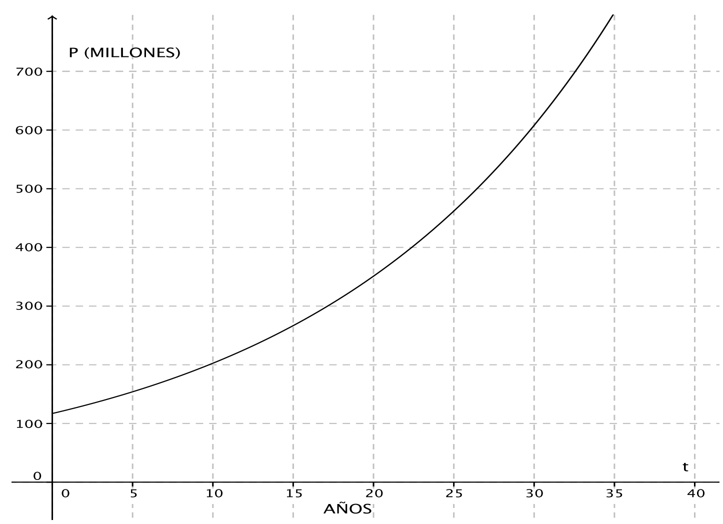
P_0 es la población inicial de 117 millones

t es el tiempo al que deseamos hacer el cálculo t=10 años

c estimación aproximada de crecimiento

Sustituyendo:

$$P = 117\left(3^{10/20}\right) \approx 202.64 \, millones\ de\ habitantes$$



Propiedades[15] de $f(x) = b^x,\ b > 0,\ b \neq 1$.

a) Si 0<b<1, los valores de la variable x aumentan y los de $f(x)$ disminuyen, por lo tanto la función es decreciente.

b) Si b>1, cuando aumentan los valores de la variable x aumentan los de $f(x)$, por lo tanto la función es creciente.

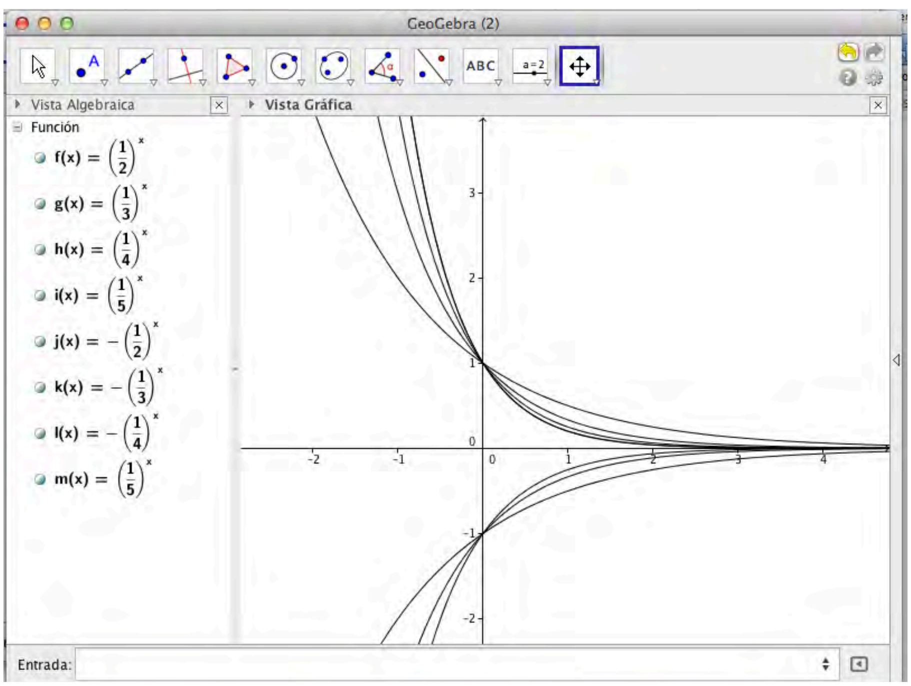
c) En ambas gráficas cuando el exponente es cero $f(0) = 1$, es decir cortan al eje de las ordenadas en uno, su coordenada es (0,1).

d) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales positivos, esto es $x \in (-\infty, \infty)$, note que en ambos casos la gráfica se acerca al eje de las abscisas X pero no lo toca, en este caso el eje X es una *asíntota*.

e) Las gráficas son continuas, es decir, no dan saltos o tienen huecos.

f) Para cada valor de x existe uno y solo uno de $f(x)$, estas funciones se llaman uno a uno lo que implica que tienen una función inversa llamada función logarítmica la cual analizaremos más adelante.

g) El rango o contradominio son las $y \in (0, \infty)$.



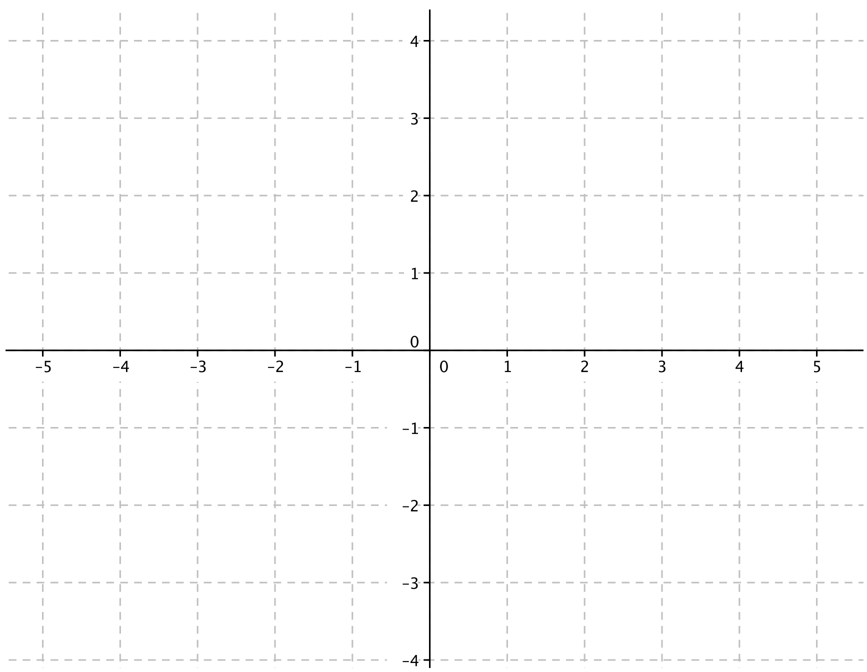
Funciones exponenciales graficadas con el programa Geogebra

Para practicar:

Grafica las siguientes funciones exponenciales para los valores indicados en la tabla, en la calculadora científica la tecla con el símbolo ^ o y^x te ayudará para elevar a las potencias que se indican:

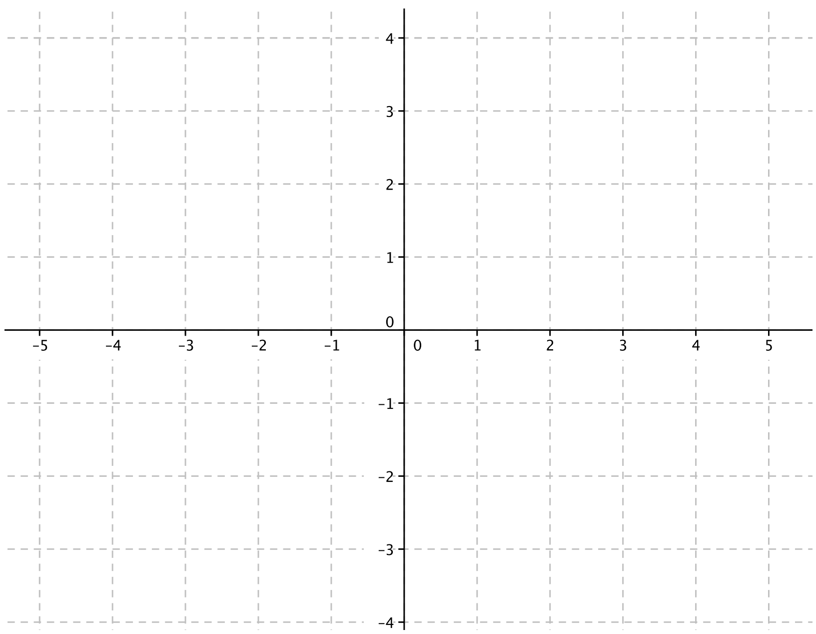
a) $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = 2^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



2.1.1. Dominio y contradominio

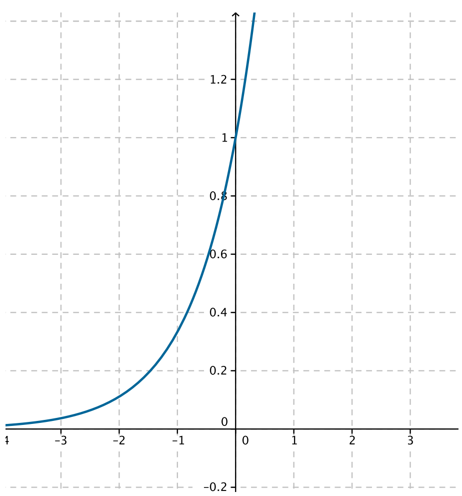
Respecto de las gráficas anteriores podemos concluir que la función exponencial $f(x) = b^x$ para b>0, b$\neq$ 1 cumple con:

a) El *dominio,* es decir, los valores que puede tomar la variable independiente x, es el conjunto de los números reales, esto es $x \in (-\infty, \infty)$

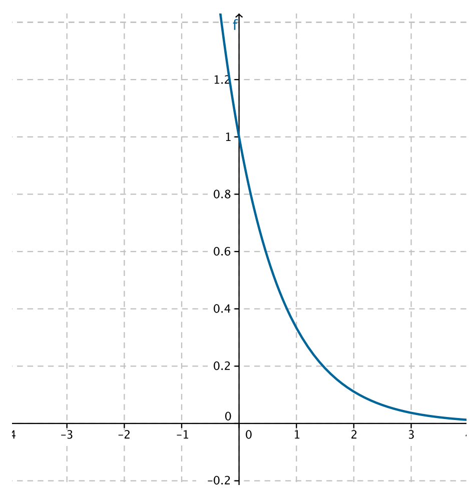
b) El *rango* o *contradomio* es el intervalo abierto $y \in (0, \infty)$

2.1.2. Representación gráfica

Al comparar las gráficas del tipo $f(x) = b^x$, se puede observar que ambas pasan por (0,1). Cuando 0<b<1 la gráfica es decreciente, y cuando b>1 la gráfica es creciente.



$f(x) = b^x \; para \; b > 1$

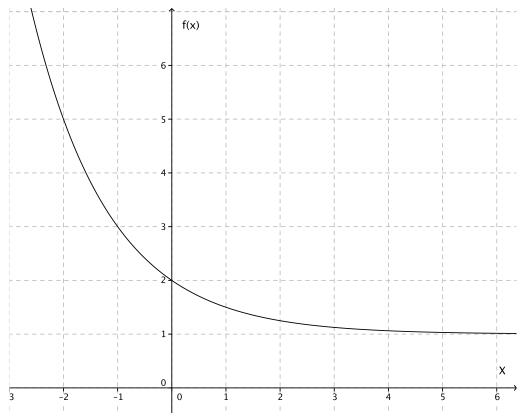


$f(x) = b^x para \;\; 0 < b < 1$

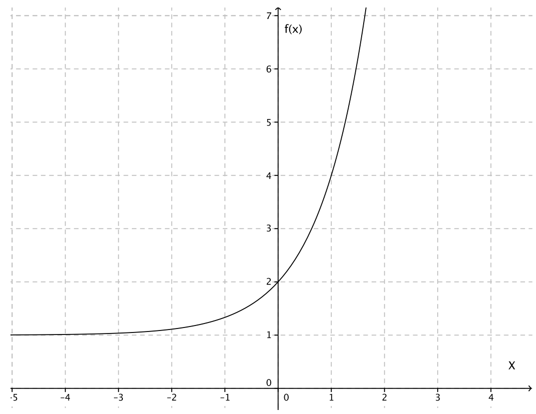
Surge la pregunta, ¿qué pasará con las gráficas de las funciones exponenciales si sumamos o restamos una constante?

Para responder a la pregunta observemos las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$ y sumemos uno a cada una para observar qué sucede.

Con $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ y $f(x) = (3)^x + 1$ grafica construyendo una tabla de valores, observa que si x=0, f(x)=2.

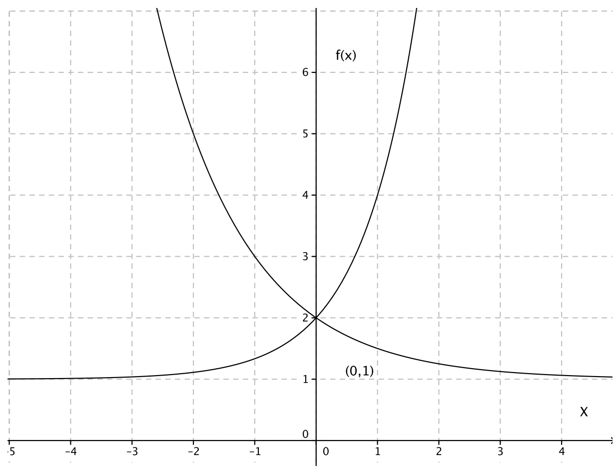


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

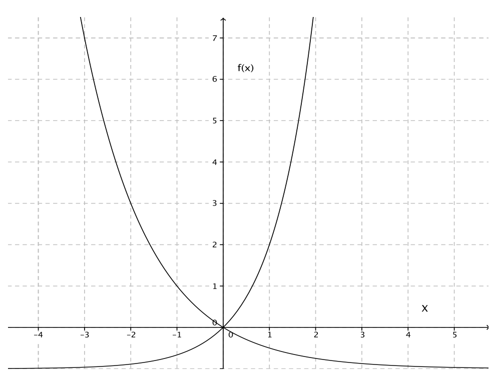


$f(x) = (3)^x{+}1$

Las gráficas se desplazaron hacia arriba una unidad respecto del punto (0,1).



Si restamos una constante a las funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$ tenemos $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ y $f(x) = (3)^x - 1$, note que las gráficas bajan una unidad respecto a (0,1).



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ y $f(x) = (3)^x - 1$

Concluimos que al sumar o restar, las gráficas suben o bajan respectivamente las unidades agregadas o restadas.

En matemáticas hay un número irracional[16] muy importante que puede ser base de la función exponencial, dicho número es e que tiene un valor aproximado:

$$e \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999 5 \ldots$$

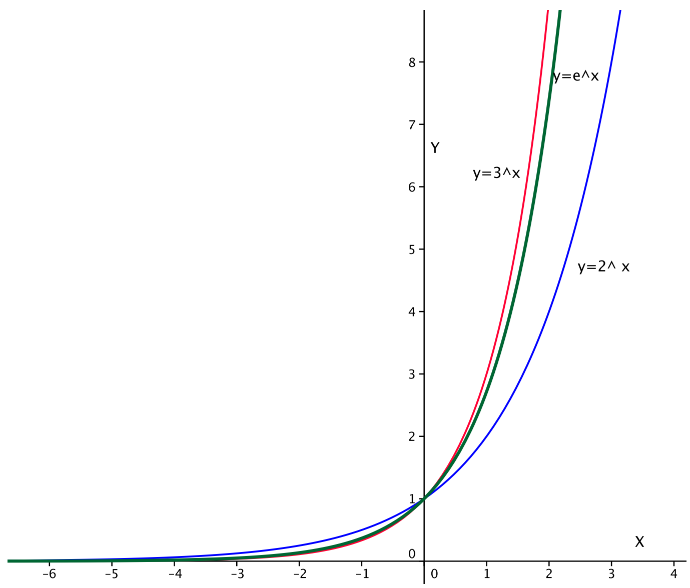
este número es llamado número de Euler o constante de Napier.

La función exponencial con base e recibe el nombre de función exponencial natural[16] :

$$f(x) = e^x \text{ o bien } y = e^x$$

es común que se le llame simplemente *función exponencial*.

Dado que la base es 2<e<3 la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas de f(x)=2^X y f(x)=3^X como se observa en la siguiente gráfica:



Función natural $y = e^x$ comparada con $y = 2^x$ y $y = 3^x$

Para practicar:

utiliza tu calculadora científica para calcular los valores siguientes:

a) e^2 b) $e^{\frac{1}{2}}$ c) e^{-3} d) e^{-2} e) $3e^4$ f) $\frac{1}{5}e^{\frac{-1}{5}}$

En la calculadora científica generalmente la tecla e^x se encuentra arriba de la tecla ln, si está en otro color deberás presionar primero SHIFT o segunda función seguida del exponente al que deseas elevar la base e.

Las funciones exponenciales cumplen con las leyes de los exponentes[17]

LEY	EJEMPLO
$a^m a^n = a^{m+n}$	$e^3 e^5 = e^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{e^5}{e^3} = e^{5-3} = e^2$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(e^5)^3 = e^{15}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(ae)^3 = a^3 e^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{e}\right)^5 = \frac{3^5}{e^5}$

Para practicar:

Utiliza las leyes de los exponentes para calcular el resultado de las siguientes operaciones y después tu calculadora científica para comprobar tus resultados.

a) $3^2\ (e^2)^3=$ b) $e^5e^4=$ c) $24^2e^4e^6=$

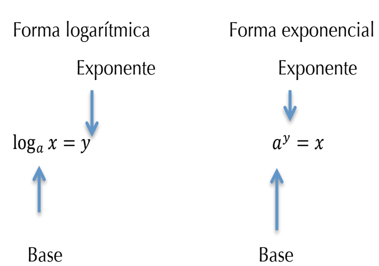
> Curiosidades matemáticas:
> El símbolo de raíz se empezó a usar en 1525 y apareció por primera vez en un libro alemán de álgebra.

2.2. Propiedades de los logaritmos

Sea $a>0$ con $a\neq 1$. La función logarítmica con base a, cuya notación es log_a se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para obtener x, $\log_a x$ se lee logaritmo base a de x.



Forma Logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$	$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$
$\log_4 64 = 3$	$4^3 = 64$
$\log_a b = x$	$a^x = b$
$\log_5 125 = 3$	$5^3 = 125$

Para practicar:

Pasa de la forma logarítmica a la exponencial y viceversa, utiliza calculadora científica para elevar.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_5 1 = 0$	
	$5^3 = 125$
$\log_5 3125 = 5$	
	$5^4 = 625$
$\log_5 125 = 3$	
	$5^6 =15625$
$\log_5 25 = 2$	

Cuando la base usada en los logaritmos es 10 se llaman logaritmos comunes y se denotan $\log_{10}$ o solo log, observa en tu calculadora generalmente es la tecla log.

Propiedades de los logaritmos[14]

1. $\log_a 1 = 0 \;\; esto\ es\ porque\ a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1 \;\; esto\ es\ porque\ a^1 = a$
3. $\log_a a^x = x \quad y \quad a^{\log_a x} = x \;\; propiedades\ inversas$
4. $Si\ \log_a x = \log_b y \quad entonces\ x = y \;\; propiedad\ uno\ a\ uno$

Ejemplos:

a) Aplicando la propiedad 1, $\log_6 1 = 0 \;\; porque \;\; 6^0 = 1$

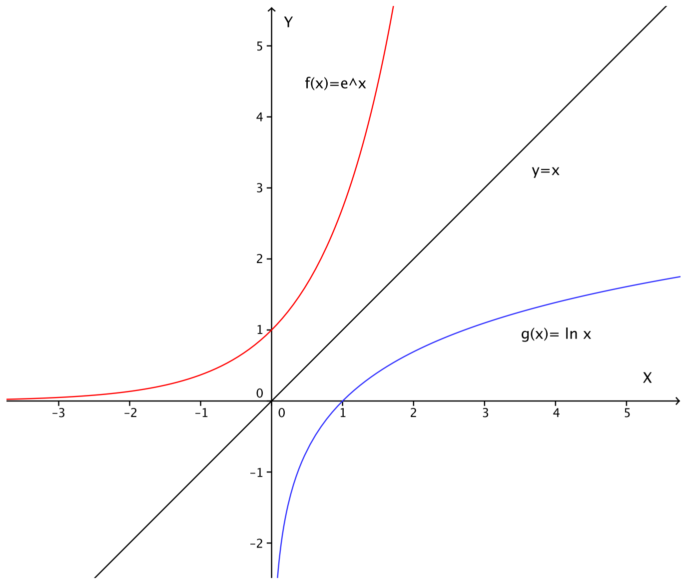
b) Aplicando la propiedad 2 , $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1 \;\; porque \;\; \sqrt{5}^1 = \sqrt{5}$

Función logarítmica natural

Si la base de los logaritmos es la constante e, se denota ln x , se lee logaritmo natural de x. La función logarítmica natural está definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \qquad x > 0$$

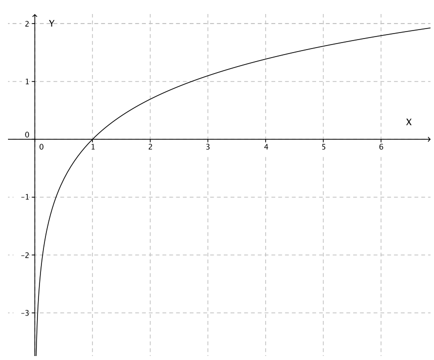
esto implica que la función logarítmica natural y la función exponencial son inversas[18].



Funciones $f(x) = e^x$ *y* $g(x) = \ln x$

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son inversas, por lo que sus gráficas son reflexiones respecto de la recta $y = x$.

La gráfica siguiente muestra el dominio y contradominio de la función logaritmo natural ln. El dominio de la función son las $x \in (0, \infty)$, lo que significa que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos. El contradominio son las $y \in (-\infty, \infty)$. La función es creciente. El logaritmo de 1 es 0 por lo que afirmamos que la gráfica pasa por (1,0).



Gráfica de $\ln x$

Teoremas de logaritmos aplicados a cualquier sistema de logaritmos

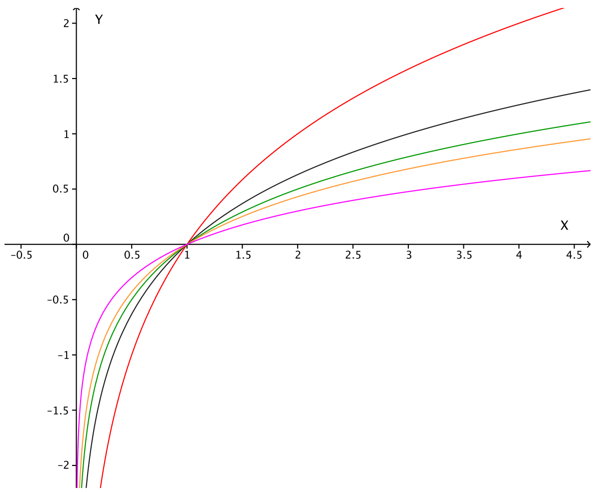
Teorema 1: $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Teorema 2: $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

Teorema 3: $\log_b M^n = n \log_b M$

Teorema 4: $\log_b \sqrt[r]{M} = \frac{1}{r} \log_b M$

La gráfica siguiente muestra la familia de las funciones $\log_b x$ para b=2,3,4,5 y 10, observe que todas pasan por el punto de coordenadas (1,0).



2.3. Operaciones con logaritmos

En los siguientes ejemplos se aplican las propiedades y teoremas sobre logaritmos, puedes comprobar su veracidad con ayuda de la calculadora científica.

a) log 15= log (3x5)= log 3 + log 5

b) $\log \frac{1000000}{100} = \log 1000000 - \log 100 = 6 - 2 = 4$

c) $\log 10^5 = 5 \log 10 = 5(1) = 5$

d) $\log \sqrt[2]{1000000} = \frac{1}{2} \log 1000000 = \frac{1}{2}(6) = 3$

2.4. Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales[16] son aquellas donde la incógnita es exponente.

Ejemplos:

$$2^x = 16, \quad 5^{x+1} = 625, \quad 4^{2x+1} = 64$$

A continuación se muestran distintos métodos para resolver ecuaciones exponenciales.

Ejemplo:

Resolver la ecuación exponencial

$$2^x = 64$$

como la incógnita que debemos despejar se encuentra en el exponente, tomamos el logaritmo de cada miembro de la ecuación, aplicamos el teorema 3 y despejamos

$$\log(2^x) = \log 64$$

$$x \log 2 = \log 64$$

$$x = \frac{\log 64}{\log 2}$$

$$x = 6$$

Para comprobar, sustituimos para verificar que satisface la ecuación

$$2^6 = 64$$

$$64 \equiv 64$$

Preguntas reto:

¿Cuánto vale el logaritmo de -2?

Ejemplo:

$$3^{5x-4} = 3^{2x-1}$$

ambos miembros tienen la misma base, al ser una igualdad los exponentes son iguales

$$5x - 4 = 2x - 1$$

agrupando términos semejantes

$$5x - 2x = 4 - 1$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Comprobando

$$3^{5(1)-4} = 3^{2(1)-1}$$

$$3^1 = 3^1$$

$$3 \equiv 3$$

Ejemplo:

En la ecuación $e^{(3x+1)x} = e^{x^2-2x-1}$ la base es la misma, por lo tanto los exponentes también

$$(3x + 1)x = x^2 - 2x - 1$$

$$3x^2 + x = x^2 - 2x - 1$$

$$3x^2 - x^2 + x + 2x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

al reducir a la mínima expresión llegamos a una ecuación de segundo grado con una incógnita, que resolveremos por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a = 2,\ b = 3 \quad y \quad c = 1$

sustituyendo los valores y reduciendo

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Ejemplo:

$$\frac{9^{x^2}}{9^{25}} = 1$$

aplicando las leyes de los exponentes y expresando $1 = 9^0$

$$9^{x^2-25} = 9^0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = 25$$

$$x = \pm 5$$

Ejemplo:

resolver $e^{2x} = 3$

aplicando ln a los dos miembros

$$\ln(e^{2x}) = \ln 3$$

recuerda que las funciones logaritmo natural y la función exponencial son inversas

$$2x = \ln 3$$

despejando la incógnita $x = \frac{\ln 3}{2}$

utilizando la calculadora científica $x = 0.5493$

Para practicar:

Forma equipo con un compañero o compañera y resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales, comprueba que la solución obtenida sea la correcta utilizando la calculadora científica.

Ecuación exponencial	Solución
$7^{x+1} = 16{,}807$	
$10^{3x+1} = 10^{2x+5}$	
$e^{x^2} = e^9$	

Para practicar:

En equipo realiza los siguientes cálculos con ayuda de la calculadora científica, expresa tus resultados hasta diez milésimas

log 0.1	
ln 1	
log 1	
ln e	

Curiosidades matemáticas:

La multiplicación era considerada muy difícil y, hasta el siglo XVI, solo se enseñaba en las universidades.

2.5. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica[19] es aquella que contiene a la función logaritmo de alguna expresión algebraica con una incógnita.

Para resolverlas en ocasiones es conveniente transformar de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa.

Ejemplo:

Hallar la solución de la ecuación

$$\log_2 x = 4$$

expresando en forma exponencial

$$2^4 = x$$

desarrollando $16 = x$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $\log_x 81 = 2$

expresando en forma exponencial $x^2 = 81$

aplicamos raíz cuadrada a los dos miembros

$$\sqrt{x^2} = \pm 9$$

analizando las dos soluciones $x_1 = 9$ y $x_2 = -9$ descartamos -9 porque un número negativo no puede ser base de una función logarítmica.

2.6. Problemario

1. Utiliza las leyes de los exponentes para reducir las siguientes expresiones sin realizar el cálculo.

a) $e^3 e^9$

b) $\frac{e^{15}}{e^{12}}$

c) $5e^2 + 7e^2$

d) $20e^{-x} - 30e^{-x}$

e) $\sqrt[3]{e^4 e^2}$

2. Realiza los siguientes cálculos mentales y después comprueba con ayuda de la calculadora tus respuestas:

a) log 0.001

b) log 0.01

c) log 0.1

d) log 1

e) log 10

f) log 100

g) log 1000

3. Expresa en forma exponencial:

a) $\log 1000000 = 6$

b) $\log_4 3125 = 6$

c) $\log_5 3125 = 5$

d) $\log_6 7776 = 5$

e) $\log_7 2401 = 4$

f)$\log_{20} 8000 = 3$

g)$\log_3 81 = 4$

4. Graficar las siguientes funciones, indicando el dominio y el contradominio:

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $f(x) = 6^x$

d) $f(x) = 4^x + 2$

e) $y = 6^x - 4$

f) f(x)= $\log_6 x$

g) $\log_7 x$

h) $\ln 2x$

5. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

a) $3^x = 531{,}441$

b) $2^{3x-6} = 8$

c) $e^{5x-1} = e^{3x+1}$

d) $e^{5x} = 22{,}026.4658$

e) x=2

f) $e^{3x^3} = e^{24}$

g) $\log_5 x = 7$

2.7. Autoevaluación

1. Expresa en forma exponencial log 1′ 000,000,000.
2. Expresa en forma logarítmica $7^6 = 117{,}649$.
3. Grafica la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x - 6$.
4. Grafica la función logarítmica ln $3x$, indica si es creciente o decreciente.
5. Resuelve la ecuación exponencial $12^{3x} = 2{,}985{,}984$.
6. Resuelve la ecuación exponencial $0.5^x = 0.0625$.
7. Grafica la función ln $3x$, indica si es creciente o decreciente.

2.8. Soluciones del problemario

1. a) e^{12}

   b) e^3

   c) $12e^2$

   d) $-10e^{-x}$

   e) e^2

2. a) -3

   b) -2

   c) -1

   d) 0

   e) 1

   f) 2

   g) 3

3. a) $10^6 = 1000000$

   b) $4^6 = 4096$

   c) $5^5 = 3125$

   d) $6^5 = 7776$

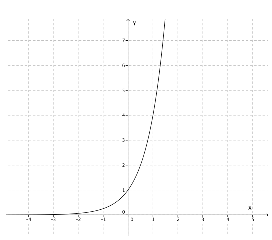
   e) $7^4 = 2401$

   f) $20^3 = 8000$

   g) $3^4 = 81$

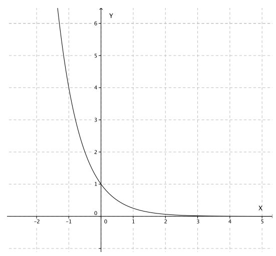
4. a) Dominio={x/ x∈ $(-\infty, \infty)$ }

   Contradominio={y/y∈ $(0, \infty)$}



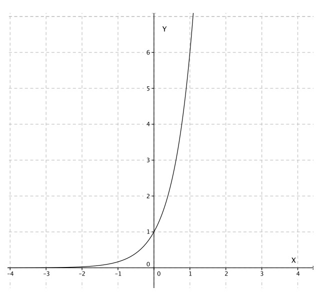
b) Dominio=$\{x/\ x\in(-\infty,\infty)\}$

Contradominio=$\{y/\ y\in(0,\infty)\}$



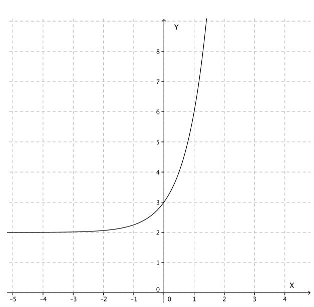
c) Dominio=$\{x/\ x-\infty,\infty)\}$

Contradominio=$\{y/y\in(0,\infty)\}$



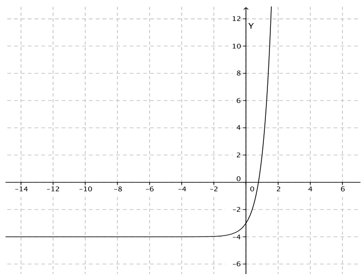
d) Dominio=$\{x/\ x\in(-\infty,\infty)\}$

Contradominio=$\{y/y\in(2,\infty)\}$



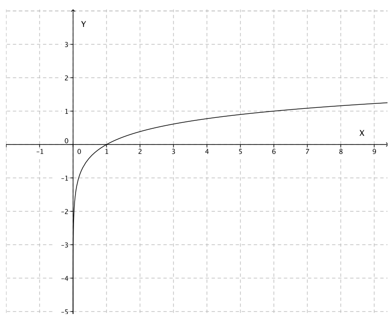
e) Dominio={x/ x∈ $(-\infty, \infty)$}

Contradominio={y/y∈ $(2, \infty)$}



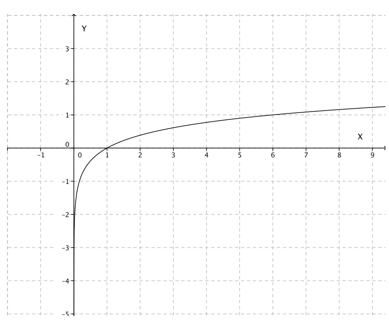
f) Dominio={x/ x∈ $(0, \infty)$}

Contradominio={y/ y∈ $(-\infty, \infty)$}



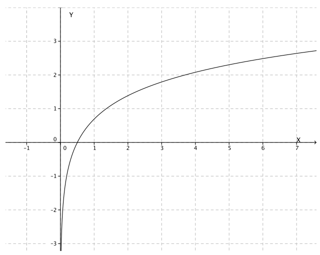
g) Dominio={x/ x∈ $(0, \infty)$}

Contradominio={y/ y∈ $(-\infty, \infty)$}



h) Dominio={x/ x∈ $(0, \infty)$}

Contradominio={y/ y∈ $(-\infty, \infty)$}



5.

a) x=12

b) x =3

c) x =1

d) x =10

e) x =2

f) $x = 2$

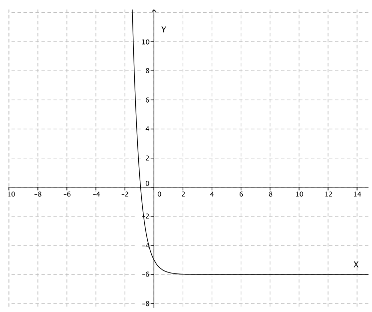
g) x = 78,125

2.9. Soluciones de la autoevaluación

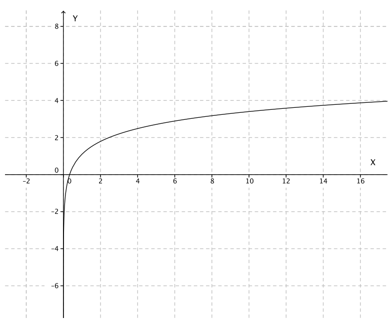
1. $10^9 = 1'000\,000\,000$

2. $\log_7 117{,}649 = 6$

3.



4.

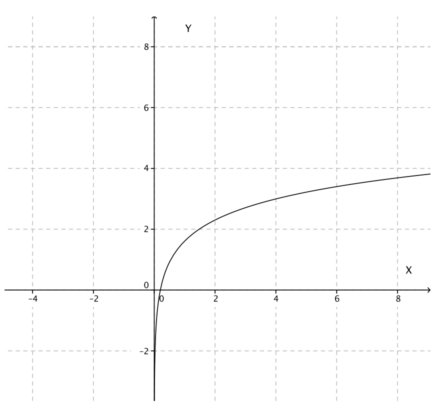


la función es creciente

5. x =2

6. x =4

7.



2.10. Conclusiones

En este capítulo tratamos dos funciones muy importantes, la función exponencial y la función logarítmica, el crecimiento de poblaciones de bacterias u otros microorganismos siguen un crecimiento exponencial o logarítmico, son muy utilizadas al modelar sistemas donde las poblaciones o las variables crecen o decrecen, algunas áreas de aplicación son: economía, medicina, química, geología.
En tus próximos cursos tendrás la oportunidad de conocer otras funciones y sus representaciones gráficas, te invitamos a investigar más aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica, consultando revistas científicas confiables como nature, en la dirección electrónica www.nature.com .

Referencias

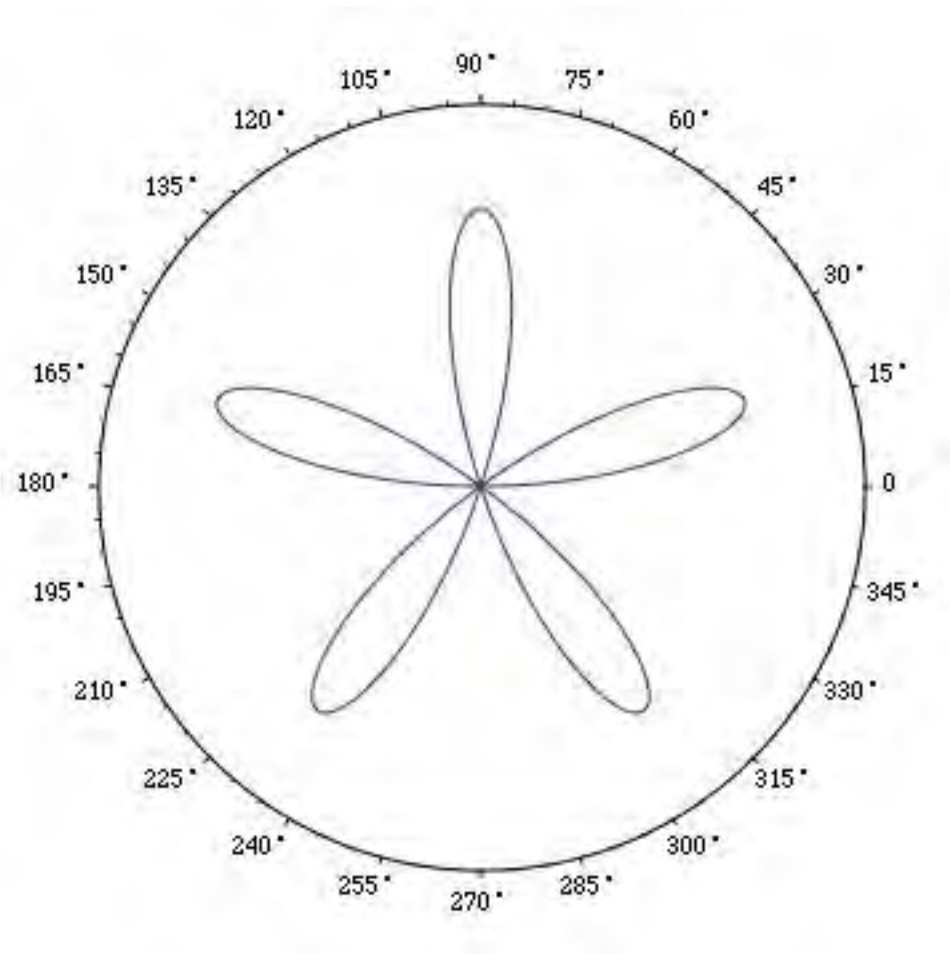
[1] Engler Adriana, et al.(2010) *funciones*. Argentina:UNL
[2] A. Bak Thor,Lichtenberg Jonas(1972)*Functions of one several variables*. España:Reverté
[3] Prawda W. Juan(1995)*Métodos y modelos de investigación de operaciones*.México: LImusa
[4] Biografías y Vidas.revista electrónica. http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm recuperado el 15 de junio de 2011
[5] Euler(1988),*Introduction to analysis of the infnite*,Book I, trad. John Blandon,New York:Springer-Verlag http://www.google.com.mx/#sclient=psy&hl=es&tbm=bks&source=hp&q=Introduction+to+analysis+of+the+infinite%2CBook+I%2C+trad.+John&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=61d914ee0792f9b8&biw=1280&bih=540 recuperado 15 de junio de 2011
[6] Enciclopedia Británica. http://www.britannica.com/EBchecked/topic/165066/Peter-Gustav-Lejeune-Dirichlet recuperado el 16de junio de 2011-06-16
[7] Axioma: proposición tan obvia, clara y sencilla que se admite sin demostrar

[8] http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/Filosofiagriega/Platon/TeoriadelasIdeas.htm recuperado 13 de junio de 2011.

[9] **Ignacio Barradas (COMO VES)* (Fecha publicación:30/3/2005)revista electrónica (p.1)**
[10] Geral James Holton, Stephen G. Brush.(1996). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*.España:Reverté
[11] http://www.astroseti.org/articulo/4494/biografia-de-johann-bernoulli recuperado 17 de junio de 2011
[12] Euler, Introduction to analysis of the infinite, Book I, trns. <john Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988,p.3. http://www.google.com.mx/#sclient=psy&hl=es&tbm=bks&source=hp&q=Introduction+to+analysis+of+the+infinite%2CBook+I%2C+trad.+John&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=61d914ee0792f9b8&biw=1280&bih=540 recuperado 17 de junio de 2011
[13] Leonhard Euler.*Métodos de máximos y mínimos*.España:Universidad Autónoma de Barcelona http://books.google.com/books?id=amelmrfmwEMC&pg=PA19&dq=Euler:+institutiones+calculi+differentialis&hl=es&ei=3ur2TaWxOoP2tgP-oszCBw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q=funci%C3%B3n&f=false
[14] Larson Ron, Hostetler Robert (2008) Pre-calculus. USA: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.
[15] Estrada William, Moreno Vladimir (2005) Colombia: Editorial Norma S.A.
[16] James Stewart, Redlin Lothar, et al. (2007) Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.México: Cengage Learning Editores, S.A.

[17] Corona Rafael,Rodríguez Marisol (2011) Manejo de espacios y cantidades. México: CONALEPMICH.
[18] Fleming Walter, Varberg Dale (1991) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
[19] Haeussler Ernest, Richard Paul (2003) Matemáticas para administración y economía. México:Pearson Educación.

Capítulo 3: Ángulos



Introducción

El conocimiento sobre el estudio y aplicaciones de la geometría es tan amplio que podemos observarlo en cualquier parte, sus aplicaciones nos permiten vivir dentro de una atmósfera de bienestar, adentrarnos en el mundo de la geometría nos permite visualizar nuestro entorno de manera diferente, y desde distintos puntos de vista de acuerdo con el tipo de geometría que estemos tratando.

Diariamente utlizamos la geometría, nuestra visión nos permite apreciar objetos que nuestro cerebro llega a confundir, tal es el caso de las ilusiones ópticas, y otras que aunque no podamos ver a simple vista vemos la reacción que producen, como sucede a nivel atómico.

Fotografía de la Catedral de Morelia Michoacán tomada en un ángulo en picado.

Investigadores estudiosos de la Geometría, afirman que el origen de la geometría data tres mil años a.C. en la época de Hammurabi[1] .

Los antiguos griegos se preocuparon por medir las cosas que les rodeaban, Tales de Mileto pudo medir la altura de la Gran Pirámide en Egipto por medio de su propia sombra, desarrollando técnicas de observación y utilizando los equipos rudimentarios de la época.

Los Mayas[2], Toltecas y Olmecas, utilizaron la geometría para construcciones y predicciones astronómicas .

Existen muchos tipos de geometrías y estas han surgido tratando de contestar a la pregunta, ¿cuál es la geometría del espacio físico? .

En la antigua Grecia dieron respuesta, afirmando que era la geometría euclidiana.

A principios del siglo XIX se concluye que existen dos tipos de geometrías[3]; la geometría física y la geometría lógica, Riemann[4] elaboró fundamentos en la geometría física de lo que después se llamaría geometría riemanniana.

Los avances en la física obligaron a los matemáticos y científicos a replantear sus argumentos al considerar el espacio de más de dos dimensiones. Al considerar cuatro dimensiones tuvieron que considerar una geometría de cuarto rango, con la teoría de la relatividad de Einstein y con los avances en las cuerdas cósmicas[5] se han reconsiderado geometrías de rango superior que cumplen con los procesos atómicos y moleculares , pero que no cumplen con la geometría euclidiana, espacios donde las rectas paralelas[3] se cortan y donde no existe ninguna paralela a otra recta.

Existen otros tipos de geometrías[6] como: geometría diferencial, geometría hiperbólica, geometría no euclidiana, geometría elíptica, geometría proyectiva, geometría algebraica, geometría de dimensiones bajas, geometría fractal, geometría molecular.

Este texto trata de la geometría plana o de dos dimensiones, que construyó de forma axiomática y usando el método deductivo el gran sabio Euclides[7].

La geometría plana es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras en un plano, es decir en dos dimensiones, el origen etimológico está relacionado con la agrimensura, viene de *geo* tierra y *metrón* medida[8].

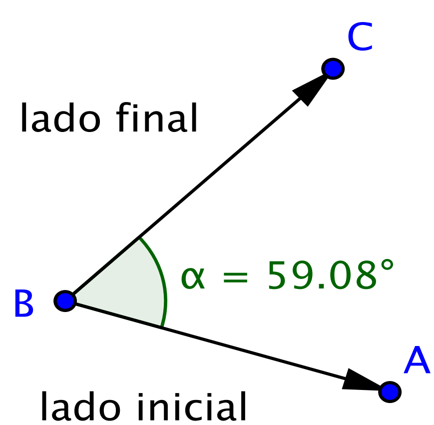
Acueducto de Morelia Michoacán fotografía tomada a Nivel.

3.1. Ángulos

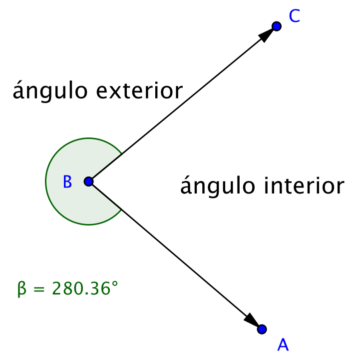
Definición de ángulo:

Cuando una recta gira alrededor de un punto fijo de nombre vértice sin salir del mismo plano, genera un ángulo[9], si gira en sentido de las manecillas del reloj diremos que generó un ángulo negativo o dextrógiro, y si gira en sentido contrario a las manecillas del reloj generó un ángulo positivo o levógiro.

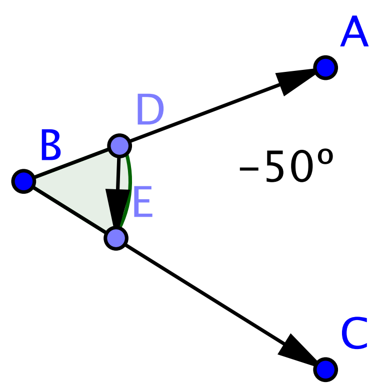
La posición original de la recta antes de girar se llama lado inicial y la que toma al describir el ángulo, lado terminal, la forma de denotarlo es mediante el símbolo $\angle$ o $\measuredangle$ seguido de la letra del vértice o mediante las tres letras que forman el ángulo, en $\measuredangle ABC$ observe que la letra de en medio en este caso B representa al vértice, A y C los puntos de inicio y final respectivamente en el sentido que se genera el ángulo, también podemos representar un ángulo mediante el uso de letras griegas, en el ejemplo está representado con la letra $\propto$, también podemos indicarlo con algún número.



Ángulo interior positivo generado en sentido contrario a las manecillas del reloj $\measuredangle ABC$.



Ángulo exterior positivo generado en sentido contrario a las manecillas del reloj $\measuredangle CBA$.



Ángulo negativo generado en sentido de las manecillas del reloj $\measuredangle ABC$

Las aplicaciones de los ángulos son muchas y variadas, algunas de uso cotidiano, como los lentes polarizados donde el ángulo de polarización es llamado el ángulo de Brewter[10], cuando te observas en el espejo, el diseño de tu celular, tu ropa, la construcción y diseño de tu casa, los científicos usan los ángulos en la representación de modelos físicos, los astrónomos para calcular distancias inaccesibles como las de los planetas, mediante ángulos se explica el fenómeno de difracción y refracción de la luz, los topógrafos hacen el cálculo de ángulos en un plano horizontal llamados ángulos acimutales y en un plano vertical llamados ángulos cenitales, etc.

Para practicar:

en equipos recorta y pega en tu cuaderno imágenes donde observes ángulos.

Observa las siguientes fotografías y describe en qué parte los puedes apreciar, coméntalo en el grupo.

La casa de los 11 patios Pátzcuaro Michoacán.

Puente colgante del zoológico de Chetumal.



Edificio en construcción   Reloj de pulcera   Diseño de artesanía en tela



Tijeras   Foto panorámica del Parque Nacional en Uruapan Michoacán   Pátzcuaro Michoacán

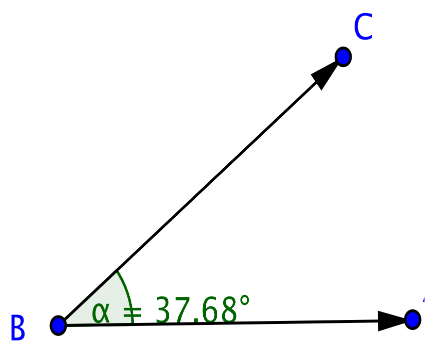
Para practicar: investiga en la biblioteca de tu escuela, o en alguna fuente electrónica, de las siguientes áreas, dónde aplican los ángulos y llena la tabla.

Hogar	
Industria automotriz	
Industria de los alimentos	
Hospitales	
Informática	

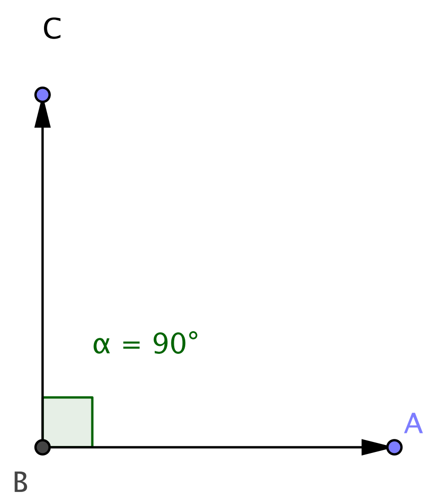
3.1.1. Tipos de ángulo

Hay diferentes tipos de ángulos, dependiendo de su tamaño tienen un nombre.

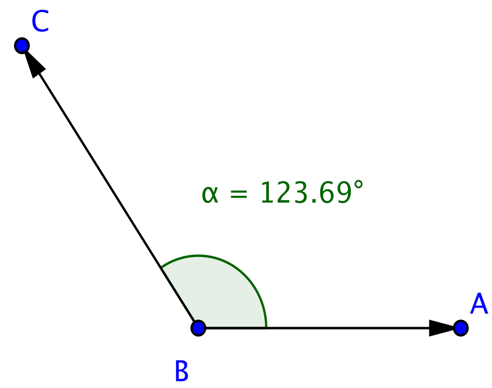
Ángulo agudo: es el que mide más de 0º y menos de 90º .



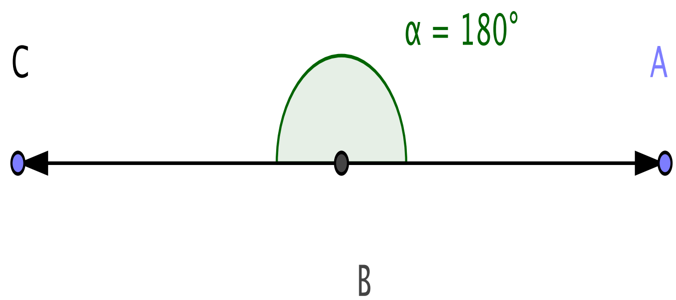
Ángulo recto: es el que mide 90º, se coloca un cuadrado en el vértice para indicar gráficamente que es ángulo con esta medida.



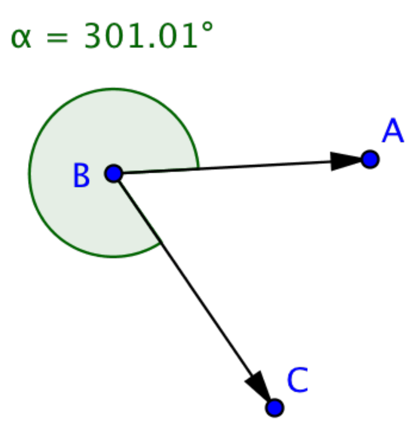
Ángulo obtuso: es el que mide más de 90º y menos de 180º.



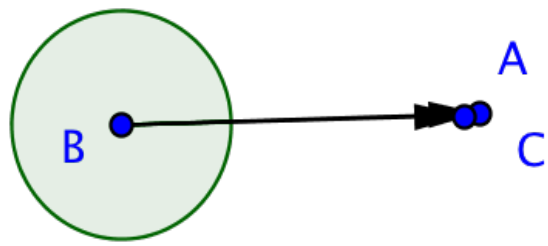
Ángulo llano o colineal: mide 180º exactamente.



Ángulo entrante: mide más de 180º y menos de 360º.



Ángulo perigonal o completo: mide 360º .



Curiosidades matemáticas:

los ángulos en la toma de una fotografía, son la inclinación respecto del suelo o de una línea imaginaria horizontal, sus nombres son:

ángulo nivel o normal,

en picado,

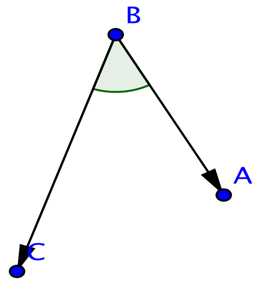
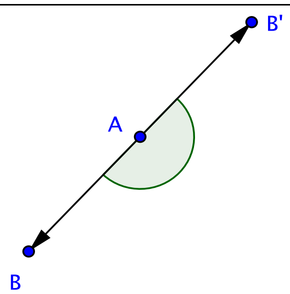
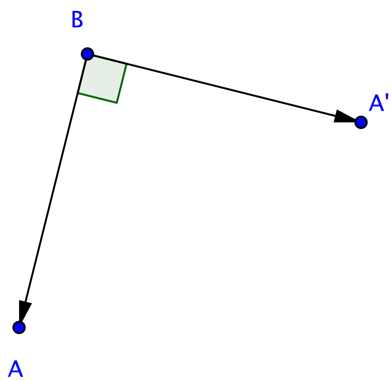
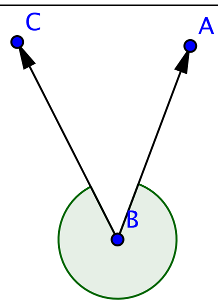
en contrapicado,

en cenital,

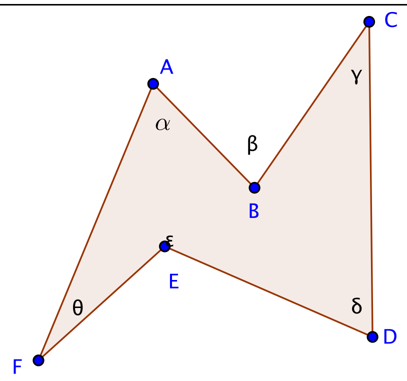
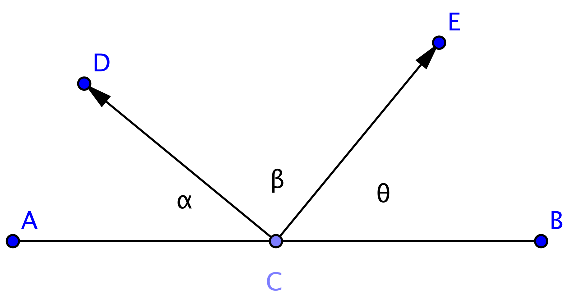
en nadir .

Investiga cada uno y procura la próxima vez que tomes una fotografía identificarlos.

Para practicar: clasifica los siguientes ángulos escribiendo el nombre de acuerdo a su medida

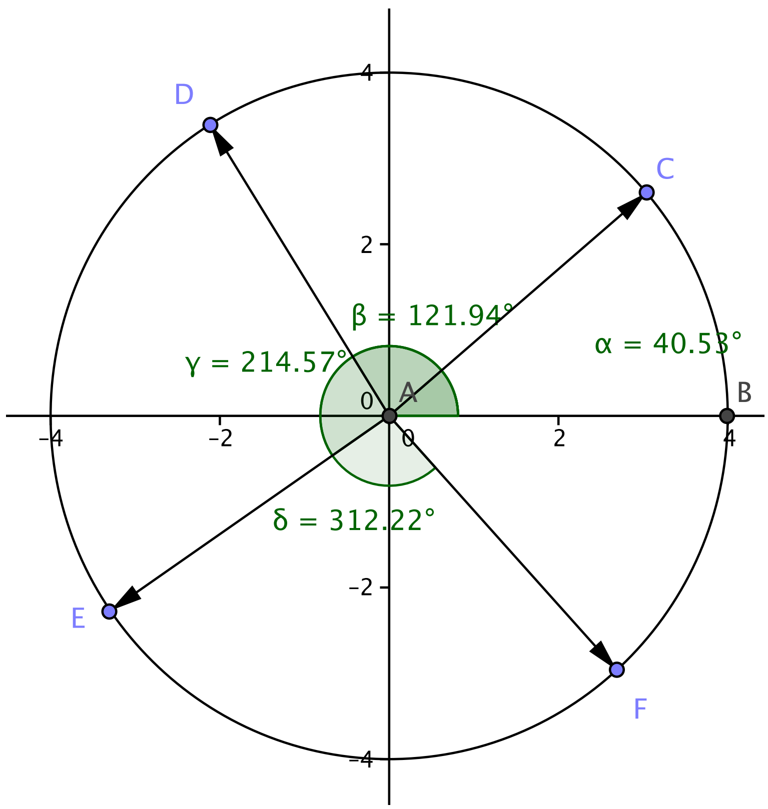
Escribe el ángulo que está representado en las figuras, de la siguiente manera; usando la letra del vértice, usando las tres letras y con la letra griega que se denota.

	Con la letra del vértice	Con 3 letras	Con la letra griega
			
			

3.1.2. Medidas de ángulos

Los ángulos podemos medirlos de forma trigonométrica, calculando la rotación de la recta generadora cuyo vértice es el origen del plano cartesiano y el lado inicial es el eje OX.

Los ángulos en los cuadrantes[11] podemos graficarlos con vértice en el origen pudiendo generar cualquier medida de ángulos, incluso mayores de 360º, lo que significa que la recta geradora gira varias vueltas y parte de ellas, ejemplo:



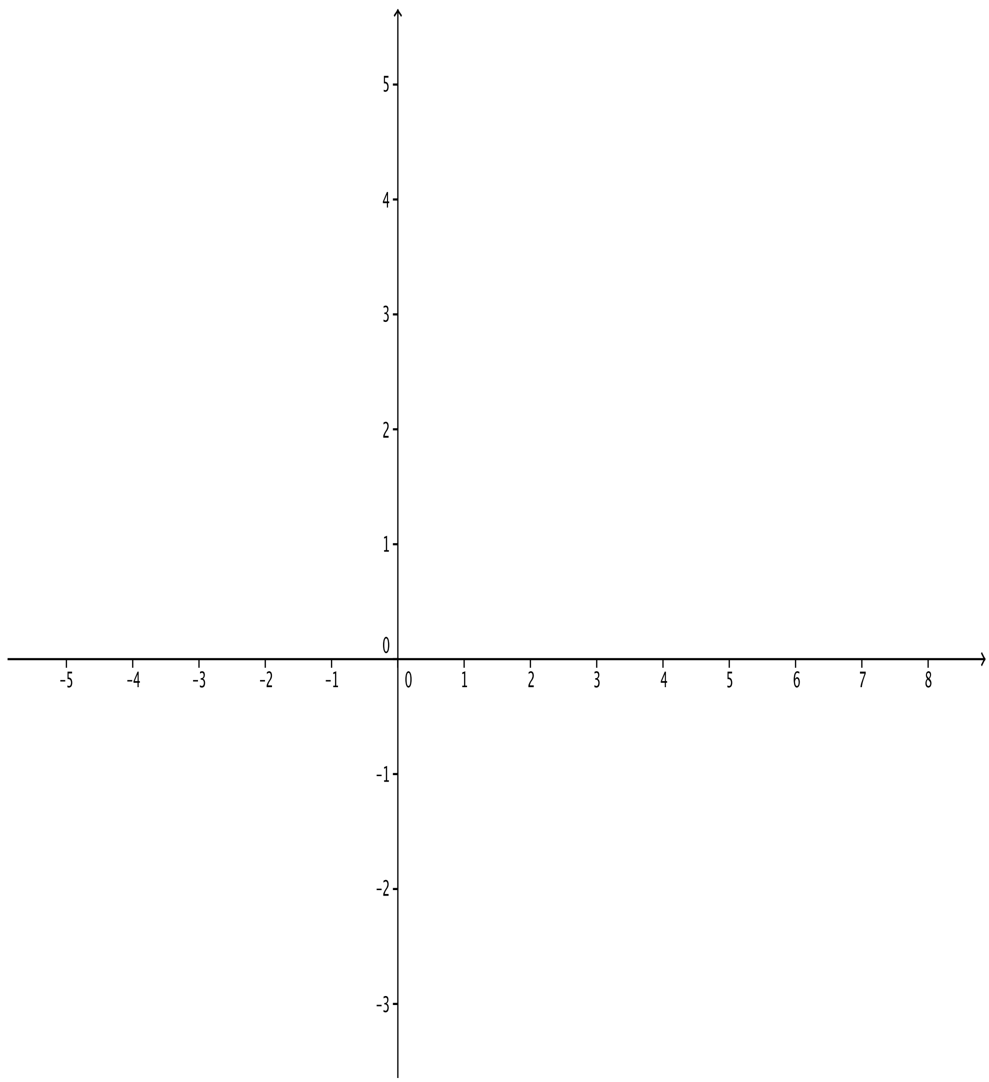
Así el ángulo 1110º es un ángulo generado al haber dado 3 vueltas más 30º, así 1110º es equivalente a uno de 30º que se ubica en el primer cuadrante, ya que:

1110º= 3×360º+30º

Para practicar:

Trazar en el plano cartesiano los siguientes ángulos indicando el número de cuadrante en el que se encuentran mediante una semi-recta.

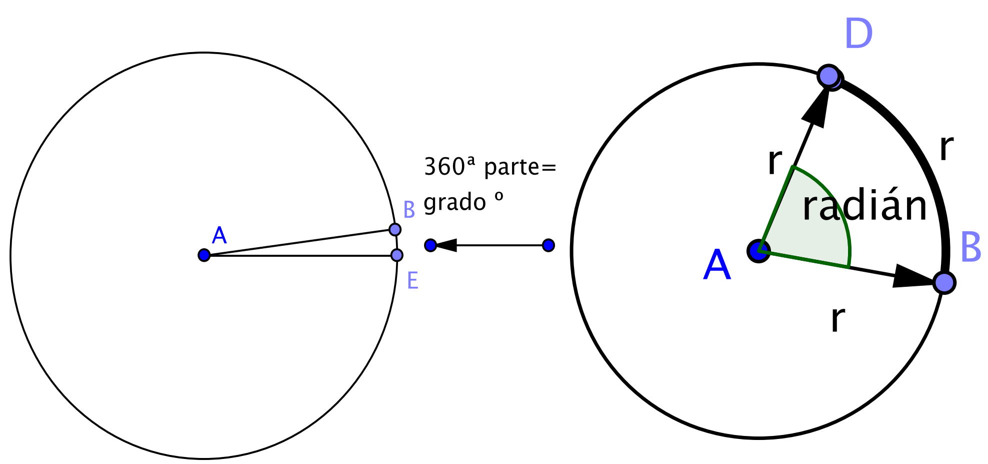
a) 1845º b)820º c)1560º d) 3160º e) -60º f)-100º



3.1.3. Unidades de medida de ángulos

Medir es comparar respecto de una unidad patrón elegida, existen varias unidades para hacerlo, la más conocida son los grados sexagesimales[12] que equivalen a la 360ª parte de una circunferencia, a cada parte se le llama grado y se representa con el símbolo º, cada grado tiene 60 minutos que se representan con ´ y cada minuto 60 segundos que se representan con ″, otra unidad de medida es el radián[7], ángulo central subtendido por un arco de longitud igual al radio.

A los grados sexagesimales los llamaremos simplemente grados para referirnos a ellos, se usan en astronomía y navegación[13]. Los radianes son usados en cálculo infinitesimal debido a que facilita los cálculos algebráicos y aritméticos.



Una vuelta completa del círculo son 360º y la longitud de la circunferencia es 2π, la relación entre estos dos sistemas de medición es:

$$2\pi \ radianes = 360°$$

simplificando

$$\pi = 180°$$

usando esta regla de conversión podemos encontrar la equivalencia de grados a radianes y de radianes a grados.

Ejemplo: convertir 45º a radianes

$$180° = \pi$$

$$45° = x$$

$$x = \frac{45° \times \pi}{180°}$$

$$x = \frac{1}{4}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4}\ radianes$$

Ejemplo: convertir $\frac{3}{4}\pi\ radianes$ a grados

$$180° = \pi$$

$$x = \frac{3}{4}\pi$$

$$x = \frac{\frac{3}{4}\pi \times 180}{\pi}$$

$$x = \frac{3}{4} \times 180°$$

$$x = 135°$$

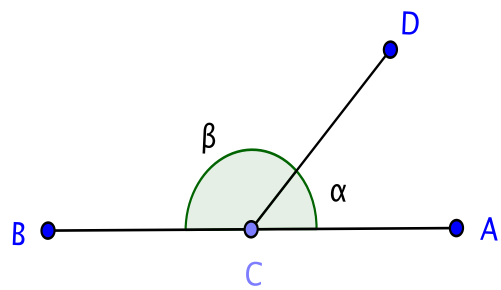
Para practicar:

completa la siguiente tabla y compara tus resultados con los de tus compañeros

Grados sexagesimales	Radianes
120º	
	$\frac{2}{3}\pi$
60º	
	$\frac{\pi}{6}$
	$\frac{5}{3}\pi$
100º	
	2π
	$\frac{\pi}{2}$
160º	
540º	

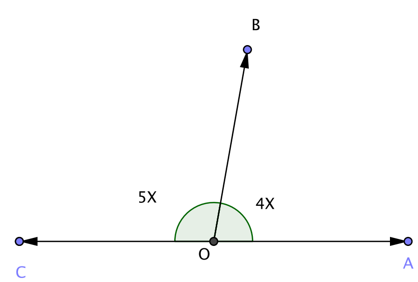
3.1.4. Pares de ángulos

Ángulos adyacentes: son dos ángulos que tienen un lado común y el otro lado no común es una recta. La suma de los ángulos adyacentes es un ángulo llano.



El lado común es $\overrightarrow{CD}$ y los lados no comunes están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Por ejemplo los ángulos adyacentes $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ de la siguiente figura tienen el lado común $\overrightarrow{OB}$ y están sobre la recta $\overleftrightarrow{CA}$, calcular su medida si están en relación 4:5.



Como los ángulos son adyacentes son suplementarios entonces suman 180º

$$4x + 5x = 180°$$

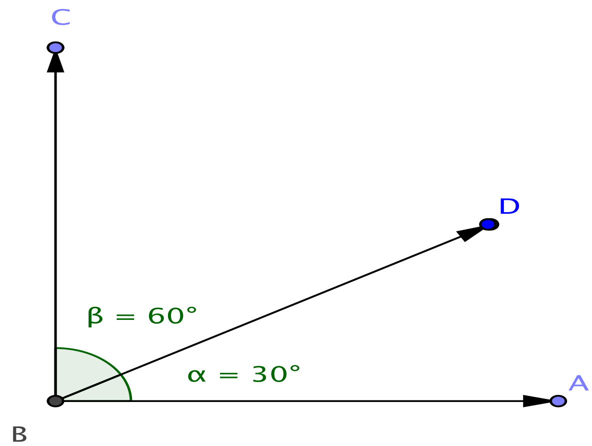
$$9x = 180°$$

$$x = 20°$$

$$\measuredangle AOB = 4x = 80°$$

$$\measuredangle BOC = 5x = 100°$$

Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90º.



Ejemplos: calcular el complemento de los siguientes ángulos

a) 47º

el complemento de un ángulo es cuánto le falta para valer un ángulo recto, esto es 90º, por lo tanto

$$\measuredangle x + 47° = 90°$$

$$\measuredangle x = 90° - 47°$$

$$\measuredangle x = 43°$$

así 43º es el complemento de 47º , podemos comprobarlo al sumar y verificar que la suma es igual a 90º.

Por lo tanto es suficiente restar el ángulo a 90º.

b) 50º 20´

$$90° - 50°\,20' =$$

$$89°60' - 50°\,20' =$$

$$39°\,40'$$

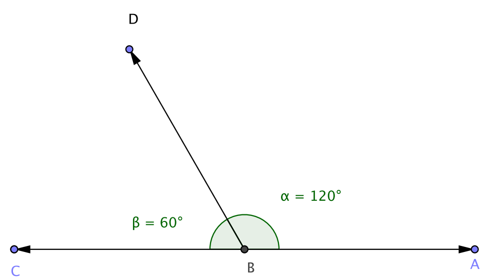
c) 38º 20´29”

$$90° - 38°\,20´\,29" \ =$$

$$89°\,59´\,60 \text{ -}38°\,20´29 =$$

$$51°\,39´\,31"$$

Ángulos suplementarios: dos o más ángulos son suplementarios si su suma es igual a 180º.



Ejemplos: calcular el suplemento de los siguientes ángulos

a) 124º

el suplemento de un ángulo es lo que le falta para valer un ángulo llano o 180º, por lo tanto

$$124° + \measuredangle x = 180°$$

$$\measuredangle\, x = 180° - 124°$$

$$\measuredangle\, x = 56°$$

Por lo tanto es suficiente restar el ángulo a 180º.

b) 150º 35´

$$180° - 150°\,35´ =$$

$$179°\,60´ - 150°\,35´ =$$

$$29°\,25´$$

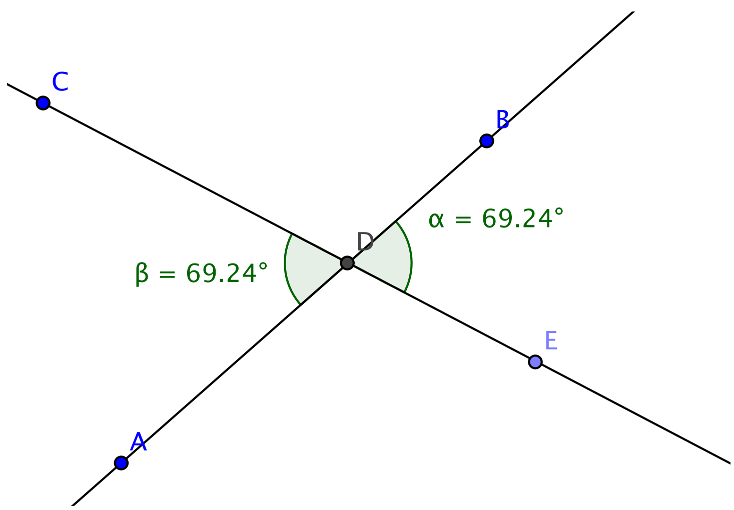
c) 170º 48´55″

$$180° - 170°\ 48´\ 55" =$$

$$179°\ 59´\ 60" - 170°\ 48´\ 55" =$$

$$9°\ 11´5"$$

Ángulos opuestos por el vértice (par vertical): los ángulos no adyacentes formados cuando dos rectas se intersectan se llaman ángulos opuestos por el vértice. Tienen la misma medida.



Los ángulos ∡EDB y ∡CDA son opuestos por el vértice e iguales en medida, de la misma manera ∡BDC y ∡ADE.

Para practicar:

1. Calcular el complemento de los siguientes ángulos, llena la tabla con los resultados obtenidos

Ángulo	Complemento
66º	
68º33´	
43º23º43"	

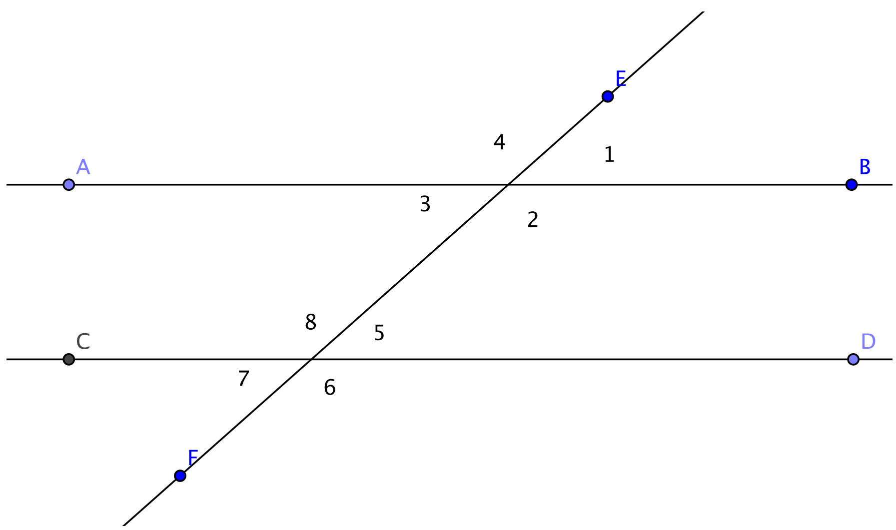
2. Calcular el suplemento de los siguientes ángulos, llena la tabla con los resultados obtenidos

Ángulo	Suplemento
155º	
123º 4´	
100º20´50"	

3.1.5. Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una trasversal

Las rectas paralelas de acuerdo con la geometría plana no se cortan o no tienen ningún punto en común y las que tienen un punto en común se llaman oblicuas en particular si se cortan formando ángulos rectos se llaman perpendiculares[14].

Al cortar la transversal a las rectas paralelas se forman ocho ángulos, cuatro interiores ∡2, ∡3, ∡5 y ∡8 y cuatro exteriores ∡1, ∡4, ∡6 y ∡7, que se observan en la figura siguiente:



Los siguientes pares de ángulos son iguales en medida y reciben los siguientes nombres:

Ángulos alternos internos, se encuentran a los lados de la oblicua y son interiores, en la figura ∡2 y ∡8, ∡3 y ∡5.

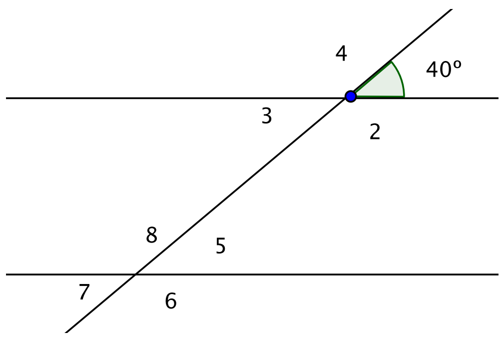
Ángulos alternos externos, se encuentran a los lados de la oblicua y son exteriores, en la figura ∡4 y ∡6, ∡1 y ∡7.

Ángulos correspondientes, se encuentran del mismo lado de la oblicua y del mismo lado de cada paralela, en la figura ∡1 y ∡5, ∡2 y ∡6, ∡4 y ∡8, ∡3 y ∡7.

También se forman ángulos opuestos por el vértice que ya se definieron, en la figura son: ∡1 y ∡3, ∡2 y ∡4, ∡5 y ∡7, ∡6 y ∡8.

Ejemplos:

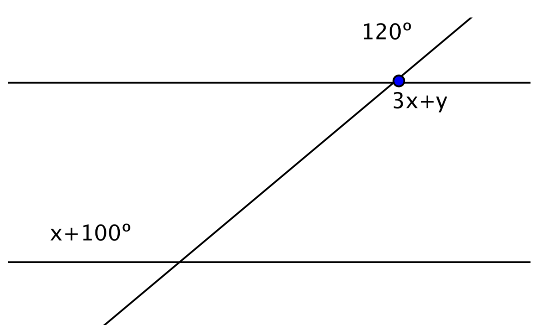
a) En la siguiente gráfica calcularemos el valor de los ángulos que se indican :



∡2=∡4=∡8=∡6= 140º y

∡3=∡5=∡7= 40º.

b) Encuentra los valores de x y de y en la siguiente figura de dos rectas paralelas cortadas por una secante (oblicua):



los ángulos $3x + y$ y 120º son iguales por ser opuestos por el vértice y los ángulos $3x + y$ y x+100º también por ser alternos internos, por lo tanto tenemos un sistema de ecuaciones que resolveremos por el método de suma y resta[15]

$$\begin{cases} 3x + y = 120° \; ecuación\ 1 \\ 2x + y = 100° \; ecuación\ 2 \end{cases}$$

multiplicando la ecuación 2 por -1 y sumándola con la ecuación 1 tenemos:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} \;\; 3x + y = 120° \\ -2x - y = \;-100° \end{cases} \\ \hline \quad x \qquad = \;\; 20° \end{array}$$

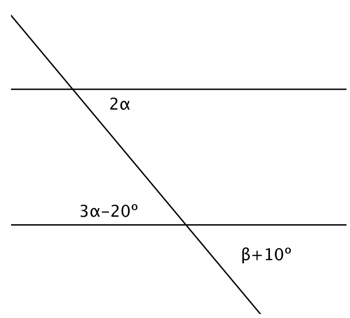
sustituyendo el valor encontrado en una cualesquiera de las ecuaciones originales tenemos:

$$2(20°) + y = 100°$$

$$y = 60°$$

Para practicar:

Considere que las rectas paralelas son cortadas por una secante, ¿cuánto vale $\alpha + \beta$?



Curiosidades matemáticas:

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es siempre mayor que 180° y menor que 270°.

3.2. Triángulos

Una de las figuras planas más fuertes es el triángulo, figura geométrica plana cerrada de tres lados, o simplemente un polígono de tres lados. Los usos y aplicaciones son muy variados, casi en cualquier lugar que observes encontrarás triángulos, como en las estructuras de los puentes, techos de herrería, en electromagnetísmo los arrancadores para motor de inducción trifásica, se encuentran en triángulo, de hecho se llaman arrancadores estrella-triángulo, en fisiología existe una función triángulo, llamada triángulo de Einthoven[16] que se construye a partir de números complejos, y ayuda a calcular la dirección media y la magnitud de los impulsos eléctricos que pasan a través del corazón; eje eléctrico. El famoso triángulo de Pascal que es una herramienta versátil, desde el cálculo de los coeficientes de un desarrollo binomial, desarrollo de potencias, etc..

En este texto trabajamos con geometría plana y debes recordar que las propiedades que se muestran no son del todo válidas en otro tipo de geometría.

Los triángulos se clasifican de acuerdo a la medida de sus lados o a la medida de sus ángulos de la siguiente manera:

Por sus ángulos:

Acutángulo: sus tres ángulos son agudos

Rectángulo: tiene un ángulo recto

Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso

Por sus lados:

Equilátero: tiene sus tres lados iguales

Isósceles: tiene dos lados iguales

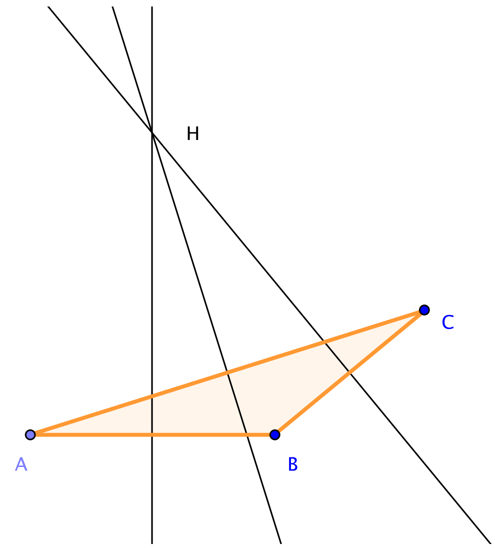
Escaleno: tiene sus tres lados distintos

3.2.1. Rectas y puntos notables

Los triángulos tienen tres rectas y 3 puntos notables.

Mediatriz: es la recta perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado, formando cuatro ángulos iguales de 90º.

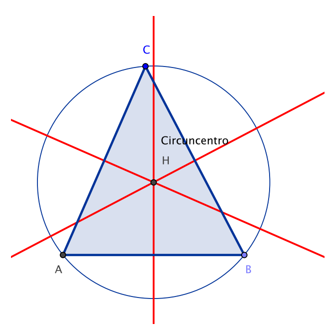
Nota: el símbolo ⊥ se lee perpendicular a.



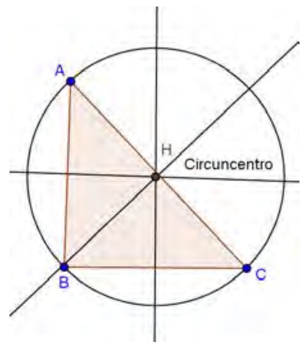
El punto de intersección de las tres mediatrices H, es el centro de una circunferencia circunscrita, esta toca los tres vértices del triángulo.

Observemos la ubicación del circuncentro respecto en los distintos tipos de triángulos.

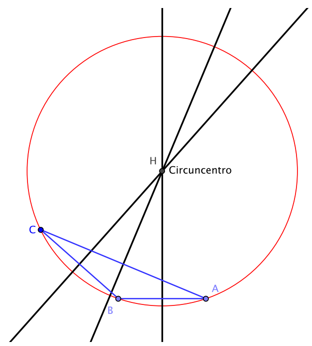
En el triángulo acutángulo: el circuncentro queda dentro del triángulo.



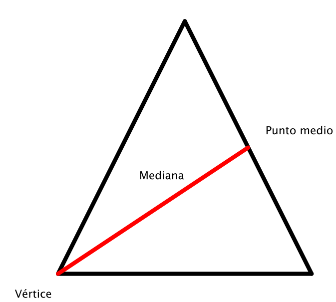
En el triángulo rectángulo: el circuncentro queda sobre el triángulo, en el lado mayor, que se opone al ángulo mayor (90º) que recibe el nombre de hipotenusa.



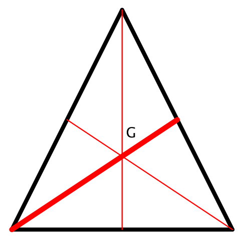
El el triánguo obtusángulo: el circuncentro queda fuera del triángulo



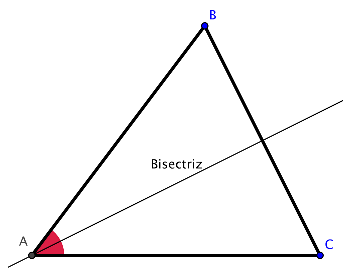
Mediana: es el segmento que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto.



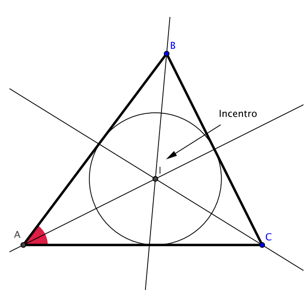
El baricentro de un triángulo es su centro de gravedad y es el punto de intersección de las tres medianas, también se le conoce como punto G, baricentro o gravicentro.



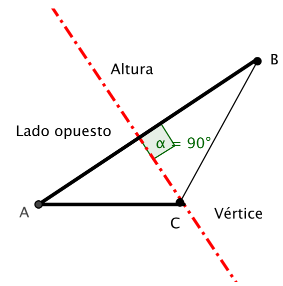
Bisectriz: es una semirecta que biseca o corta a un ángulo, lo hace formando dos ángulos iguales o congruentes.



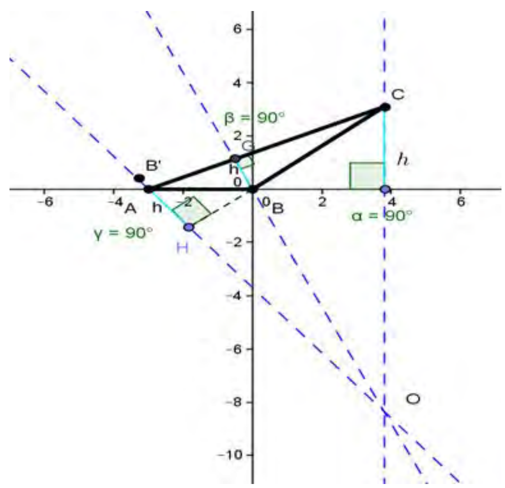
Incentro se le llama al punto de intersección de la bisectrices de los ángulos interiores de cualquier triángulo, que es el centro de una circunferencia inscrita.



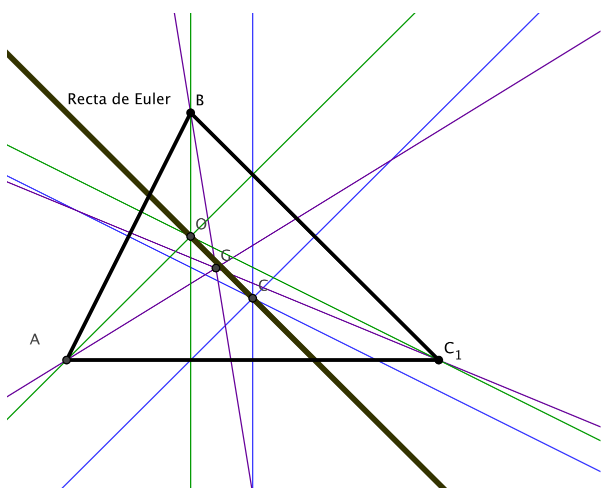
Altura: es semirecta perpendicular que se traza desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.



Ortocentro: es el punto de intersección de las tres alturas, se representa con "O"



Le *recta de Euler*[17] es una línea recta que contiene el ortocentro, el circuncentro y el baricentro.

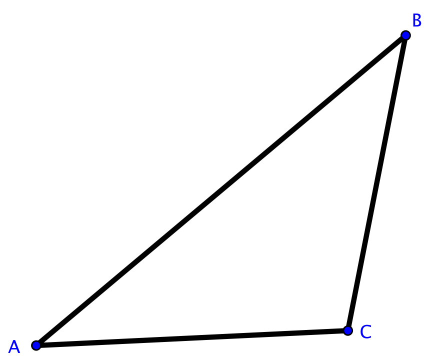


Para practicar:

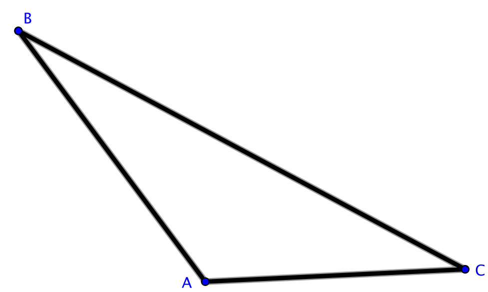
1. Escribe el nombre del punto de intersección de las siguientes rectas notables:

Medianas	
Mediatrices	
Alturas	
Bisectrices	

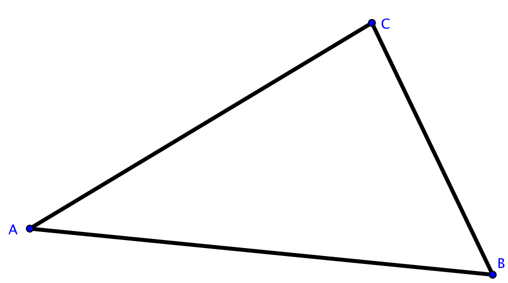
En los siguientes triángulos traza las rectas notables que se indican y localiza el punto notable correspondiente.



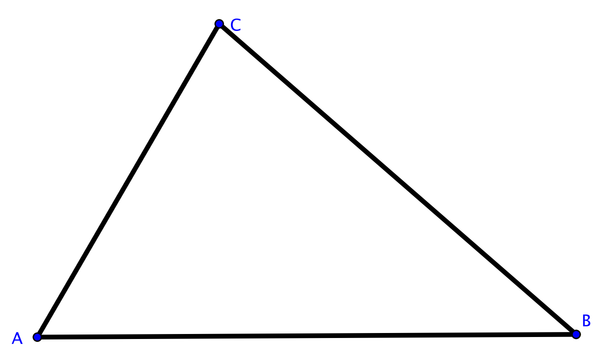
Medianas



Alturas



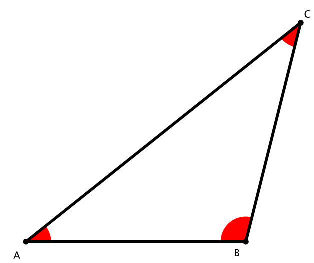
Mediatrices



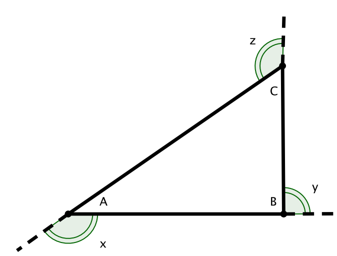
Bisectrices

Teoremas importantes de triángulos:

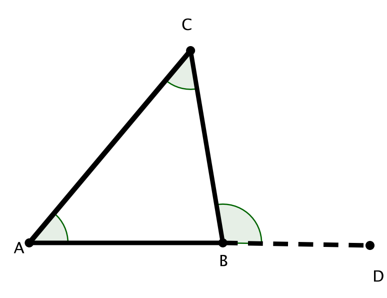
Teorema: La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo vale 180º.



Teorema: La suma de los tres ángulos exteriores de un triángulo vale 360º.

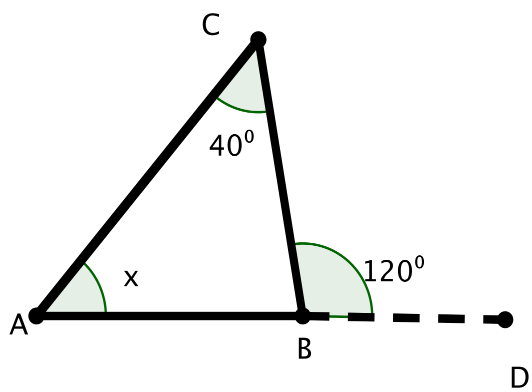


Teorema: Un ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes.



Calcular el valor de x en los siguientes triángulos:

a)



Los ángulos B y 120º forman un ángulo llano por lo tanto suman 180º

$$\measuredangle B + 120° = 180°$$

$$\measuredangle B = 180° - 120° = 60°$$

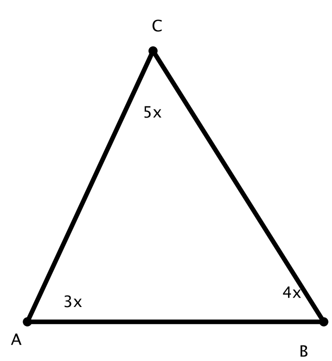
Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º tenemos:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

$$x + 60° + 40° = 180°$$

$$x = 80°$$

b)



Como la suma de los ángulos interiores es igual a 180º tenemos:

$$3x + 4x + 5x = 180°$$

$$12x = 180°$$

$$x = 15°$$

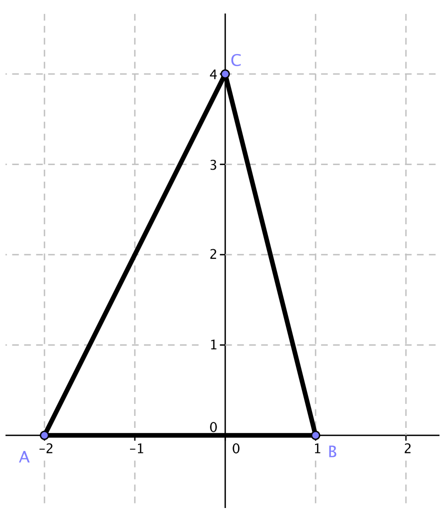
$$\therefore\ \measuredangle A = 3(15°) = 45°, \measuredangle B = 4x = 4(15°) = 60°, \measuredangle C = 5x = 5(15°) = 75°$$

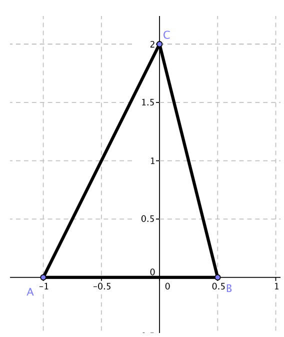
3.2.2. Semejanza

En geometría semejanza entre de dos figuras significa que tienen la misma forma pero distinto tamaño, esto lo podemos observar en los mapas, fotografías, copias fotostáticas, etc.

En triángulos la semejanza es tener dos triángulos de la misma forma pero de distinto tamaño en donde sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos son respectivamente congruentes.

El símbolo que se utiliza para denotar una semejanza es ~





Ejemplos de dos triángulos semejantes:

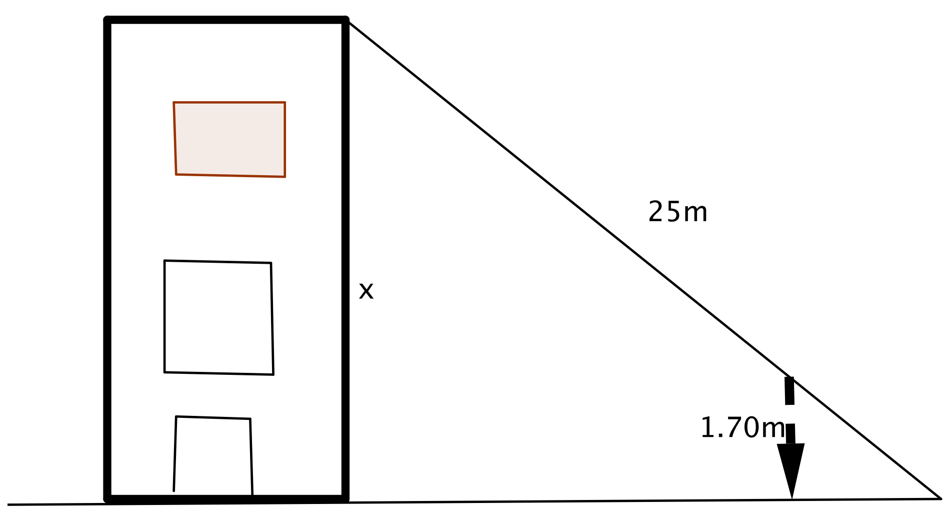
Postulados de semejanza:

1.- Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales (LLL).

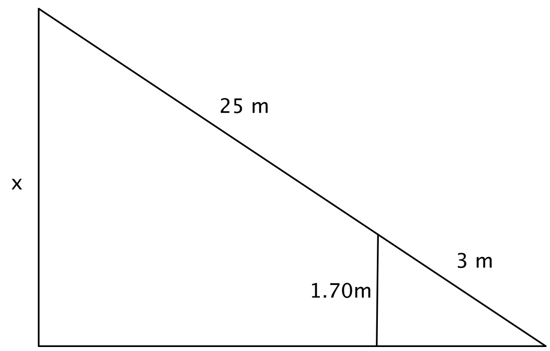
2.-Dos triángulos son semejantes, si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente (LAL).

3.- Dos triángulos son semejantes, si tienen dos de sus ángulos semejantes (AAL).

Un edificio de altura x tiene un cable metálico de 30m de longitud que está colocado desde la parte más alta hasta el piso, si una persona de 1.70m de altura se coloca de tal manera que el cable de su cabeza al piso mide 3m, calcular la altura x del edificio .



Observe que se forman dos triángulos semejantes



Los dos triángulos son semejantes por lo tanto son proporcionales sus lados:

$$\frac{x}{1.70m} = \frac{25m}{3m}$$

$$x = \frac{(1.70m)(25m)}{3m}$$

$$x = \frac{42.5m}{3}$$

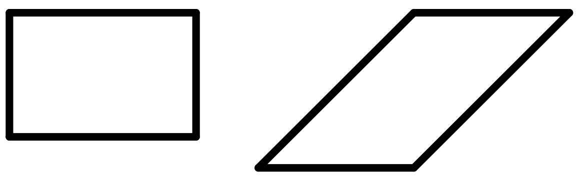
$$x = 14.16m$$

3.3. Cuadriláteros y sus propiedades

Los cuariláteros se clasifican en tres grupos:

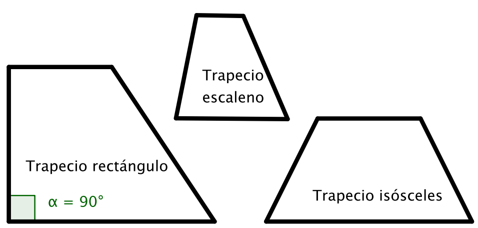
1. Paralelogramos: son aquellos que tienen paralelos sus lados opuestos.

Ejemplos:



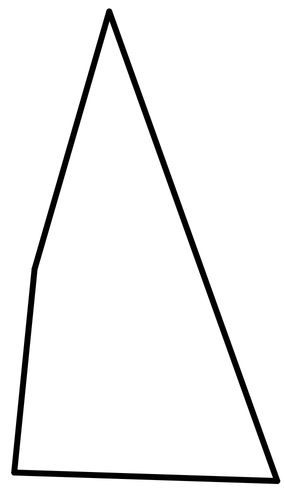
Rectángulo Rombo Cuadrado

2. Trapecios: existen tres tipos, trapecio isósceles, trapecio rectángulo y trapecio escaleno.



Techo de la clínica del IMSS en Morelia Michoacán.

3. Trapezoides: los lados no son paralelos



Trapezoide

Propiedades de los cuadriláteros

a) Todos los cuadriláteros tienen sus lados opuestos iguales.

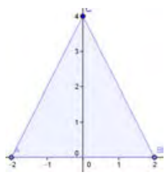
b) Las diagonales se bisectan alternativamente.

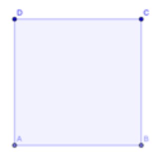
c) Sus ángulos opuestos son iguales

d) Dos ángulos consecutivos son suplementarios

3.4. Clasificación de polígonos

Los polígonos son una serie finita de segmentos de recta que encierra una región en el plano, hay polígonos irregulares y polígonos regulares; en un polígono irregular sus lados son diferentes y por consecuencia sus ángulos, un polígono regular es aquel que cumple con dos condiciones; que sea equilátero y equiángulo, es decir que sus lados sean iguales y los ángulos interiores también sean iguales, dos ejemplos se muestran con las siguientes figuras:





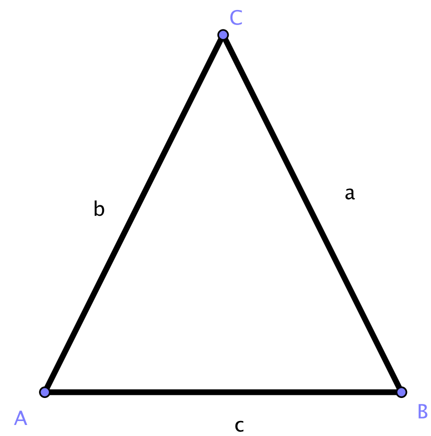
Los polígonos se clasifican por el número de lados

Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octágono	8 lados
Eneágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Pentadecágono	15 lados
Icoságono	20 lados

3.5. Cálculo del perímetro y área de polígonos

Para calcular el *perímetro* de un triángulo se suman las medidas de sus lados.

$$P = a + b + c$$



Para obtener el *área* de un triángulo una forma es aplicar la fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

donde b es la base y h la altura.

Cuando no conocemos la altura del triángulo tenemos la opción de calcular su área por medio de la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde s es el semiperímetro del triángulo esto es $s = \frac{a+b+c}{2}$ y a, b, c la medida de sus lados.

Ejemplo: Dadas las siguientes medidas de los lados del triángulo a = 10, b = 12, y c = 16, calcular su área.

$P = a + b + c$ entonces $P = 10 + 12 + 16 = 38$

$$\therefore \quad s = \frac{38}{2} = 19$$

Sustituyendo en la fórmula de Herón

A = $\sqrt[2]{19(19-10)(19-12)(19-16)}$

A = $\sqrt[2]{19(\ 9)(7)(3)}$

A = $\sqrt[2]{3591}$

A = $59.92u^2$

Para resolver:

1. Calcular el perímetro de los siguientes triángulos:

a) Un triágulo equilátero de lado 25 m ___________________________

b) Un triángulo isósceles de base 20m y sus lados iguales 30m _______

c) Un triángulo escaleno cuyos lados miden 9m, 8m y 10m _____________

2. Calcular el área de los siguientes triángulos utilizando la fórmula $A = \frac{b \times h}{2}$

Base de triángulo	Altura del triángulo	Área del triángulo
25 m	18 m	A =
14 m	20 m	A =
112 m	100 m	A =
80 m	65 m	A =

3. Calcular el área de los triángulos cuya medida de sus lados se indica en la tabla siguiente. Use la fórmula de Herón.

Lado a	Lado b	Lado c	Perímetro	Semiperímetro	Área
18m	25 m	32 m			
5 m	6 m	7 m			
9 m	14 m	22 m			

3.6. Círculo y circunferencia

La circunferencia para los Griegos es la curva geomérica de mayor belleza, es casi imposible no imaginar sus aplicaciones, el hombre la ha usado desde el arte hasta la tecnología y cómo no mencionar la rueda. La circunferencia[18] se obtiene cuando a un cono recto se le hace un corte perpendicular a su eje, por un plano.

Rueda de molino de piedra labrada para la fabricación de azúcar. Tacámbaro siglo XIX

Castillo pirotécnico

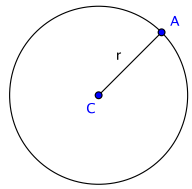
En el arte, arquitectura, diseño, está presente

Euclides[19] introduce la definición de circunferencia de manera intuitiva como un postulado: "Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dado".

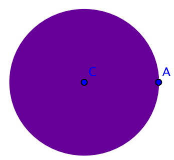
Hilbert la define como el lugar geométrico de puntos en el plano que satisfacen cierta congruencia .

En geometría plana, una circunferencia[20] es el lugr geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de manera tal, que siempre equidista de un punto fijo llamado centro.

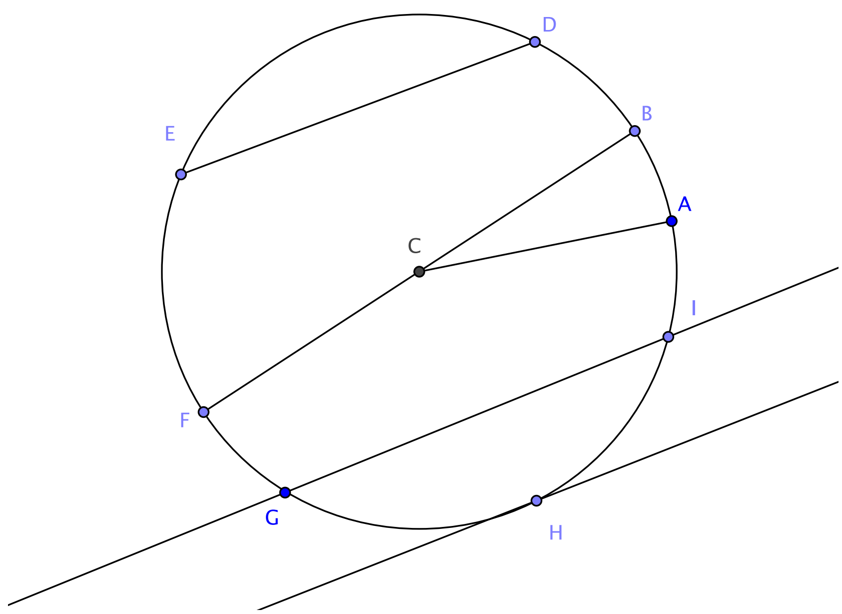
Usando la última definición a continuación se muestra una circunferencia de centro C y radio r



El conjunto de puntos interiores a la circunferencia se llama *círculo*.



3.6.1. Elementos



Radio: es un segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia $r = \overline{CA}$.

Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia $\overline{ED}$ y es perpendicular con el radio.

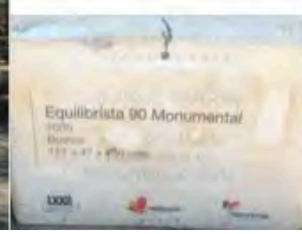
Diámetro: cuerda que pasa por el centro y es igual a la medida de dos radios $\overline{FB}$.

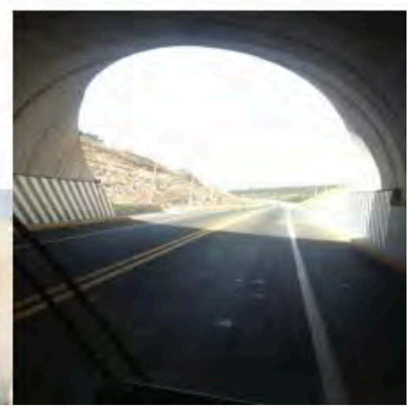
Arco: línea curva formada por dos puntos de la circunferencia y todos los que se encuentran entre ellos que llamaremos extremos. Se denota con $\widehat{AB}$, se lee arco AB.

Secante: recta que corta en dos puntos a una circunferencia $\overleftrightarrow{GI}$.

Tangente: recta que toca un punto de la circunferencia, el punto que toca se llama punto de tangencia H.

El perímetro de una circunferencia se calcula $P = 2\pi r$ y su área $A = \pi r^2$.

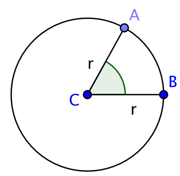





3.7. Ángulos notables en la circunferencia

3.7.1. Central

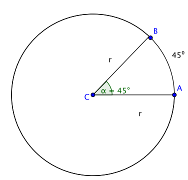
Es un ángulo que tiene precisamente su vértice en el centro de la circunferencia, por lo tanto sus lados son radios.



La medida de un ángulo central está dado por la medida del arco que está comprendido entre sus lados (radios) que se llama *arco subtendido*.

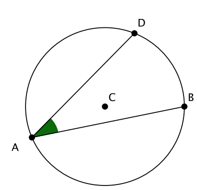
$$\measuredangle ACB = \widehat{AB}$$

Así por ejemplo el siguiente ángulo mide 45° que es la medida del arco:



3.7.2. Inscrito

Es el ángulo que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y sus lados cortan la circunferencia en dos puntos distintos al vértice.

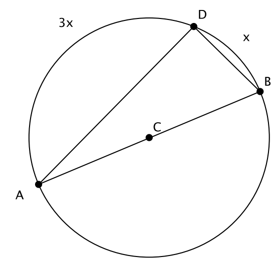


Teorema: todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

$$\measuredangle A = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

Ejemplos:

a) Considere que el ΔABC está inscrito en la circunferencia como se muestra en la siguiente figura, calcular los tres ángulos interiores del triángulo.



Observe que los tres ángulos interiores del triángulo son ángulos inscritos de la circunferencia, además la cuerda $\overline{AB}$ pasa por el centro, por lo tanto es también diámetro, de esto se puede deducir que $\widehat{AB}$ es una semicircunferencia ∴ 180°.

$$3x + x = 180°$$

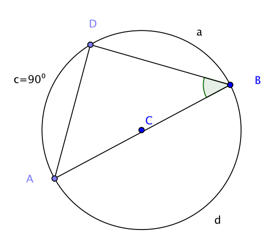
$$x = 45°$$

$$\measuredangle A = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{45°}{2} = 22.5°$$

$$\measuredangle B = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{135°}{2} = 67.5°$$

$$\measuredangle D = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

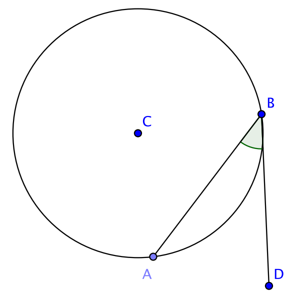
b) Calcular el valor del ángulo B si conocemos el arco $\hat{c} = 90°\ y\ \hat{d} = 2\hat{a}$.



Directamente podemos calcular el ángulo buscado ya que $\measuredangle B = \frac{90°}{2} = 45°$

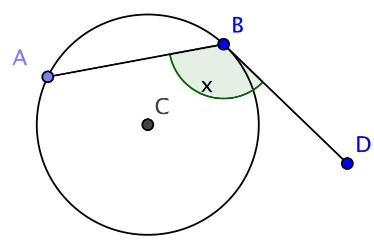
3.7.3. Semi-inscrito

Cuando una recta tangente a una circunferencia tiene un punto en común con una cuerda, el ángulo que forman la tangente y la cuerda se llama ángulo semi-inscrito.



Teorema: la medida de un ángulo semi-inscrito de una circunferencia, es igual a un medio de la medida del arco que subtiende el ángulo.

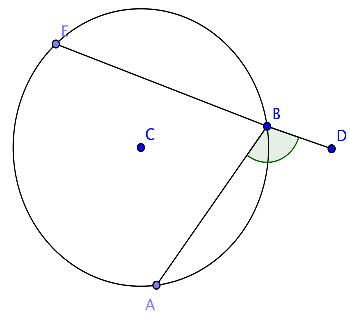
Ejemplo: si $\overrightarrow{BD}$ es tangente y $\widehat{AB} = 300°$, ¿cuánto mide el ángulo x?



El ángulo x es un ángulo semi inscrito, por lo tanto $\measuredangle x = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{300°}{2} = 150°$

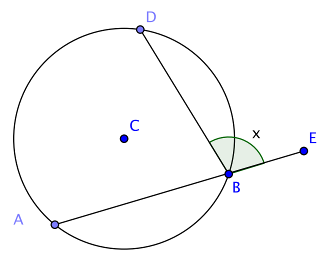
3.7.4. Ex-inscrito

Es el ángulo que es adyacente a un ángulo inscrito



Teorema: la medida de un ángulo ex-inscrito es igual a la medida del arco $\widehat{EBA}$

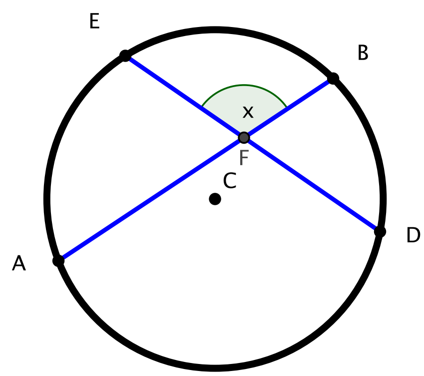
Ejemplo: Si $\widehat{AD} = 80°$, ¿cuánto vale x?



Por ser un ángulo ex-inscrito $\measuredangle x = \widehat{DBA} = 280°$

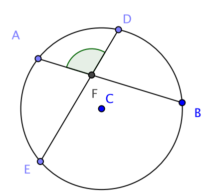
3.7.5. Interior

Es el ángulo que está formado por dos cuerdas que se cortan



Teorema: la medida de un ángulo exterior es la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados.

Ejemplos: dadas las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cortan en F, calcular



a) $\measuredangle x \;\; si\; \widehat{AD}+\widehat{EB}=200°$

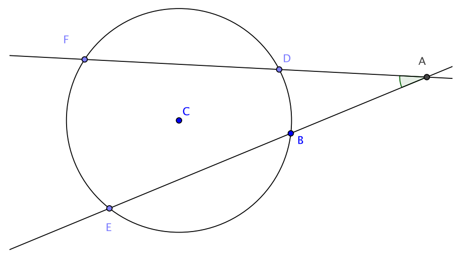
$$\measuredangle x=\frac{\widehat{AD}+\widehat{EB}}{2}=\frac{200°}{2}=100°$$

b) $\measuredangle x\; si\; \widehat{AE}=100°\;\; y\;\; \widehat{DB}=60°$

Como $\widehat{AE}+\widehat{DB}=160°$ entonces $\widehat{AD}+\widehat{EB}=200°$ y $\measuredangle x=\frac{\widehat{AD}+\widehat{EB}}{2}=\frac{200°}{2}=100°$

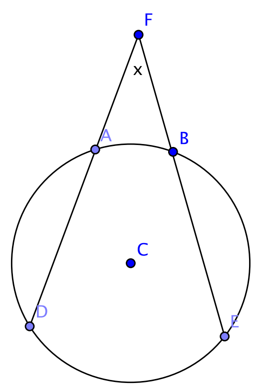
3.7.6. Exterior

Es el ángulo que está formado por dos secantes que se cortan en un punto fuera del círculo.



Teorema: la medida de un ángulo exterior a una circunferencia es igual a la semi diferencia de las medidas de los arcos que determinan los lados del ángulo en la circunferencia.

Ejemplo: si $\widehat{AB} = 15°$, $\measuredangle x = 25°$, hallar el valor de $\widehat{DE}$



Conocemos que $\measuredangle x = \frac{\widehat{DE}-\widehat{AB}}{2}$ sustituimos los valores dados y tenemos:

$$25° = \frac{\widehat{DE} - 15°}{2}$$

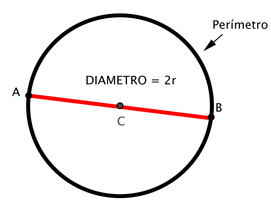
despejando:

$$50° = \widehat{DE} - 15°$$

por lo tanto $\widehat{DE} = 35°$

3.8. Cálculo de área y perímetro de una circunferencia

Si calculamos la medida alrededor de un círculo, nos indica la longitud o perímetro de la circunferencia, en Oriente próximo (s. VI a.C) del Libro de los Reyes, encontraron la relación que existe entre dicha medida y el diámetro de la circunferencia, encontrando que la relación era constante e igual a 3, los egipcios y babilonios encontraron un valor mayor que 3, Arquímides en su obra "Sobre la medida del círculo" concluye que el valor de esa relación que ahora llamamos pi[21], se encontraba entre $3\,\frac{10}{71}\; y\; 3\,\frac{1}{7}$, Tolomeo lo calculó en 3.1416, los informáticos Yasumasa Kanada Y Daisuke Takahashi consiguieron la aproximación de pi con 6000 millones de decimales, en 2009 se consiguió una aproximación de más de dos billones de decimales, cabe mencionar que esta relación no es constante en geometrías que no son planas. Este número irracional[22] aparece en las gotas de lluvia, en las burbujas de agua, en las estrellas, en los cálculos astronómicos, en este texto lo consideraremos como 3.14 para realizar cálculos.



$$\pi = \frac{P}{d} = \frac{P}{2r}$$

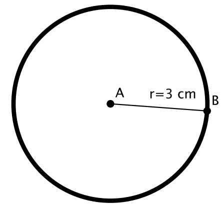
$$2\pi r = P$$

$$P = \pi d$$

Tenemos dos opciones para calcular el perímetro P de una circunferencia de diametro d, $P = \pi d$ o bien como $d = 2r$, $P = 2\pi r$.

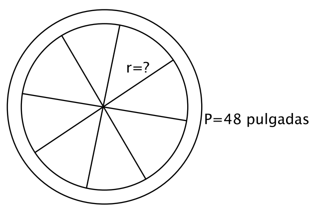
Ejemplos:

a) Calcular el perímetro de la circunferencia cuyo radio mide 3 cm.



$P = 2\pi r = 2(3.14)(3\ cm)$ =18.84cm.

b) Calcular el radio de la rueda de una bicicleta cuyo perímetro es 48 pulgadas.



Como , $P = 2\pi r$ sustituimos los datos conocidos y tenemos , $48 = 2\pi r$

despejando , $r = \frac{48 pulgadas}{2(3.14)} = 7.64\ pulgadas.$


Cocina tradicional michoacana, llena de formas y colores que nos identifican

3.9. Cálculo de volúmenes y áreas

El área es una medida de la extensión de una superficie bidimensonal.

El volúmen y el área están relacionados, por ejemplo hay que calcular el área de un espacio para instalar un equipo de aire acondicionado que cubra un volúmen específico.

Si deseamos pintar un muro es necesario calcular el área a pintar, para hacer el cálculo del volúmen de pintura que se necesita.

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo, es una magnitud física y se puede medir de acuerdo al sistema de unidades que se utilice, en cm^3, m^3, u otras equivalencias, lo puedes observar en las bebidas azucaradas donde se indica el contenido, el volumen nos ayuda a calcular la densidad de los líquidos ya que al dividir la masa entre el volumen de una sustancia calculamos su densidad, valiéndonos de este conocimiento podemos calcular la cantidad de gas necesaria para llenar un globo aerostático. En los cálculos en construcción es importante el volúmen de agua que quieres almacenar en tu aljibe para partiendo de ahí hacer el cálculo de las dimensiones de los muros, o viceversa, el volumen de la caja en una guitarra es fundamental para que tenga buena acústica.

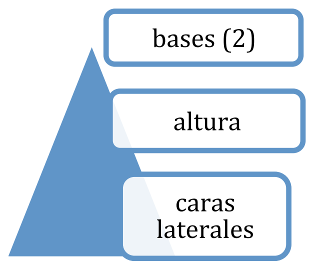


3.9.1. Prismas

Un poliedro es una porción del espacio limitada por polígonos.

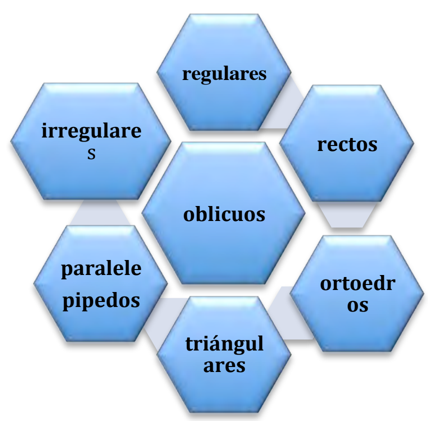
Un prisma es un poliedro limitado por dos caras paralelas (bases) iguales una al lado opuesto de la otra, y por caras laterales que son paralelogramos.

Los elementos de un prisma son:

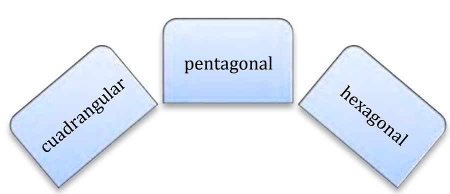


Los prismas se clasifican por sus caras y por la figura de sus lados.

La siguiente figura muestra toda la clasificación de los prismas



Además tenemos los prismas:



Cálculo del volumen en un prisma

Se calcula primero el área de la base y se multiplica por la altura, a continuación se muestran las fórmulas para calcular el área de algunos polígonos

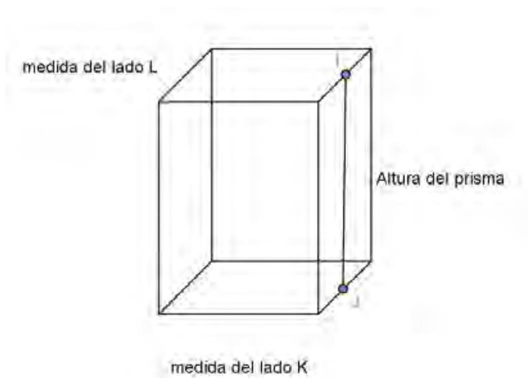
Triángulo $A = \frac{ba}{2}$

Cuadrado $A = l^2$

Pentágono $A = \frac{bh}{2}$

Rectángulo $A = bh$

Veamos algunos ejemplos de cálculo de volúmenes en prismas:



Calculemos el volumen del prisma rectangular que se muestra en la figura, donde $k = 10\ cm\ , L = 5\ cm\ y\ altura\ IJ = 20cm.$

El área de la base es un rectángulo por lo tanto su área es:

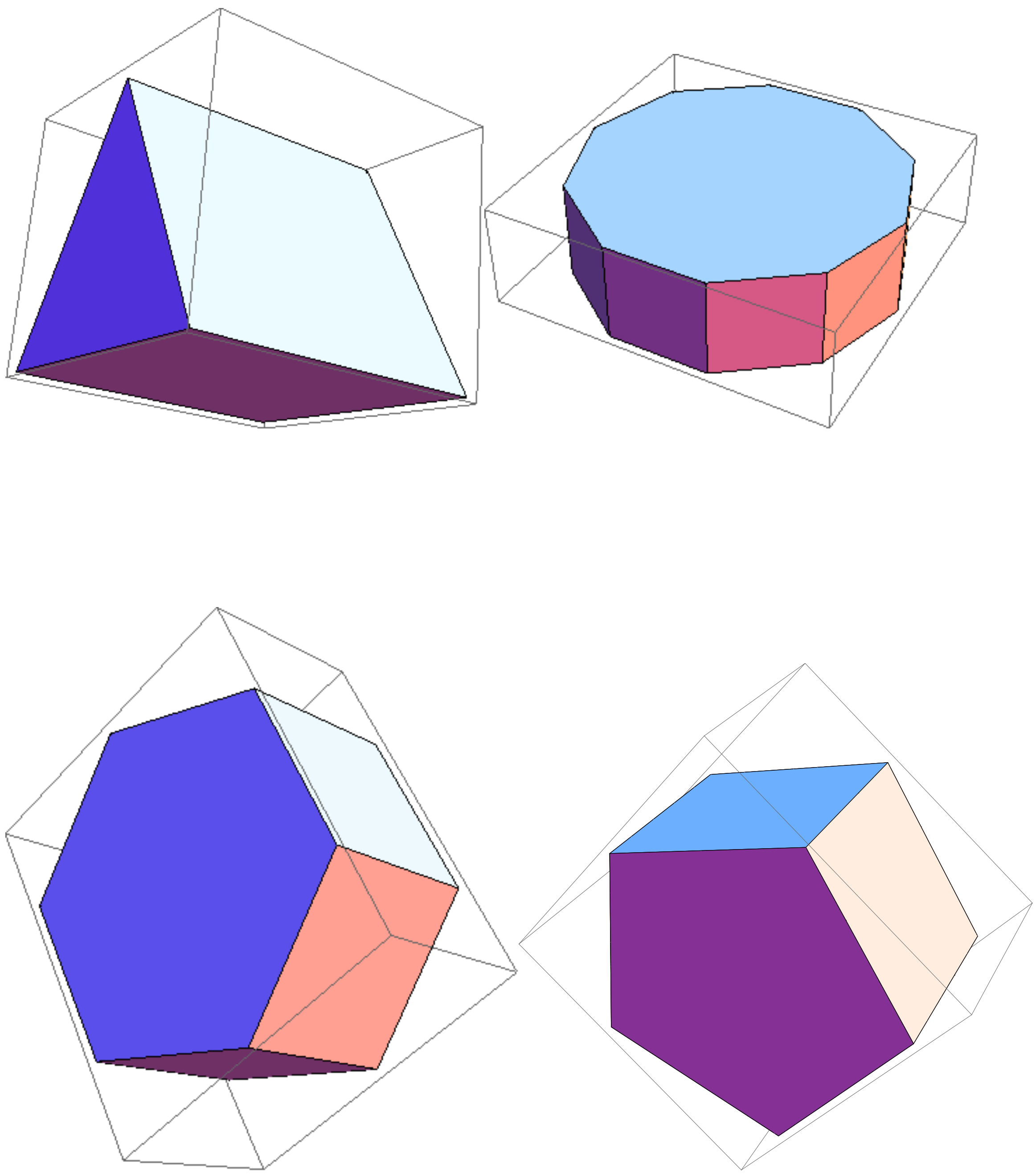
$$A_b = bh = LK$$

$A_b = bh = (10cm)(5cm) = 50cm^2$

Así su volumen es igual al producto del área de su base por la altura $IJ = 20\ cm$

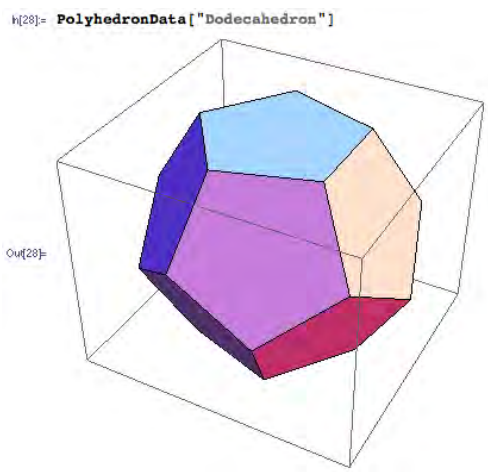
$$V = A_b h = (50\ cm^2)(20cm) = 1{,}000cm^3$$

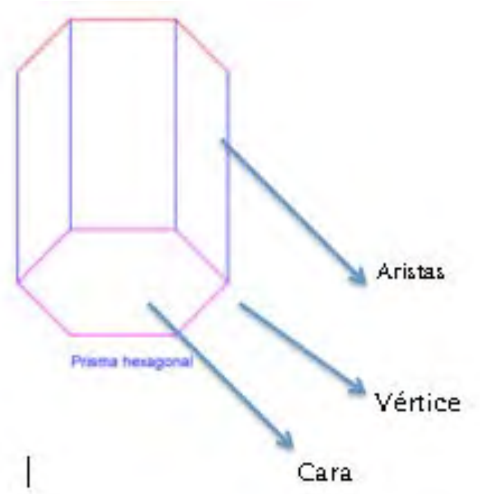
Figuras de algunos prismas:



3.9.2. Poliedros

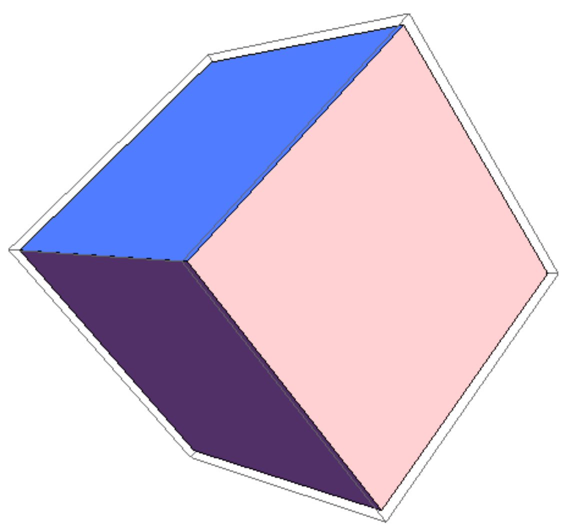
Los poliedros están formados por dos caras que son polígonos y sus caras laterales que son paralelogramos, a continuación mediante la siguiente figura se muestran los elementos que los forman.





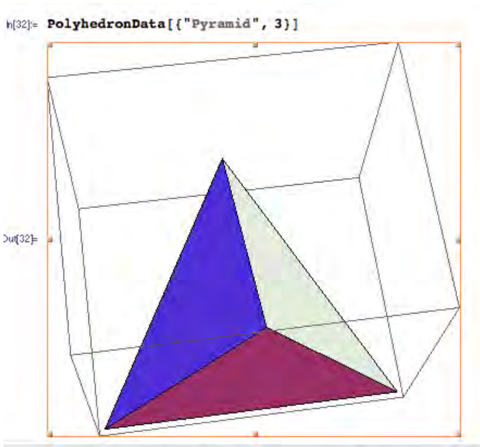
3.9.3. Paralepípedos

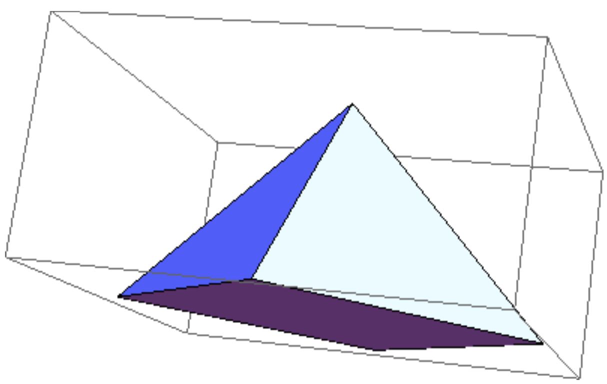
Los paralepípedos son cuadriláteros en los que sus lados opuestos son paralelos e iguales.

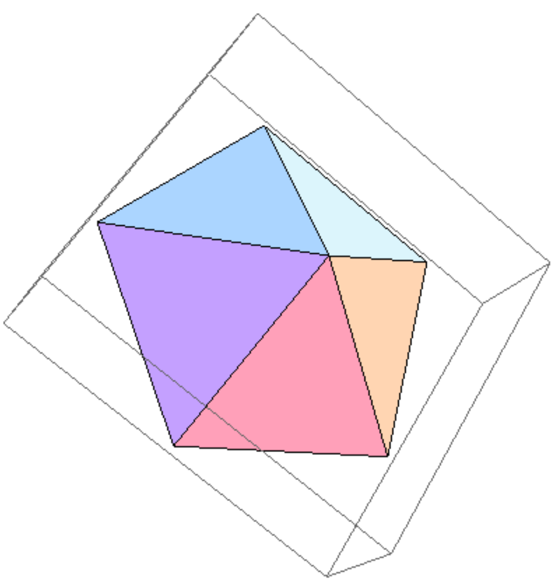


3.9.4. Pirámides

La base de una pirámide es un polígono, sus caras son triángulos que concurren en un punto llamado ápice.

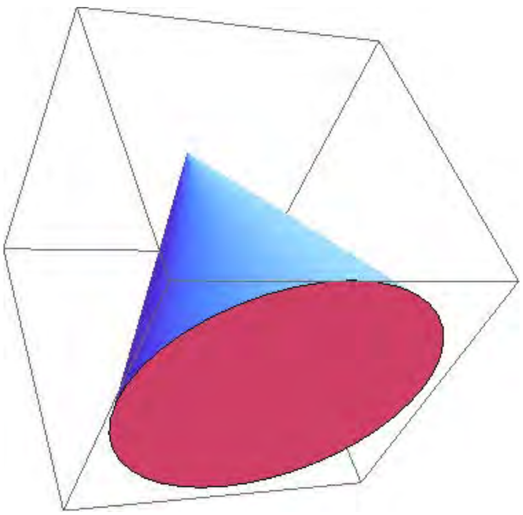


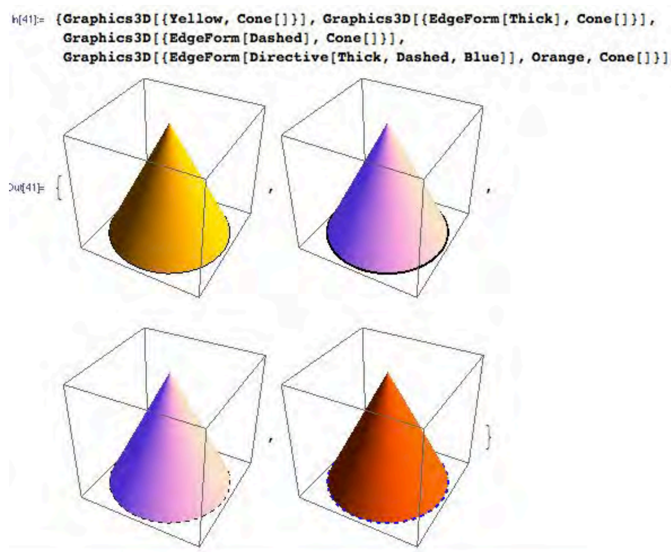




3.9.5. Cono

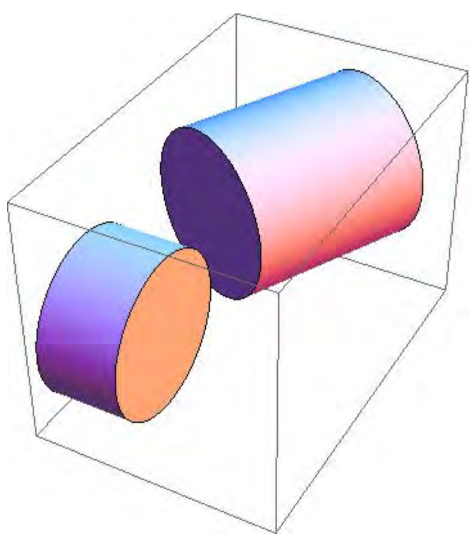
Si giramos un triángulo rectángulo respecto de alguno de sus catetos la figura generada se llama cono, su base es circular.





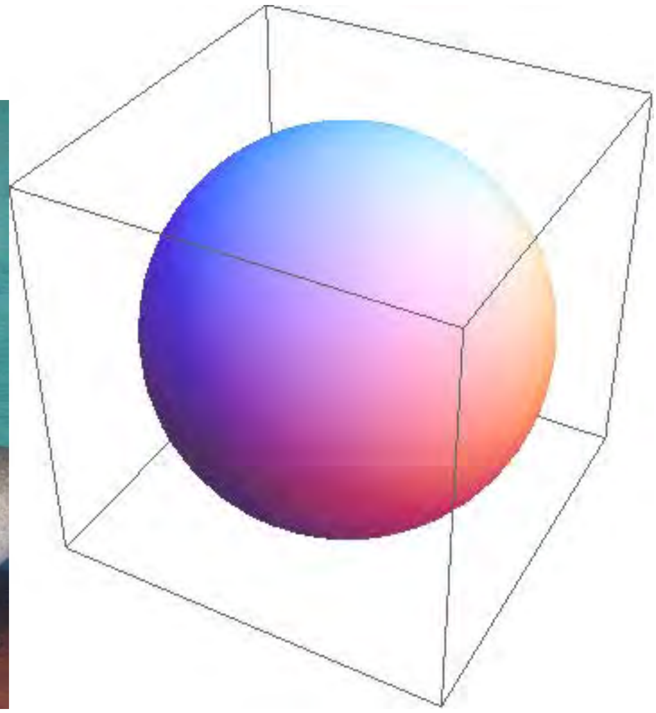
3.9.6. Cilindro

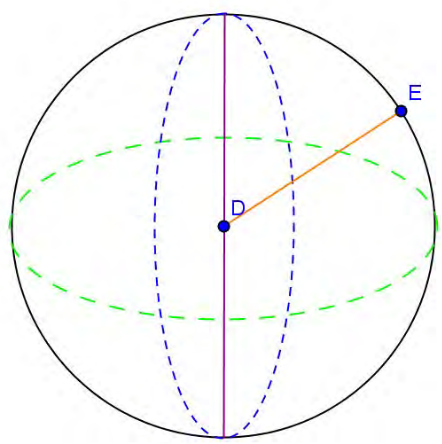
Si giramos un rectángulo respecto a uno de sus lados el cuerpo geométrico engendrado se llama cilindro.



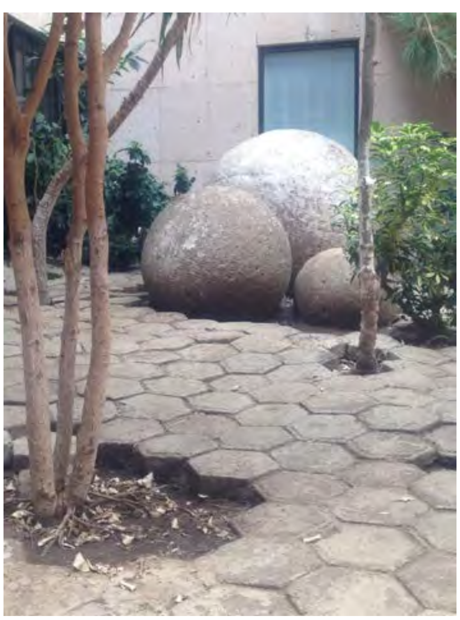
3.9.7. Esfera

Si hacemos girar una semicircunferencia respecto de su diámetro, el cuerpo geométrico engendrado se llama esfera.





Esfera

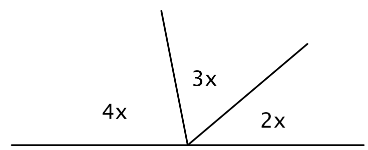


3.10. Problemario

1. Convertir $\frac{3\pi}{5}$ radianes a grados sexagesimales

2. Convertir 125° a radianes

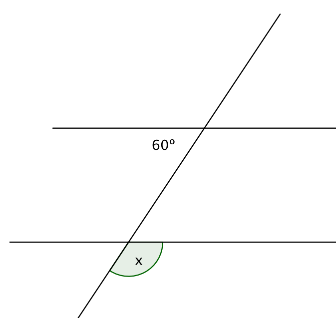
3. Calcula la medida de los ángulos indicados en la figura siguiente:



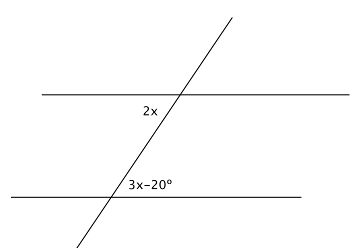
4. Calcula el complemento de 37° 42′ 56"

5. Calcular el suplemento de 123° 23′23”

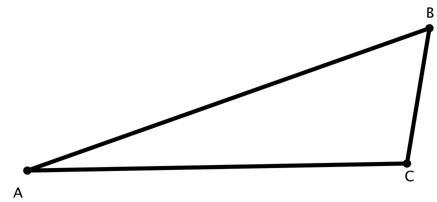
6. Calcular el valor del ángulo x



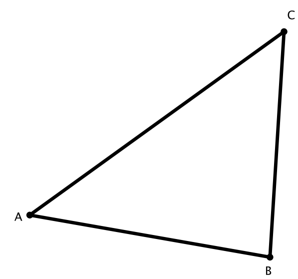
7. Calcular el valor de x



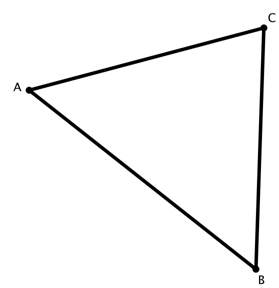
8. Trazar el punto "G" en el triángulo siguiente:



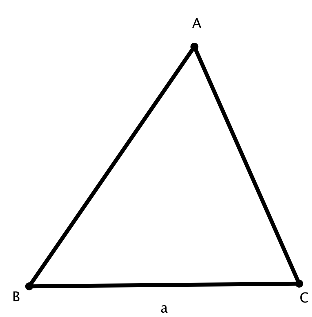
9. Encuentra el incentro del triángulo siguiente:



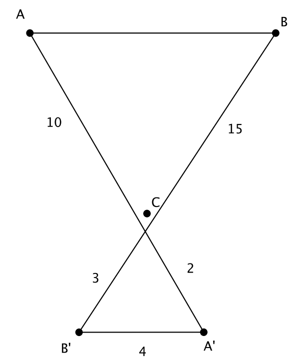
10. Encuentre el circuncentro del triángulo siguiente:



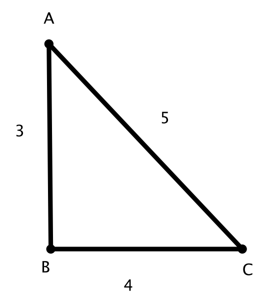
11. Trazar la altura del lado a en el triángulo siguiente:



12. Calcular la longitud de $\overline{AB}$ si los triángulos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$



13. Calcular el área del triángulo rectángulo siguiente:

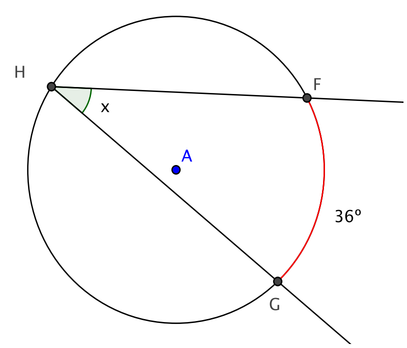


14. Calcular el área del triángulo cuyos lados miden 4cm, 5cm y 6cm.

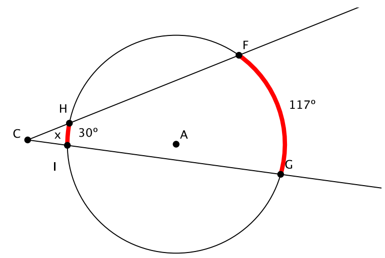
15. Calcular el perímetro de la circunferencia cuyo radio es igual a 10 cm

16. Calcular el área de una circunferencia de diámetro 7 cm

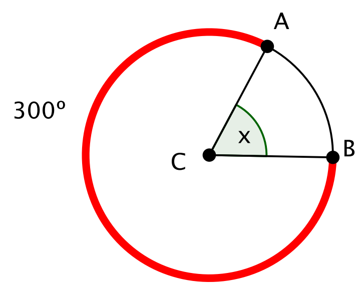
17. Calcular el valor del ángulo x



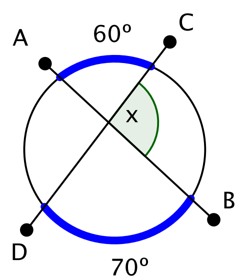
18. Calcular el valor del ángulo x



19. Calcular el valor del ángulo x



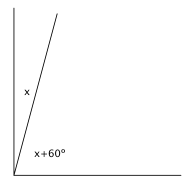
20. Calcular el valor del ángulo x



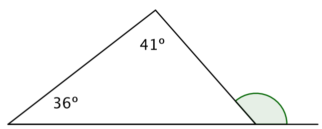
3.11. Autoevaluación

1. Convertir $\frac{3\pi}{5}\ rad$ a grados sexagesimales

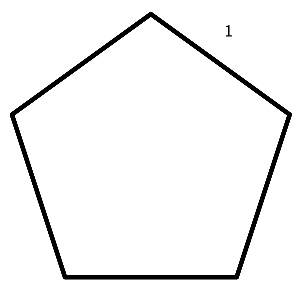
2. En la figura siguiente calcular el valor de x y de los ángulos



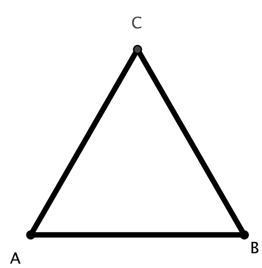
3. Calcular el valor del ángulo x



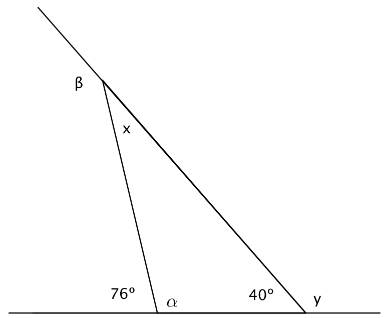
4. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular de lado 1?



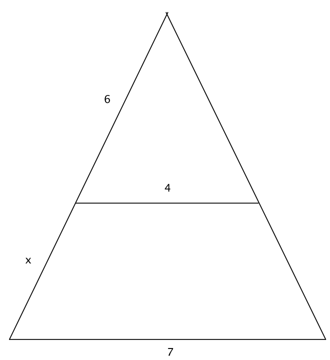
5. Traza la altura, mediana, mediatriz y bisectriz en la base del siguiente triángulo equilátero.



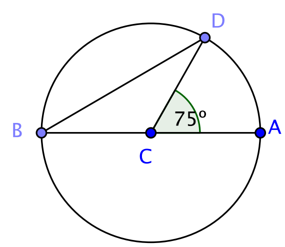
6. Hallar el valor de los ángulos x, y, α y β del siguiente triángulo



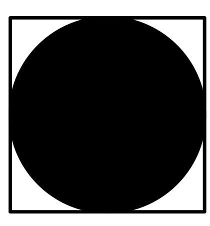
7. Calcular el valor de x



8. Si $\measuredangle ACD = 75°$, calcular el valor del ángulo $\measuredangle ADB$



9. Calcular el área sin colorear de un cuadrado de lado 20 cm

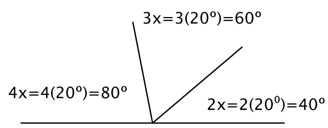


3.12. Soluciones del problemario

1. 108°

2. $\frac{25\pi}{36}$

3.



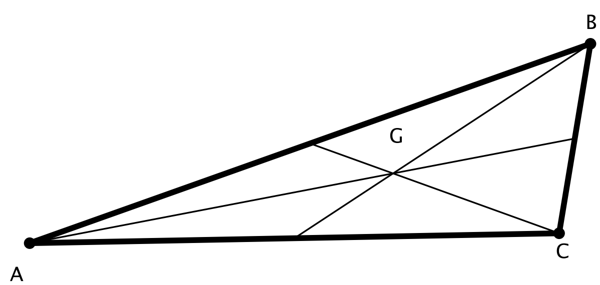
4. 52° 17′ 04"

5. 56° 36′37”

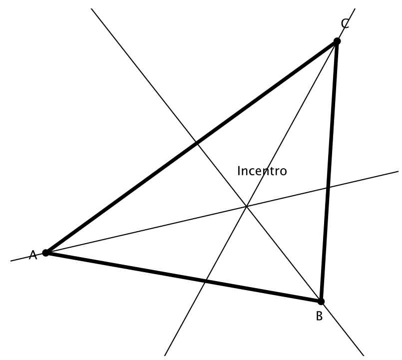
6. $x = 120°$

7. $x = 20°$

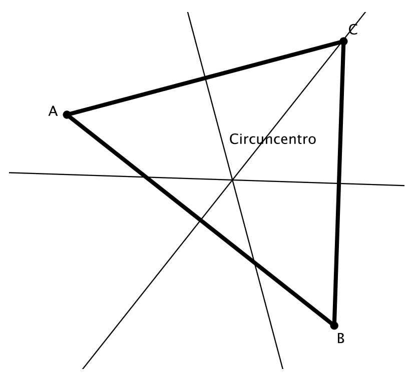
8.



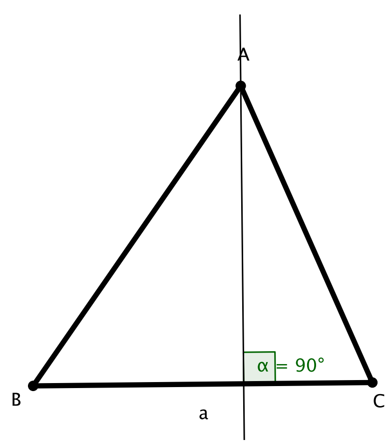
9.



10.



11.



12. $\overline{AB} = 20$

13. $A = \frac{bh}{2} = \frac{(4)(3)}{2} = 6u^2$

14. $A = 9.9cm^2$

15. $62.8\ u$

16. $A = 38.46u^2$

17. $A = \frac{\widehat{FG}}{2} = \frac{36°}{2} = 18°$

18. $\measuredangle x = 43.5°$

19. $60°$

20. $\widehat{AC} + \widehat{DB} = 60° + 70° = 130° \therefore \widehat{AD} + \widehat{BC} = 230°$

$$\measuredangle X = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{230°}{2} = 115°$$

3.13. Soluciones de la autoevaluación

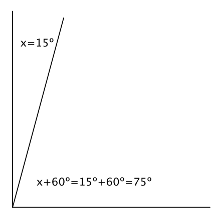
1. 108°

2.

$$x + x + 60° = 90°$$

$$2x = 30°$$

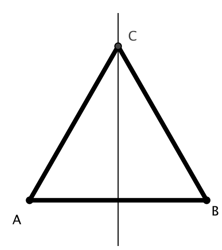
$$x = 15°$$



3. $\measuredangle x = 77°$

4. 108°

5. En un triángulo equilátero, todas las rectas notables y puntos notables coinciden



6. $\measuredangle x = 36°$

$\measuredangle y = 140°$

$\measuredangle \alpha = 104°$

$\measuredangle \beta = 144°$

7. $\frac{6+x}{6}=\frac{7}{4}$

$24+4x=42$

$4x=18$

$x=4.5$

8. $\measuredangle ABD=37.5°$

9. Calcular el área del cuadrado de lado 20 cm y restar el área de la circunferencia de radio 10 cm, $A=337.2\ cm^2$

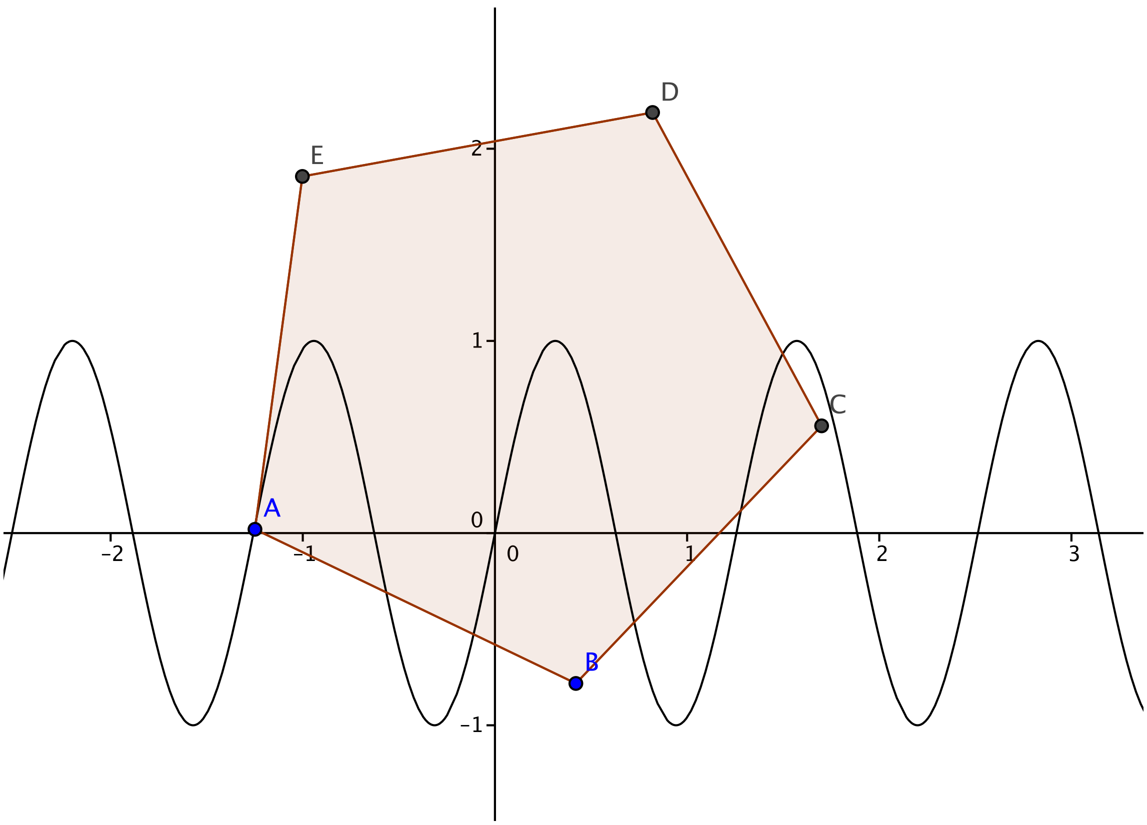
3.14. Conclusiones

Como se observó en el capítulo apenas es una pequeña introducción al amplio mundo de la geometría, se vieron algunas propiedades del triángulo, así como de algunos polígonos, además de calcular el área y el volumen de algunas figuras geométricas; es importante hacer énfasis en que la geometría plana tiene muchas aplicaciones científicas, tecnológicas y de uso diario, pero que existen otro tipo de geometrías que es importante investigues ya que aunque no cumplen con algunas propiedades de la geometría plana tienen muchas aplicaciones actualmente, por lo que te invitamos a profundizar en el maravilloso mundo de la geometría.

Referencias

[1] Levin Judith (2009) Hammurabi. USA: Infobase Publishing.
[2] Cardona Ángel (2012) Breve historia de la astronomía. España: Ediciones Nowtilus, S.L.
[3] Tapia Víctor (2010)Formas y geometría de rango superior. Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.
[4] Kasner Edward, Newman James(2007) Matemáticas y la imaginación. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.
[5] Xuan Thuan Trinh (1988) La Mélodie secrète. España: Ediciones de Intervención Cultural/Biblioteca Buridán
[6]Jean-Paul Collette(1993) Historia de las Matemáticas Vol. II. España: Siglo XXI de España Editores, S.A.
[7] Levi Beppo (2006) Leyendo a Euclides. Argentina: Libros del Zorzal.
[8] Guardeño Antonio, Ferreirós José (2001) España: Universidad de Sevilla Secretariado de Publicaciones.
[9] Boix Francisco (2011) Matemáticas. 1ª unidad didáctica 1º ESO. España: Editorial Club Universitario.
[10] Serway Raymond, Jewett John (2009) Física para ciencias e ingeniería. México: Ceangage Learning.
[11] Corona Rafael, González Francisco et al. (2011) Manejo de espacios y cantidades. México: CONALEPMICH.
[12] Contreras Lira, Jaime Patricia et al. (2006) México: Umbral Editorial, S.A. de C.V.
[13] Brinton George, Weir Marice et al. (2005) Cálculo: una variable. México: Pearson Education.
[14] Lira Ana, Jaime Patricia et al. (2006) Geometría y trigonometría. México: Umbral Editorial, S.A. de C.V.
[15] González Francisco, Corona Rafael, et al.(2011) Manejo de espacios y cantidades. México: CONALEPMICH.
[16] Cuenca Eugenio M. (2006) Fundamentos de Fisiología. España: Thomson Editores Paraninfo S.A.
[17] Jiménez Douglas (2005) Geometría, el encanto de la forma. Caracas: Editorial CEC, S.A.
[18] Rodríguez Marisol (2011) Representación gráfica de funciones. México: CONALEPMICH
[19] Kasner Edward & Newman James (2007) Matemáticas e imaginación . México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.
[20] Galindo Jesús (2005) Matemáticas 4 Geometría Analítica . México: Umbral, editorial, S.A. de C.V.
[21] Arenas S. Concepción (2007) Matemáticas: fichas de la asignatura .España: Publicaciones Universidad de Barcelona.
[22] Corona Rafael & Gónzález Francisco (2011) Manejo de espacios y cantidades. México: CONALEPMICH

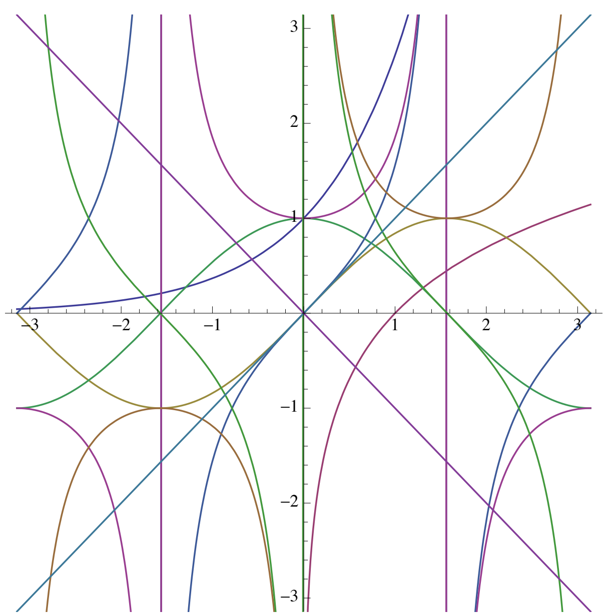
Capítulo 4: Trigonometría



4. Trigonometría

La trigonometría es una rama de las matemáticas, su etimología proviene de *trígono triángulo* y *metría medida*, su origen es muy antiguo, los egipcios y babilonios estudiaron problemas particulares, por ejemplo utilizando una cuerda con 3 , 4 y 5 nudos y observaron que formaban un triángulo rectángulo que les servía para cortar en ángulo recto las piedras utilizadas en las pirámides, otro ejemplo son los cálculos astronómicos tan exactos en la localización de cuerpos celestes. Actualmente seguimos usando la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos que los egipcios establecieron hace más de 3 000 años[1].

Los astrónomos en la India desarrollaron un sistema trigonométrico basado en la función seno, que no es como lo conocemos ahora, es hasta el siglo XIII que el astrónomo Georges Joachim introdujo el concepto moderno de funciones trigonométricas como proporciones, pero es hasta 1600 que se acuñó el término *trigonometría*.



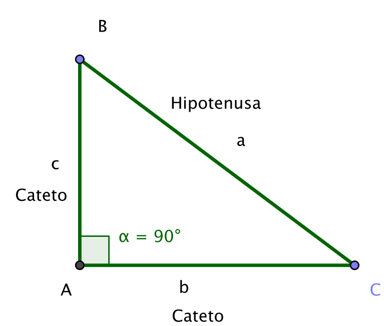
Gráfica de las funciones trigonométricas, logarítmica y exponencial

4.1. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los más famosos, es tan famoso que se conocen aproximadamente 400 demostraciones diferentes, siendo la demostración de Euclides la que se reconoce como primera[2]. En la edad media se le conocía como "pons asinorum" que significa "el puente de los asnos" el cual una vez cruzado es decir cuando se conocía, se llegaba a ser una persona culta.

El teorema de Pitágoras es una proposición que aplica solo a triángulos rectángulos, no se tiene la certeza de que Pitágoras lo haya demostrado alguna vez[3].

Recordemos que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto, sus lados reciben nombres especiales, sus lados perpendiculares los que forman el ángulo recto, se llaman catetos y el lado mayor, el que se opone al ángulo mayor (90º), recibe el nombre de hipotenusa, esto se ilustra en la siguiente figura.



Teorema de Pitágoras:

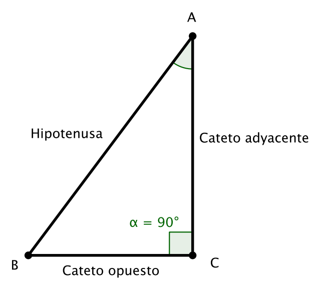
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Expresado en forma algebraica: $a^2 = b^2 + c^2$

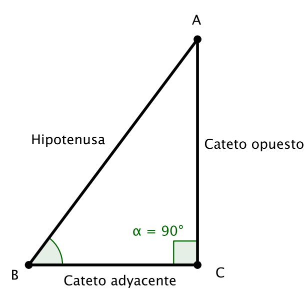
El cateto adyacente es uno de los lados perpendiculares del triángulo que forma uno de los lados del ángulo agudo junto con la hipotenusa, en la figura anterior el cateto adyacente respecto del ángulo agudo C es b, y respecto del ángulo agudo B el cateto adyacente es c.

El cateto opuesto, como su nombre lo indica es el que se opone al ángulo agudo, o el que no es adyacente, en la figura anterior, el cateto opuesto al ángulo agudo C es c, y el cateto opuesto al ángulo B es b.

En el siguiente triángulo se muestran los catetos adyacente y opuesto respecto del ángulo A.

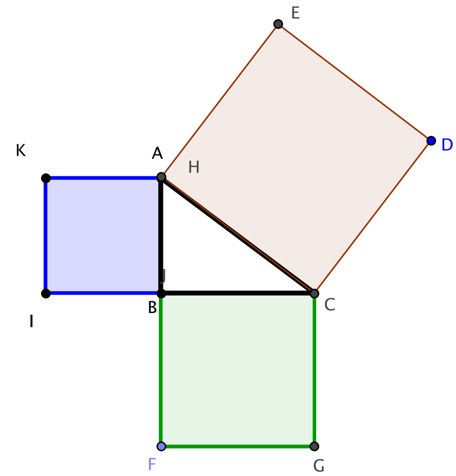


En el siguiente triángulo se muestran ahora los catetos respecto del ángulo agudo B.



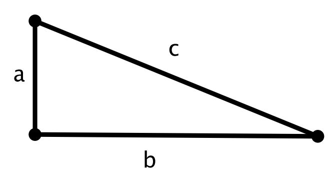
Note que la hipotenusa siempre es el lado mayor del triángulo rectángulo, la puedes identificar por ser el lado opuesto al ángulo recto, recordando las propiedades de triángulos; a mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa, en dicho triángulo el ángulo mayor es de 90º.

Una forma de demostrar el teorema de Pitágoras es verificar que el área del cuadrado que se forma en el lado mayor, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados perpendiculares.



La siguiente es la forma algebraica de su demostración.

Demostración algebraica:

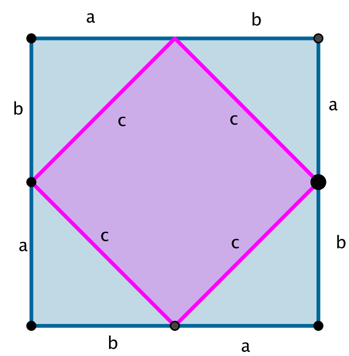


Hipótesis: Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo, y c la hipotenusa.

Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$

Demostración:

Consideremos el cuadrado de lado $(a + b)$



el área del cuadrado de lado $(a + b)$ es:

$$A = (a + b)^2$$

Como el "todo" es igual a la suma de sus partes, el área total del cuadrado es igual a la suma de las áreas del cuadrado interior de lado c, más los cuatro triángulos de lados perpendiculares a y b.

$$A = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$$

Por otro lado si elevamos al cuadrado el binomio

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

sustituyendo lo anterior en:

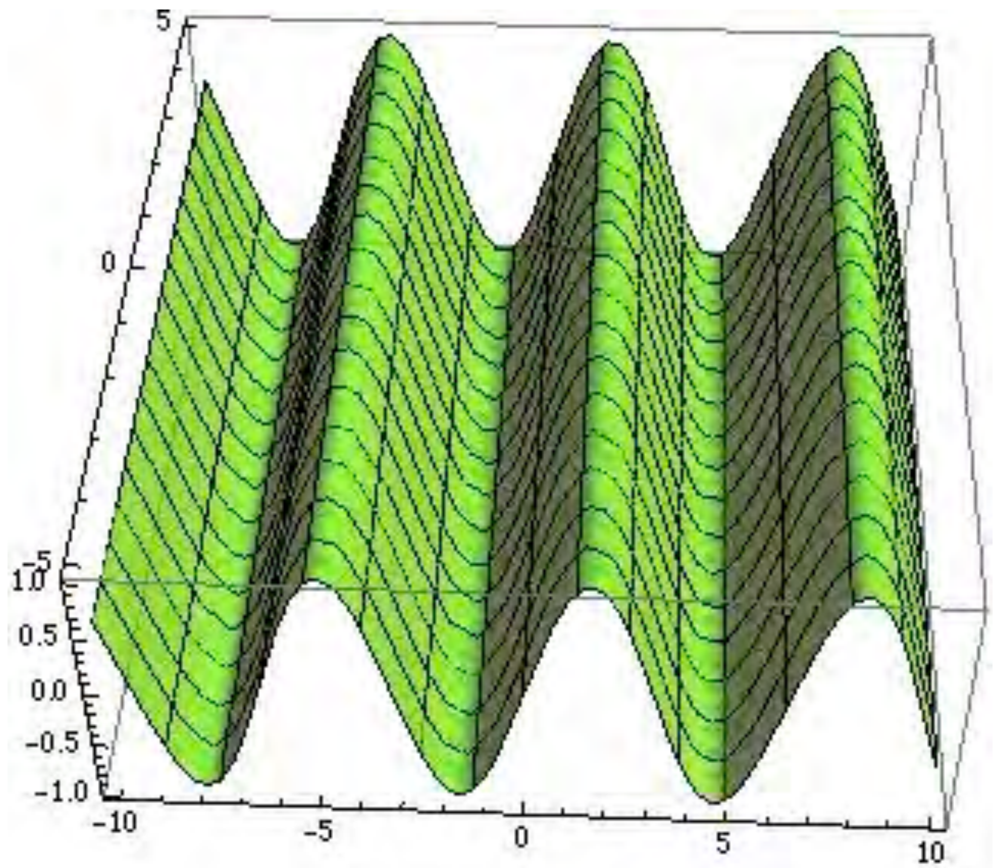
$$A = (a + b)^2$$

$$c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

reduciendo términos semejantes

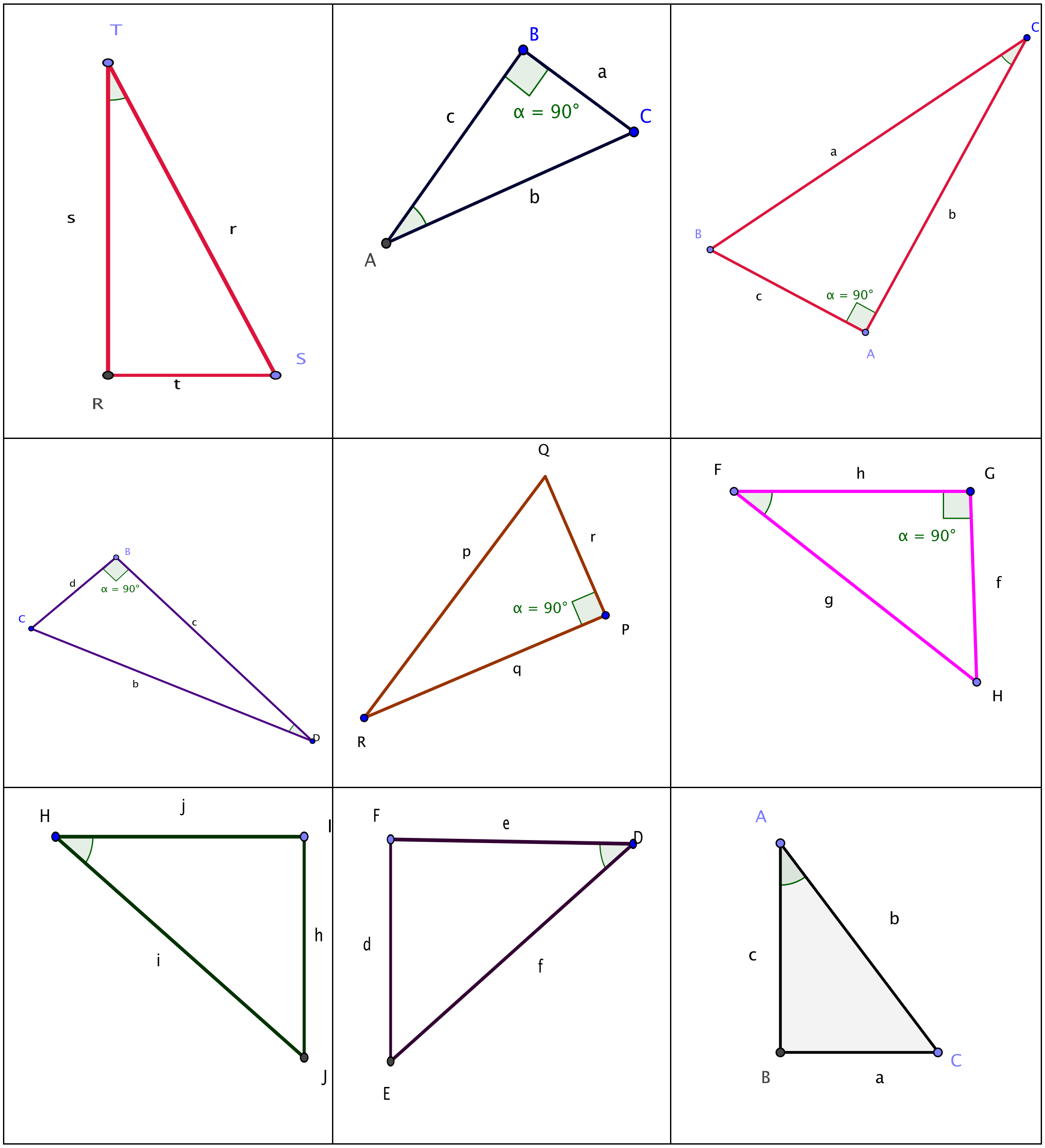
$c^2 = a^2 + b^2$

Curiosidades matemáticas:
El principio fundamental de Pitágoras era: "Todo es número"



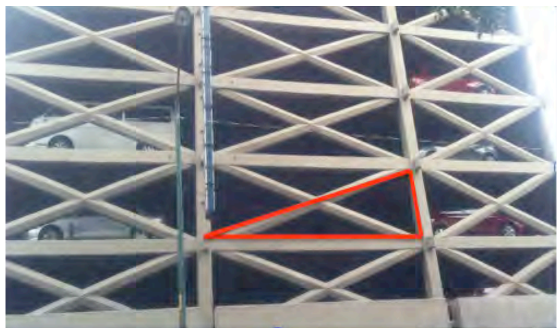
Gráfica de la función seno en 3D

Para practicar: en cada uno de los triángulos rectángulos, respecto del ángulo agudo marcado, indica el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa.

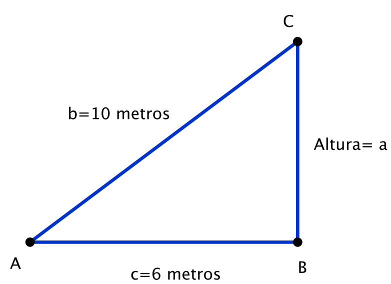


El teorema de Pitágoras se utiliza para encontrar un lado de un triángulo rectángulo conocidos los otros dos, a continuación ejemplificaremos su aplicación.

En un estacionamiento de la Ciudad de México se quiere calcular la altura máxima del auto que se puede estacionar, si se conoce que la diagonal (hipotenusa) mide 10m y la distancia horizontal mide 6m.



Tomando el triángulo rectángulo que se forma y aplicando el teorema de Pitágoras



$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

$$(10\text{m}) = (a)^2 + (6\text{m})^2$$

$$100\text{m}^2 = a^2 + 36\text{m}^2$$

$$100\text{m}^2 - 36\text{m}^2 = a^2$$

$$64\text{m}^2 = a^2$$

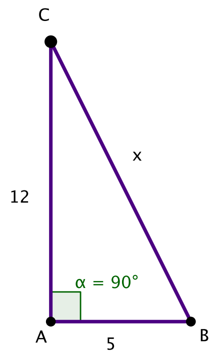
$$\sqrt{64m^2} = \sqrt{a^2}$$

$$8m = a$$

∴ la altura máxima es 8m.

En los siguientes triángulos calcular el valor de x

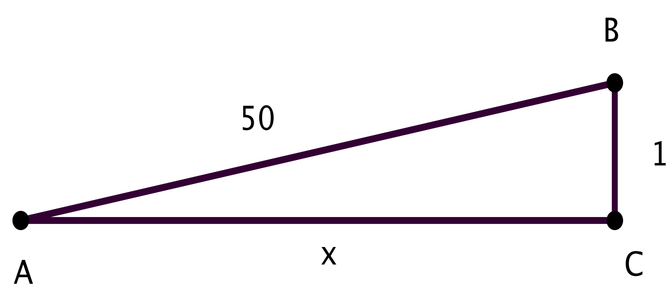
a)



El lado faltante x es la hipotenusa, aplicando el teorema de Pitágoras

$$x^2 = (12)^2 + (5)^2$$
$$x^2 = 144 + 25$$
$$x^2 = 169$$
$$x = 13$$

b)



La hipotenusa tiene el valor de 50 y uno de los catetos 1, aplicando el teorema de Pitágoras.

$50^2 = x^2 + 1^2$

$2500 = x^2 + 1$

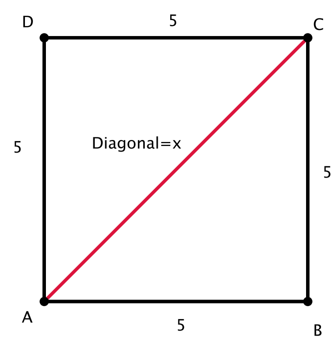
$2500 - 1 = x^2$

$2499 = x^2$

$\sqrt{2499} = x$

$x = 49.98$

c) El lado de un cuadrado mide 5 unidades, ¿cuánto mide la diagonal?



Note que se forman dos triángulos rectángulos iguales, donde la diagonal es x y los catetos son los lados de longitud 5, aplicando el teorema de Pitágoras

$$x^2 = 5^2 + 5^2$$

$$x^2 = 25 + 25$$

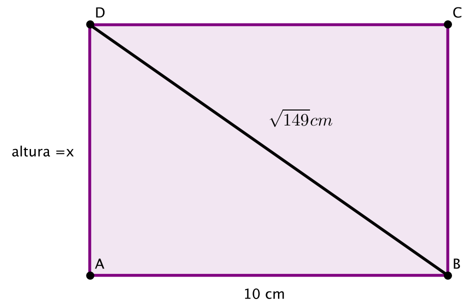
$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50}$$

Factorizando $50 = 25 \times 2$ $\qquad x = \sqrt{25 \times 2}$

reduciendo $\qquad x = 5\sqrt{2}$

d)Calcula la altura de un rectángulo de base 10cm y diagonal $\sqrt{149}$cm.



Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\left(\sqrt{149}\,cm\right)^2 = x^2 + (10cm)^2$$

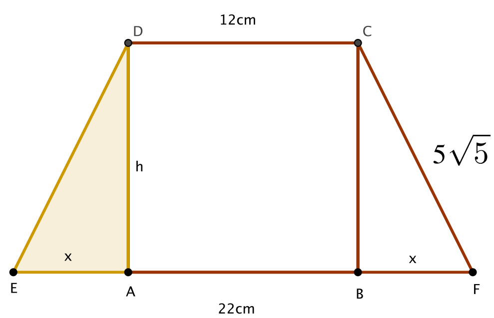
$$149cm^2 = x^2 + 100cm^2$$

$$149cm^2 - 100cm^2 = x^2$$

$$49cm^2 = x^2$$

$$x = 7cm$$

e) Calcular la altura del siguiente trapecio isósceles

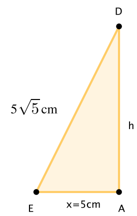


La base mayor mide $x + 12cm + x = 22cm$

$2x = 22cm - 12cm$

$x = 5cm$

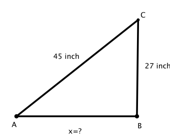
tomemos el triángulo



Aplicando el teorema de Pitágoras

$$\left(5\sqrt{5}cm\right)^2 = (5cm)^2 + h^2$$
$$125cm^2 = 25cm^2 + h^2$$
$$h = 10cm$$

f) Un televisor rectangular de pantalla plana tiene 45 pulgadas de longitud por la diagonal, su altura es 27 pulgadas (inch). ¿Qué largo tiene expresado en cm?



Utilizando el teorema de Pitágoras:

$(45inch)^2 = (27inch)^2 + (x)^2$

$2025inch^2 = 729inch^2 + x^2$

$x^2 = 1296inch^2$

$x = 36\ inch$

para convertir pulgadas (inch) a cm, necesitamos la equivalencia: 1 inch= 2.54 cm

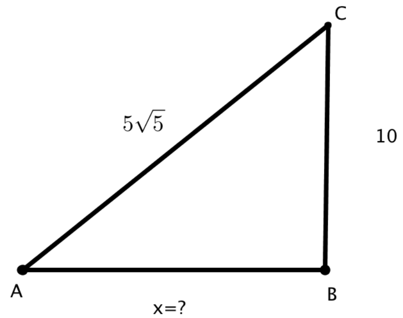
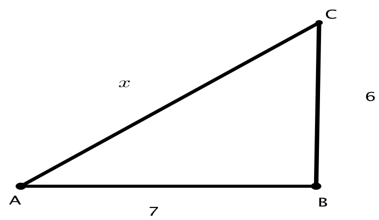
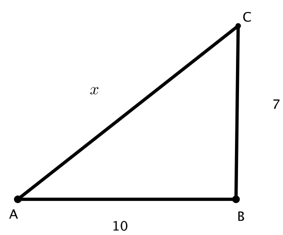
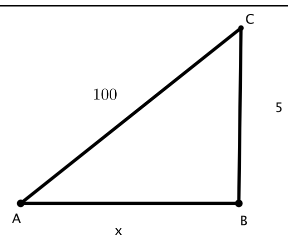
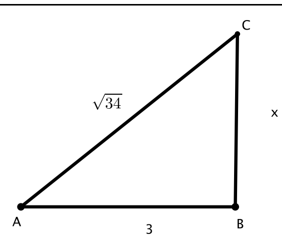
$1\ inch = 2.54\ cm$

$36\ inch = \ x\ cm$

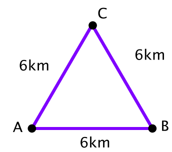
$x = \dfrac{36\ inch \times 2.54cm}{1\ inch}$

$x = 91.44cm$

Para resolver: en equipos encontrar el valor del lado faltante x en cada uno de los triángulos rectángulos siguientes:

	$x=$
	$x =$
	$x =$
	$x =$
	$x =$

Para resolver: el lado de un triángulo equilátero mide 6km, calcular su área



4.2. Funciones trigonométricas

En el capítulo anterior definimos una función e identificamos las propiedades de dos de ellas; la función exponencial y la logarítmica, en este capítulo nos encontramos con otro tipo de funciones llamadas transcendentes[4], de las que unas de las más importantes son las *funciones trigonométricas* que son muy importantes en ciencias físicas, ya que ayudan a describir el movimiento de tipo periódico, como el ondulatorio.

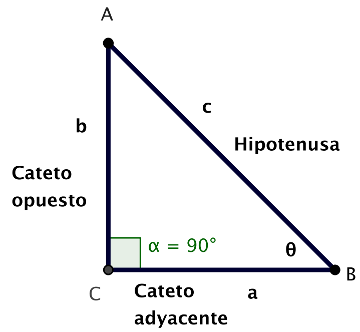
Las principales funciones trigonométricas son $seno$, $coseno$ y $tangente$, a partir de estas se definen otras, las más importantes son $cosecante$, $secante$ y $cotangente$.

Es importante recordar que las funciones trigonométricas se aplican a los ángulos agudos en triángulos rectángulos.

Aquí utilizaremos la definición de las funciones trigonométricas a partir de la relación entre sus lados, pero también se pueden definir mediante series[5] .

Definiciones de las funciones trigonométricas

Considere el ΔABC rectángulo en C, designemos θ el ángulo interior del vértice B.



La función seno de un ángulo θ, la abreviamos $sen\,\theta$. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$sen\,\theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$sen\,\theta = \frac{b}{c}$$

La función coseno de un ángulo θ, la abreviamos $cos\,\theta$. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$cos\,\theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$cos\,\theta = \frac{a}{c}$$

La función tangente de un ángulo θ, la abreviamos $tan\,\theta$. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$tan\,\theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

$$tan\ \theta = \frac{b}{a}$$

A partir de estas tres funciones definimos sus recíprocas, cabe recordar que son recíprocas si su producto es igual a uno.

La función *cosecante* de un ángulo θ, la abreviamos $\csc\theta$. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$csc\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$$

$$\csc\ \theta = \frac{c}{b}$$

La función *secante* de un ángulo θ, la abreviamos $\sec\theta$. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$sec\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$$

$$sec\ \theta = \frac{c}{a}$$

La función *cotangente* de un ángulo θ, la abreviamos $\cot\theta$. Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

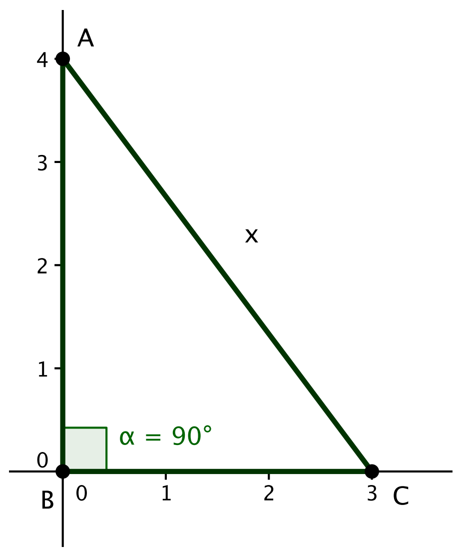
$$cot\ \theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}$$

$$\cot\,\theta = \frac{a}{b}$$

Resumen de las funciones trigonométricas:

FUNCIÓN	RECÍPROCA
$sen\ \theta = \dfrac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$	$\csc\theta = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$
$\cos\theta = \dfrac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$	$\sec\theta = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$
$\tan\theta = \dfrac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$	$Cot\ \theta = \dfrac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}$

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm, calcularemos las funciones trigonométricas del ángulo agudo menor, expresando los resultados en forma fraccionaria irreducible.



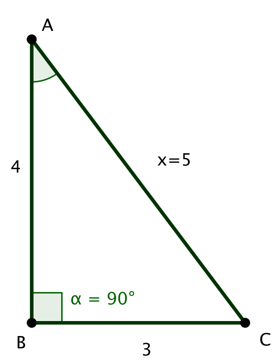
Para calcular las funciones trigonométricas necesitamos los tres lados del triángulo, comenzaremos por aplicar el teorema de Pitágoras para hallar el lado faltante, la hipotenusa.

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

$x = 5$



Una vez que tenemos los tres lados debemos identificar cuál es el ángulo agudo menor, por propiedades de triángulos a menor lado se opone menor ángulo y viceversa, por lo tanto el ángulo $\measuredangle A$ es el menor, a continuación calcularemos las funciones trigonométricas del ángulo agudo A.

$$sen\, A = \frac{3}{5} \qquad \csc A = \frac{5}{3}$$

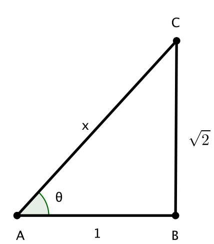
$$\cos A = \frac{4}{5} \qquad \sec A = \frac{5}{4}$$

$$\tan\ A = \frac{3}{4} \qquad \cot A = \frac{4}{3}$$

Curiosidades matemáticas:

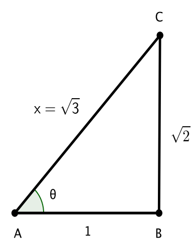
Bertrand Russell describió a Pitágoras como "Uno de los hombres más importantes desde un punto de vista intelectual que haya vivido jamás, tanto por su sabiduría como por su insensatez"

Encuentre el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en el siguiente triángulo rectángulo:



El lado faltante es la hipotenusa a la que denotamos con x, aplicando el teorema de Pitágoras para calcular su valor:

$$x^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2 + 1$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3}$$

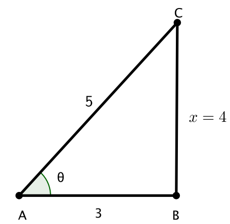


Tenemos los tres lados conocidos, ahora podemos calcular las seis funciones del ángulo θ.

$$sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$\sec\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dada la función $\cos\theta = \frac{3}{5}$ calcular las funciones trigonométricas faltantes.



$\cos\theta = \frac{3}{5} = \frac{\textit{Cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$ su recíproca $\sec\theta = \frac{5}{3}$

El lado faltante es un cateto que calcularemos por medio del teorema de Pitágoras

$5^2 = 3^2 + x^2$

$25 = 9 + x^2$

$16 = x^2$

$x = 4$

$$sen\ \theta = \frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

Para practicar:

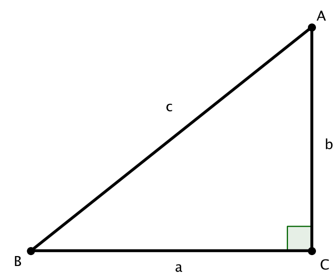
Encontrar el valor de las demás funciones trigonométricas, dado:

a) $sen\ \theta = \frac{2}{5}$	d) $\csc\theta = 5$	g) $sen\ \theta = 2$
b) $\cos\theta = \frac{1}{6}$	e) $\sec\theta = \frac{6}{1}$	h) $\cos\theta = \frac{3}{5}$
c) $\tan\theta = \frac{8}{12}$	f) $\cot\theta = \frac{10}{11}$	i) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$

Funciones trigonométricas de ángulos complementarios

En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, analicemos a continuación la relación que existe entre las funciones trigonométricas de esos ángulos .

Sea ΔABC rectángulo en C



$sen\ A = \frac{a}{c}$	$sen\ \ B = \frac{b}{c}$
$\cos A = \frac{b}{c}$	$\cos B = \frac{a}{c}$
$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan B = \frac{b}{a}$
$\csc A = \frac{c}{a}$	$\csc B = \frac{c}{b}$
$\sec A = \frac{c}{b}$	$\sec B = \frac{c}{a}$
$\cot A = \frac{b}{a}$	$\cot B = \frac{a}{b}$

Las funciones del ángulo A son iguales a las funciones del complementario de B, esto es $A = 90° - B$, estas funciones reciben el nombre de *co-funciones*.

Otra forma de expresarlas es:

$sen\ A = \cos(90° - A)$

$\cos A = sen(90° - A)$

$\tan A = \cot(90° - A)$

$\csc A = \sec(90° - A)$

$\sec A = \csc\,(90° - A)$

$\cot A = \tan\,(90° - A)$

En un triángulo rectángulo las funciones trigonométricas de un ángulo son iguales a las co-funciones de su complemento.

$sen\ A = \cos B$

$\cos A = sen\ B$

$\tan A = \cot B$

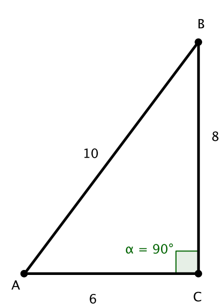
$\csc A = \sec B$

$\sec A = \csc\ B$

$\cot A = \tan\ B$

Una manera de recordar las co-funciones es anteponer a la función el prefijo co o quitándolo en caso de tenerlo.

Calcular las funciones trigonométricas de los ángulos A y B del ΔABC rectángulo siguiente:



$$sen\ A = \cos B = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = sen\, B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \cot B = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\csc A = \sec B = \frac{5}{4}$$

$$\sec A = \csc B = \frac{5}{3}$$

$$\cot A = \tan B = \frac{3}{4}$$

Utilizando lo anterior podemos expresar una función como una co-función del ángulo complementario, por ejemplo:

$$sen\, 60° = \cos 30°$$

$$\cos 20°40' = sen\, 49°40'$$

En las calculadores científicas en general están indicadas las funciones sin, cos y tan, para comprobar los resultados anteriores presiona sin 60=0.8660 no es necesario indicar la tecla de grados y comprueba presionando cos 30=0.8660, verás que la igualdad se cumple. En el segundo ejemplo deberás tener cuidado al indicar los grados y minutos del ángulo, generalmente se presiona cos 20 la tecla de grados seguida de 40 y la misma tecla que representará ahora los minutos, observa la siguiente imagen.

Para practicar:

$\propto$ y β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, observa el ejemplo y contesta las siguientes igualdades

1) $sen\ \propto = \cos\beta$

2) $\cos\ \propto =$ _________

3) $\tan \propto =$ _________

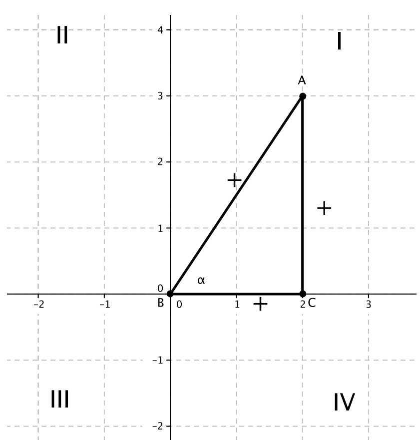
4) $\csc \propto =$ _________

5) $\sec \propto =$ _________

6) $\cot \propto =$ _________

4.3. Signos de las funciones trigonométricas

En el capítulo 3 se definieron los ángulos positivos y negativos, ahora los aplicaremos, consideremos el punto A en el primer cuadrante del plano cartesiano, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen signos positivos, por lo tanto el signo de la hipotenusa es positivo.



A continuación calcularemos las funciones trigonométricas del ángulo $\propto$ generado en el primer cuadrante, esto es ángulos mayores de $0°$ y menores de $90°$, utilizando solamente el signo de los lados del triángulo.

Primer cuadrante

$$sen\ \propto = \frac{+}{+} = + \qquad \csc \propto = \frac{+}{+} = +$$

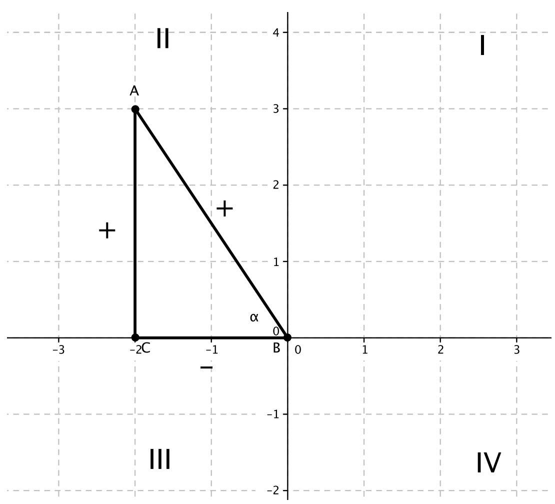
$$\cos \propto = \frac{+}{+} = + \qquad \sec \propto = \frac{+}{+} = +$$

$$\tan \propto = \frac{+}{+} = + \qquad \cot \propto = \frac{+}{+} = +$$

Concluimos que todas las funciones de un ángulo en el primer cuadrante son positivas.

Análogamente calcularemos las funciones de los cuadrantes restantes.

Segundo cuadrante

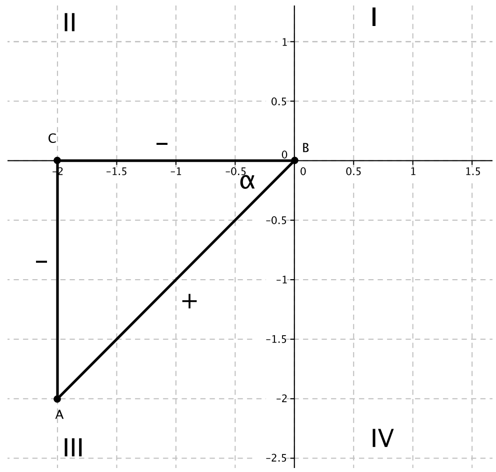


$$sen\ \propto = \frac{+}{+} = + \qquad \csc \propto = \frac{+}{+} = +$$

$$\cos \propto = \frac{-}{+} = - \qquad \sec \propto = \frac{+}{-} = -$$

$$\tan \propto = \frac{+}{-} = - \qquad \cot \propto = \frac{-}{+} = -$$

Tercer cuadrante

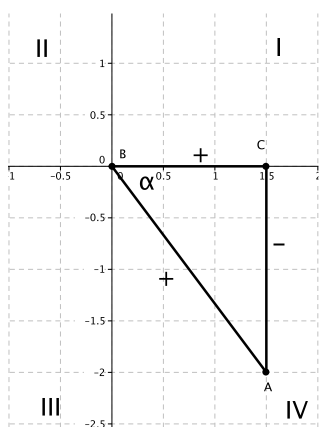


$$sen\ \propto = \frac{-}{+} = - \qquad \csc \propto = \frac{+}{-} = -$$

$$\cos \propto = \frac{-}{+} = - \qquad \sec \propto = \frac{+}{-} = -$$

$$\tan \propto = \frac{-}{-} = + \qquad \cot \propto = \frac{-}{-} = +$$

Cuarto cuadrante



$$sen\ \propto = \frac{-}{+} = - \qquad \csc \propto = \frac{+}{-} = -$$

$$\cos \propto = \frac{+}{+} = + \qquad \sec \propto = \frac{+}{+} = +$$

$$\tan \propto = \frac{-}{+} = - \qquad \cot \propto = \frac{+}{-} = -$$

Resumen de los signos de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano

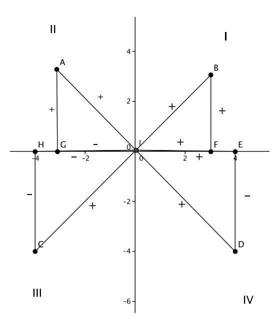
CUADRANTE / FUNCIÓN	I	II	III	IV
sen ∝	+	+	−	−
cos ∝	+	−	−	+
tan ∝	+	−	+	−
csc ∝	+	+	−	−
sec ∝	+	−	−	+
cot ∝	+	−	+	−

Las características que presentan :

1) Cada función es positiva en dos cuadrantes y negativa en los otros dos.

2) El signo que tiene la función en un cuadrante es el mismo que tiene su recíproca.

3) Todas las funciones son positivas en el primer cuadrante.

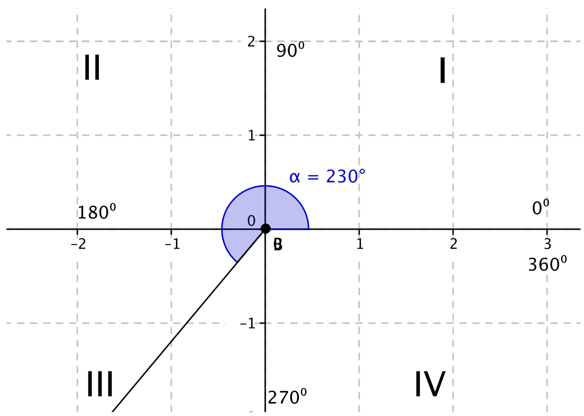


Plano cartesiano

Indica si son posibles los signos de las siguientes funciones:

a) $sen\ 230° = -0.7660$

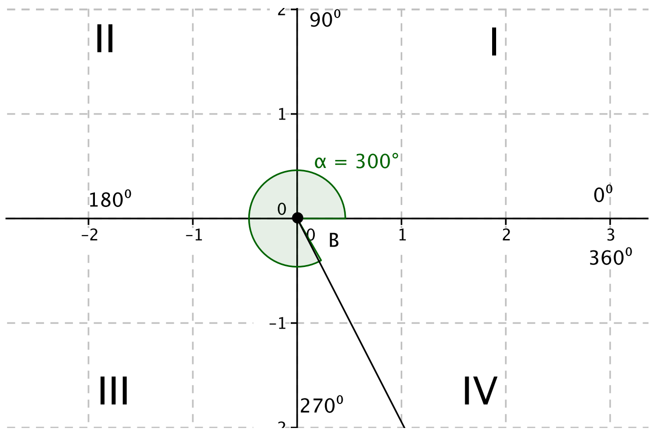
Primero debemos localizar el cuadrante donde se ubica el ángulo 230°



El ángulo se localiza en el tercer cuadrante, la función *seno* en el tercer cuadrante tiene signo negativo ∴ sí es posible el signo.

b) $\cos 300° = -0.5$

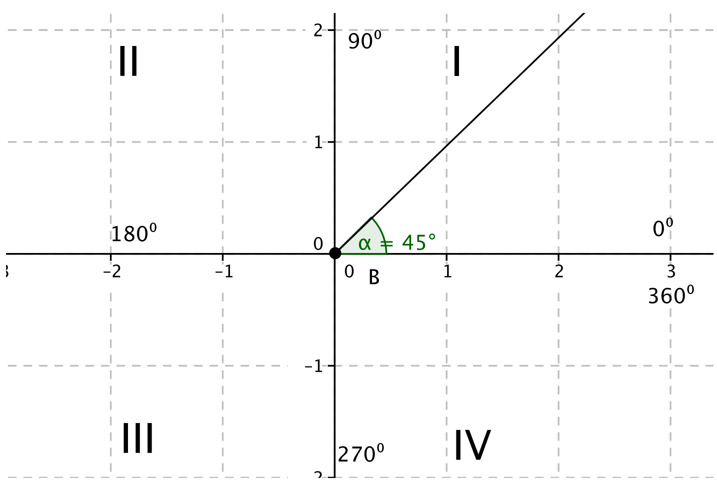
El ángulo 300° se ubica en el tercer cuadrante.



La función *coseno* en el tercer cuadrante es positiva ∴ el signo no es posible.

c) $\tan 45° = 1$

El ángulo 45°se ubica en el primer cuadrante



En el primer cuadrante la función *tangente* es positiva, ∴ el signo sí es posible.

Para practicar:

En parejas respondan si son posibles o no los *signos* de las funciones:

a) $\csc 160° = -2.9238$

b) $\sec 260° = -5.7587$

c) $\cot 345° = -3.7320$

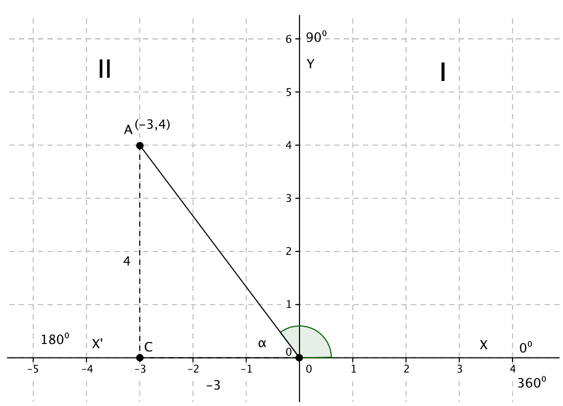
d) $sen\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos 60° = -0.5$

Pregunta reto:

¿Qué signo tendrá $\sec 3899°$?

Calcular las funciones trigonométricas del ángulo formado por el eje X, el origen de coordenadas y el punto A(-3,4), esto es $\measuredangle XOA = \propto$.



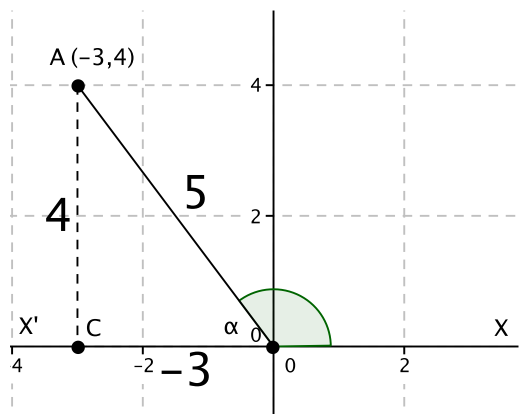
El segmento $\overline{OA}$ es la hipotenusa del triángulo ΔOAC , cuyos catetos miden -3 y 4.
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(\overline{OA})^2 = (-3)^2 + (4)^2$$

$$\overline{OA}^2 = 9 + 16$$

$$\overline{OA}^2 = 25$$

$$\overline{OA} = 5$$



$$sen \propto = \frac{4}{-3} \qquad \csc \propto = \frac{-3}{4}$$

$$\cos \propto = \frac{-3}{4} \qquad \sec \propto = \frac{4}{-3}$$

$$\tan \propto = \frac{4}{-3} \qquad \cot \propto = \frac{-3}{4}$$

Para practicar:

Utiliza calculadora científica para obtener el resultado de las siguientes funciones trigonométricas cuyos ángulos están expresados en radianes, es importante consultar el manual de la calculadora para operar en el modo correcto. Ver ejemplo

1) $sen\,\pi = sen\ \ 180° \ \ = \ 0$

2) $\cos\frac{\pi}{2} =$ ____________ = _______________

3) $\tan\frac{2\pi}{3} =$ ___________ = _______________

4) $sen\ \frac{\pi}{6} =$ ___________ = _______________

5) $\cos\frac{5\pi}{4} =$ ___________ = _______________

6) $\tan\frac{3\pi}{10} =$ ___________= ________________

7) $\cos 3\pi\ =$ __________ = ________________

8) $sen\ 6\pi\ =$ __________ = ________________

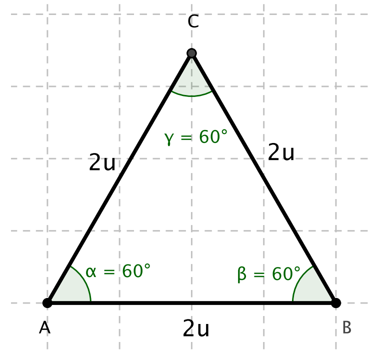
9) $\tan 4\pi\ =$ ____________ = _______________

10) $\cos\frac{7\pi}{3} =$ __________ = _______________

11) $\tan\frac{3\pi}{5} =$ __________ = _______________

4.4. Funciones trigonométricas de ángulos notables (30º,45º y 60º)

Para calcular las funciones trigonométricas de **60°** y **30°** construimos un triángulo equilátero de 2 unidades, sus lados y sus ángulos son iguales.



Trazamos una altura que es también mediana, mediatriz y bisectriz, se forman dos triángulos rectángulos, falta uno de sus lados; la altura que calcularemos utilizando el teorema de Pitágoras.

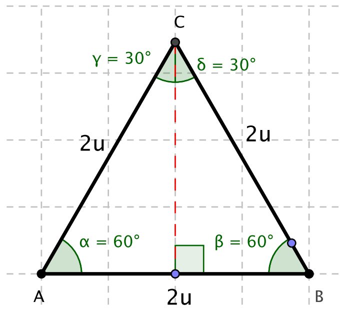
$2^2 = 1^2 + x^2$

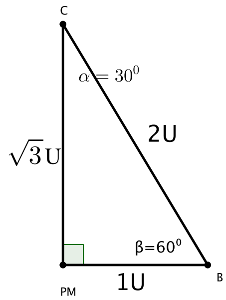
$4 = 1 + x^2$

$4 - 1 = x^2$

$3 = x^2$

$\sqrt{3} = x$





Tomamos uno cualquiera de los dos triángulos que se forman para calcular las funciones trigonométricas de 30° y 60°.

Funciones de 30°

$$sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \sqrt{3}$$

Funciones de 60°

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = 2$$

$$\tan 60\ ° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Otra forma es usando las co-funciones:

$$sen\ 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

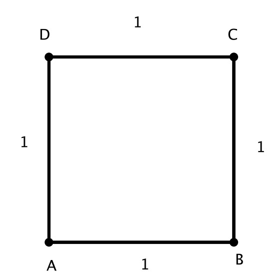
$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30° = \sec 60° = 2$$

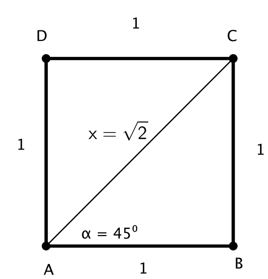
$$\sec 30° = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$$

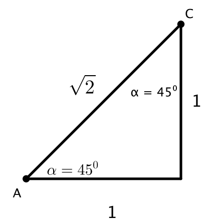
Para calcular las funciones trigonométricas de 45° construimos un cuadrado de lado 1, trazamos una diagonal que es bisectriz de sus ángulos, formándose dos triángulos iguales, tomamos uno de ellos y calculamos el lado faltante que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



Cuadrado de lado 1



Diagonal que biseca los ángulos rectos



Funciones de 45°

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \csc 45° = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45° = 1$$

Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de $30°, 45°\ y\ 60°$

FUNCIÓN	$30°$	$45°$	$60°$
$seno$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$coseno$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tangente$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cosecante$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$secante$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$cotangente$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Los valores anteriores los podemos utilizar para calcular el valor numérico de expresiones como las siguientes:

a) $sen\ 45° + \cos 45°$

Sustituimos los valores $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) $2sen\ 60° + \tan 60°$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Para practicar:

Comprueba las siguientes igualdades utilizando calculadora científica.

1) $cos^2 60° + 5sen^2 80° = 5.09923$

2) $sen^2 90 + \ sen^3 + \ tan^2 45° = 2$

3) $sen\ 30° + \cos 60° = 1$

4) $\tan 45° + \cos 60° = 1.5$

5) $sen^2 45° \ + cos^2 45° = 1$

6) $\tan 30° - 2sen60° = \ -1.1547$

7) $6sen\ 38° - 3cos20° = 0.8748$

8) $\cos 67° - 7 \tan 33° = \ -4.1551$

9) $\frac{8sen\ 27° + cos28°}{\tan 56°} = 3.0453$

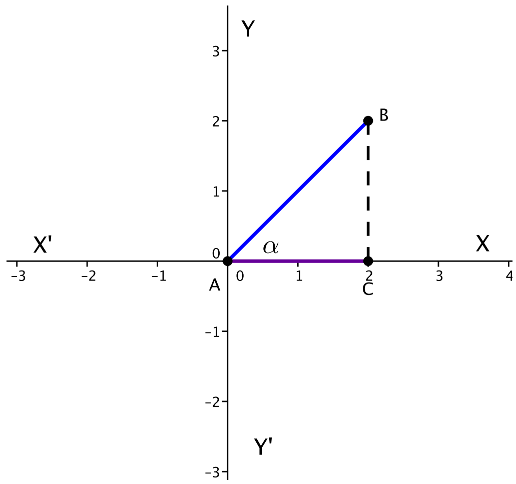
10) $\frac{sen\ 67°}{\tan 67°} = 0.3907$

11) $\frac{\tan 58°20\prime}{sen\ 60°} = 1.8720$

12) $\frac{sen^2 50°}{\cos 50°} = \ 0.9129$

Funciones trigonométricas de los ángulos $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$

Para calcular las funciones de los ángulos que limitan los cuadrantes, en un plano cartesiano tracemos un triángulo rectángulo generado por un ángulo $\propto$.



Las funciones trigonométricas de $\propto$:

$$sen \propto = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad \csc \propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos \propto = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \sec \propto = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\tan \propto = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad \cot \propto = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Si giramos $\overline{AB}$ hasta que $\propto = 0°$, el segmento $\overline{BC}=0$ y $\overline{AC} = \overline{AB}$, sustituyendo las condiciones en las funciones trigonométricas anteriores tenemos:

$$sen\, 0° = \frac{0}{\overline{AB}} = 0 \qquad \csc 0° = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty , \nexists$$

$$\cos\, 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 \qquad \sec 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{0}{\overline{AC}} = 0 \qquad \cot 0° = \frac{\overline{AC}}{0} = \infty , \nexists$$

El símbolo ∞ se lee infinito, no es un número, significa que la función crece enormemente a medida que el ángulo $\propto$ tiende a cero, pero sin llegar a tomarlo ya que no está definida la división entre cero, es una indeterminación[6].

Análogamente calculamos los valores de $\propto = 90°$ haciendo girar el segmento $\overline{AB}$ hasta llegar al eje Y, $\overline{AC} = 0$ y $\overline{BC} = \overline{AB}$, todos los segmentos con signo positivo, sustituimos las condiciones anteriores en las funciones trigonométricas.

$sen\ 90° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$ $\qquad$ $\csc\ 90° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$

$\cos\ 90° = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$ $\qquad$ $\sec\ 90° = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty, \nexists$

$\tan 90° = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty, \nexists$ $\qquad$ $\cot\ 90° = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$

De la misma manera hacemos $\propto = 180°$ y tenemos las mismas condiciones que $0°$, la ubicación de los segmentos queda sobre la parte negativa del eje X′, por lo tanto los valores son iguales pero de signo contrario.

$sen\ 180° = \frac{0}{\overline{AB}} = 0$ $\qquad$ $\csc 180° = \frac{\overline{AB}}{0} = \infty, \nexists$

$\cos\ 180° = -1$ $\qquad$ $\sec 180° = -1$

$\tan 180° = 0$ $\qquad$ $\cot 180° = \frac{\overline{AC}}{0} = \infty, \nexists$

Si $\propto = 270°$, los valores de las funciones trigonométricas son los mismos que los de $90°$ pero con signo contrario por coincidir con la parte negativa del eje Y′.

$sen\ 270° = -1$ $\qquad$ $\csc\ 270° = -1$

$\cos\ 270° = 0$ $\qquad$ $\sec\ 270° = \infty, \nexists$

$\tan 270° = \infty, \nexists$ $\qquad$ $\cot\ 270° = 0$

Por último cuando $\propto = 360°$ es una vuelta completa y los valores son los mismos de $\propto = 0°$

$sen\,360° = 0$ $\qquad$ $\csc 360° = \infty, \nexists$

$\cos 360° = 1$ $\qquad$ $\sec 360° = 1$

$\tan 360° = 0$ $\qquad$ $\cot 360° = \infty, \nexists$

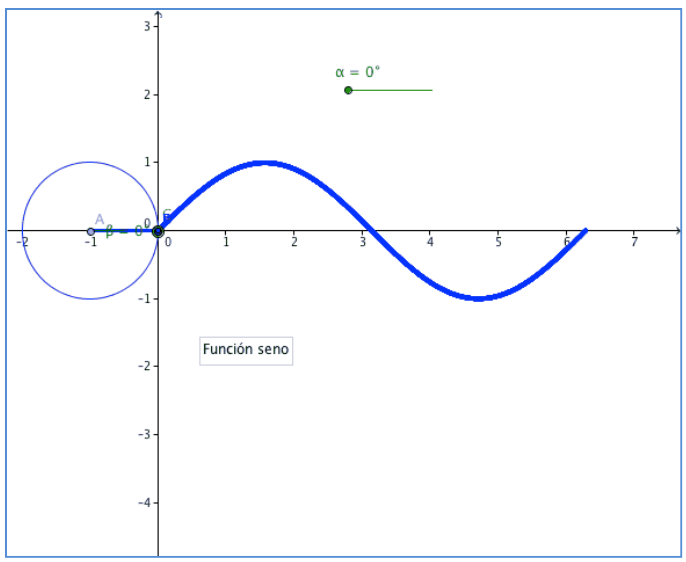
Resumen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos $0°, 90°, 180°, 270°\ y\ 360°$

ÁNGULO FUNCIÓN	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
seno	0	1	0	-1	0
coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
cosecante	$\nexists$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$
secante	1	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
cotangente	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$

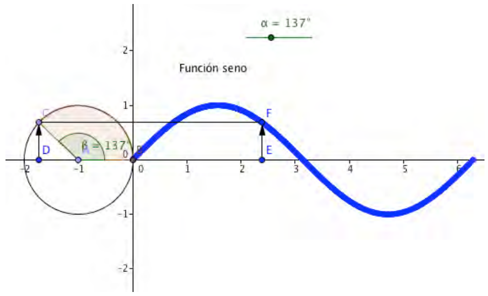
4.5. Gráficas de las funciones trigonométricas

Utilizando los valores obtenidos de las funciones trigonométricas, podemos relacionar el ángulo con el valor que toma la función respecto de dicho ángulo, y obtendremos los lugares geométricos o gráficas que las representan.

La siguiente gráfica es de la función $seno$ hecha con el simulador del programa geogebra, en su versión digital puedes hacer clic derecho, elegir reproducir y el simulador funcionará generando su gráfica.

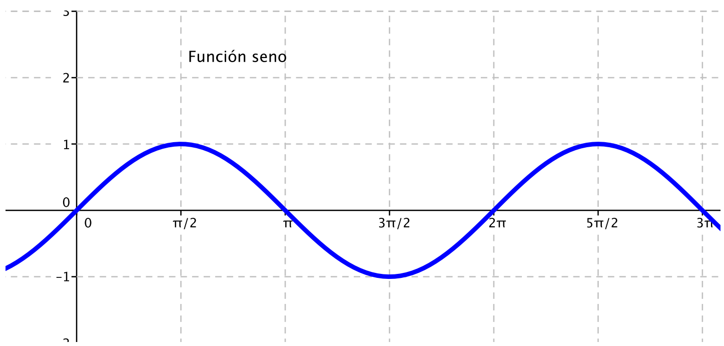


La siguiente es una imagen no dinámica que muestra una parte del proceso en la generación de la gráfica de la función $seno$.



A continuación se muestran las gráficas de las funciones trigonométricas.

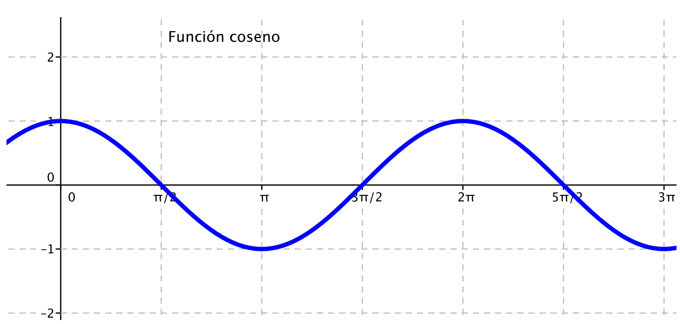
Función *seno*



La gráfica de la función *seno* tiene las siguientes características:

1) El rango de la función está en el intervalo cerrado $[1,-1]$
2) Tiene un periodo de 2π esto significa que la gráfica es periódica o se repite cada $360°$.
3) La onda que se genera recibe el nombre de *senoidal*.

Función *coseno*



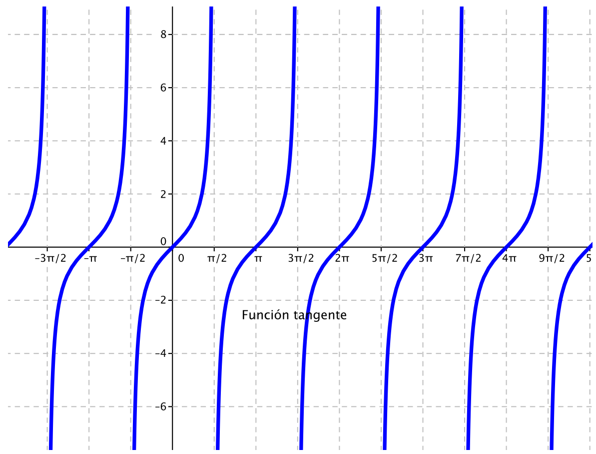
La gráfica de la función *coseno* tiene las siguientes características:

1) El rango de la función está en el intervalo cerrado $[1,-1]$

2) Tiene un periodo de 2π esto significa que la gráfica es periódica o se repite cada $360°$.

3) La onda que se genera recibe el nombre de $cosenoidal$.

Función $tangente$



La gráfica de la función $tangente$ tiene las siguientes características:

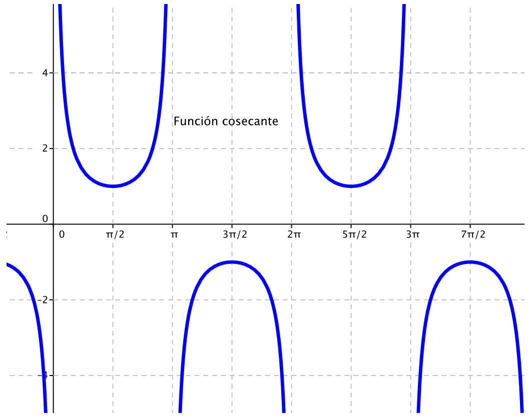
1) La función no está definida en $90°\ y\ 270°$ en los primeros $360°$.

2) Su rango es el intervalo abierto $(\infty,-\infty)$.

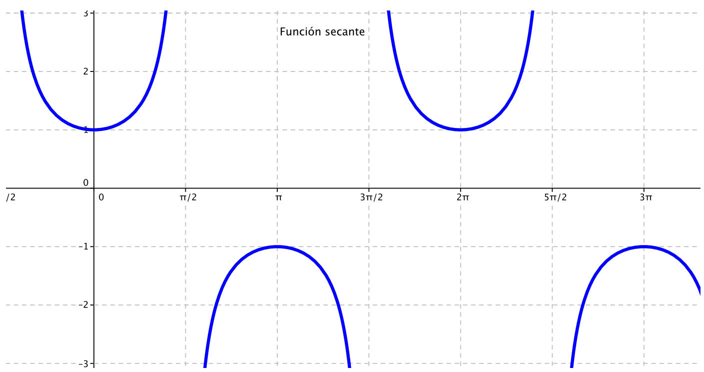
3) No es periódica.

Las gráficas de las funciones siguientes nos apoyan para observar las variaciones de las funciones recíprocas.

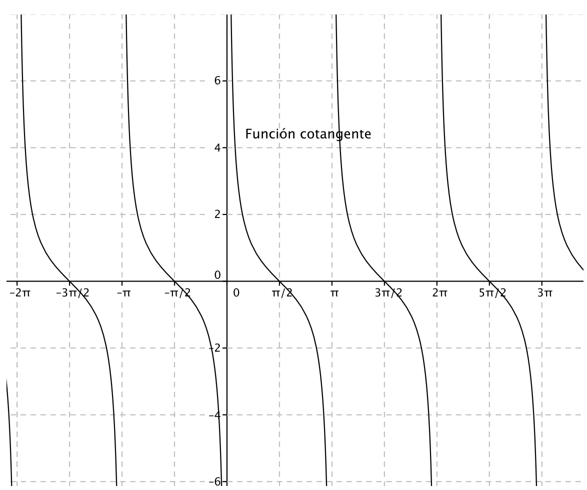
Función $cosecante$



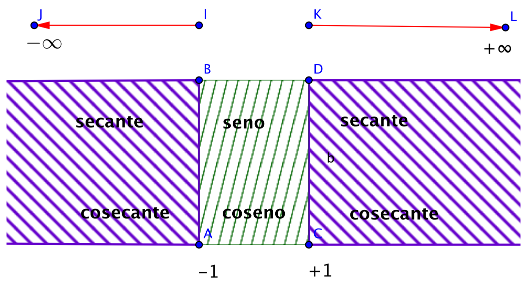
Función *secante*



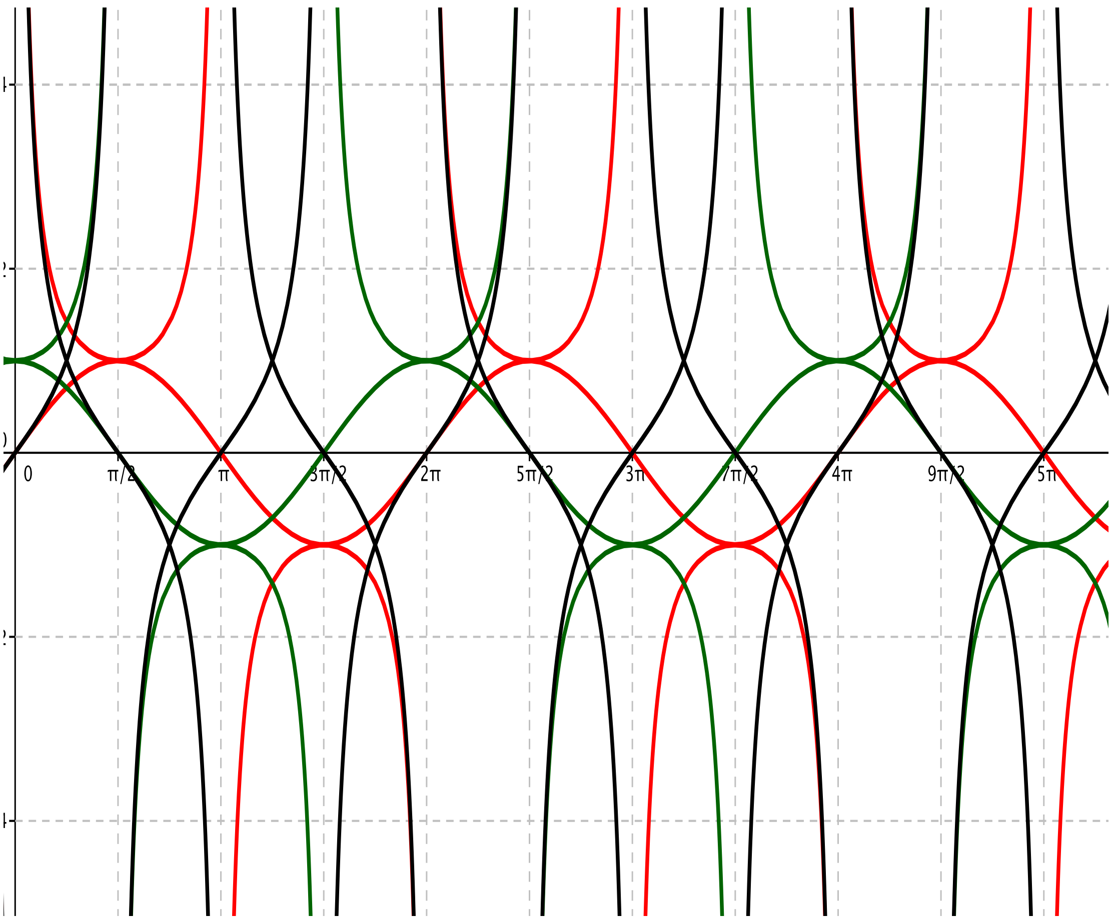
Función *cotangente*



El esquema siguiente muestra los valores que pueden tomar las funciones trigonométricas :



La función $tangente$ $(-\infty, \infty)$.



Gráfica que muestras las funciones trigonométricas y sus recíprocas

Para practicar:

Utiliza hojas milimétricas, calculadora científica y colores para graficar las funciones trigonométricas

$a)$ $sen\ 2x$

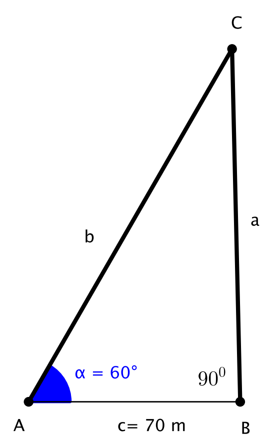
$b)$ $\cos 3x$

$c)$ $\tan 2x$.

4.6. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es encontrar la medida de sus tres ángulos interiores y la longitud de sus lados, aunque en este caso tenemos conocido el ángulo recto, así que la suma de los ángulos agudos es siempre $90°$, ya que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo vale $180°$.

Resolver el triángulo rectángulo en B, ΔABC si $\measuredangle A = 60°\ y\ c = 70m$



Datos conocidos:

$\measuredangle B = 90°$

$\measuredangle A = 60°$

c=70 m

Medidas por encontrar:

$\measuredangle C, a \text{ y } b$

Los ángulos A y C son complementarios por lo tanto:

$\measuredangle C = 90° - 60° = 30°$

Para calcular el lado a una opción es utilizar la función $tan\,60°$, ya que una vez conocido el valor de la función solo necesitamos un lado conocido (70m) y otro desconocido (a)

$$tan\,60° = \frac{a}{70m}$$

$$a = 70m(tan60°)$$

$$a = 121.24m$$

En este punto podemos elegir varias opciones; utilizar el teorema de Pitágoras o de nuevo una función trigonométrica que relacione el lado faltante (b).

$$hipotenusa^2 = cateto^2 + cateto^2$$

$$(b)^2 = (70m)^2 + (121.24m)^2$$

$$b^2 = 4900m^2 + 14{,}699.13m^2$$

$$b^2 = 19{,}599.13m^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{19{,}599.13m^2}$$

$$b = 139.99m$$

$$b \cong 140m$$

aquí queda resuelto el problema, tenemos conocidos los datos faltantes.

Como se mencionó anteriormente existe otro camino para llegar a la solución, usando en este caso $\cos 60°$.

$$\cos 60° = \frac{70m}{b}$$

$$b = \frac{70m}{\cos 60^{\circ}}$$

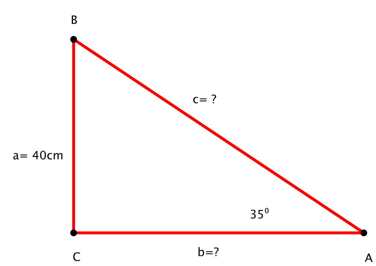
$$b = 140m$$

Resolver el siguiente triángulo rectángulo ΔABC si :

$a = 40cm$

$\measuredangle A = 35°$

$\measuredangle C = 90°$



los ángulos A y B son complementarios por lo tanto:

$$\measuredangle B = 90° - \measuredangle A = 90° - 35° = 55°$$

Elegimos una función de uno de los ángulos agudos A o B, que relacione uno de los lados por calcular, puede ser b o c, si usamos

$$\tan 55° = \frac{b}{40cm}$$

$$b = 40cm(tan55°)$$

$$b = 57.12cm$$

En este punto elegimos entre el teorema de Pitágoras o utilizar otra función trigonométrica.

Usemos la función:

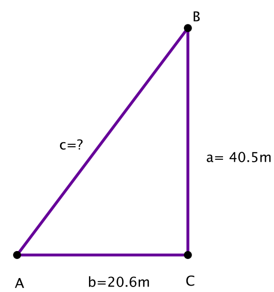
$$\text{sen}\,35° = \frac{40cm}{c}$$

$$c = \frac{40cm}{sen\ 35°}$$

$$c = 69.73cm$$

Resolver el siguiente triángulo rectángulo ΔABC cuyos catetos miden

$a = 40.5m\ y\ b = 20.6m$



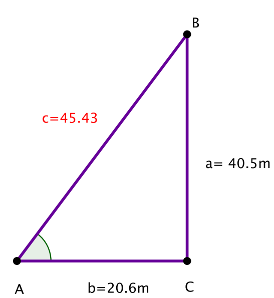
Calcularemos primeramente el lado faltante utilizando el teorema de Pitágoras.

$c^2 = (20.6m)^2 + (40.5m)^2$

$c^2 = 424.36m^2 + 1{,}640.25m^2$

$c^2 = 2{,}064.61m^2$

$c = 45.43m$

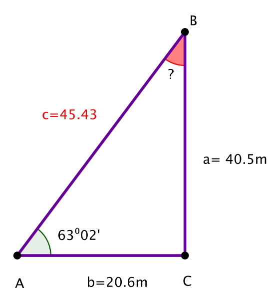


Para calcular uno de los ángulos es necesario usar una función trigonométrica que relacione dos lados conocidos, es conveniente utilizar los lados dados en el problema, ya que si por alguna razón está hecho mal el cálculo anterior, evitaremos seguir haciendo erróneamente los cálculos posteriores.

$$\tan A = \frac{40.5m}{20.6m}$$

$$A = \ tan^{-1}\left(\frac{40.5}{20.6}\right)$$

$$A = 63.04° = 63°2'$$



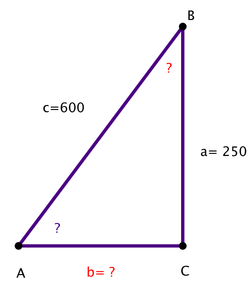
Tenemos varias opciones para calcular el ángulo faltante B, recuerde que es complemento de A, pero para seguir practicando utilizaremos una función trigonométrica:

$$\tan B = \frac{20.6m}{40.5m}$$

$$B = tan^{-1}\left(\frac{20.6}{40.5}\right)$$

$$B = 26°57'$$

Resolver el triángulo rectángulo ΔABC si $c = 600 \ y \ a = 250.$



Comenzaremos por una de las opciones que es calcular el ángulo B:

$$\cos B = \frac{250}{600}$$

$$B = cos^{-1}\left(\frac{250}{600}\right)$$

$$B = 65°22'$$

Por ser ángulos complementarios A y B, tenemos que:

$$A = 90° - B$$

$$A = 90° - 65°22'$$

$$A = 24°38'$$

Solo falta calcular el lado b, una forma es usar el teorema de Pitágoras, otra una función trigonométrica de los ángulos encontrados A o B.

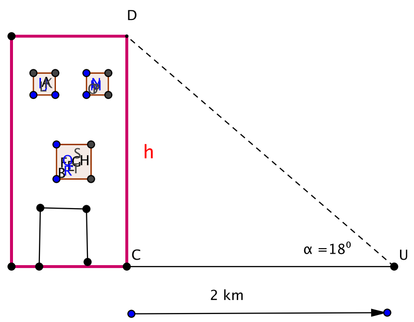
$$sen\ 65°22' = \frac{b}{600}$$

$$b = 600(sen\ 65°22')$$

$$b = 545.39$$

Resolver los siguientes problemas calculando el valor indicado.

a) Calcular la altura en metros de un edificio, si desde un punto situado a 2 km de distancia de la base del edificio, el ángulo de elevación es de $18°$.



La función tangente del ángulo $18°$ nos relaciona el lado buscado h y la distancia conocida 2km.

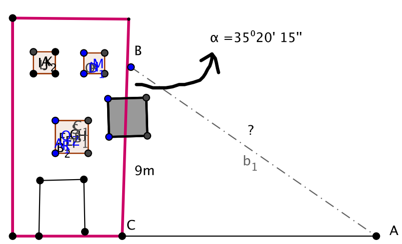
$$\tan 18° = \frac{h}{2km}$$

$$h = 2km(tan18°)$$

$$h = 0.6498km$$

$$h = 649.83m$$

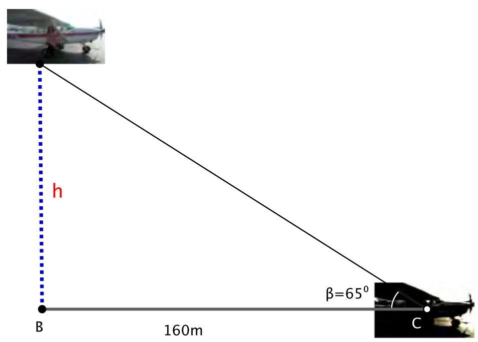
Los bomberos quieren rescatar un gatito que se encuentra atrapado en el balcón de un edificio a una altura de 9m del piso, al recargar la escalera para rescatarlo la escalera forma un ángulo de $35°20'15''$ calcula la longitud de la escalera.



La función que nos relaciona el ángulo conocido, con la altura y el segmento $\overline{BA}$ que representa la escalera es la función coseno.

$$\cos 35°20'15'' = \frac{9m}{\overline{BA}}$$
$$\overline{BA} = \frac{9m}{\cos 35°20'15''}$$
$$\overline{BA} = 11.03m$$

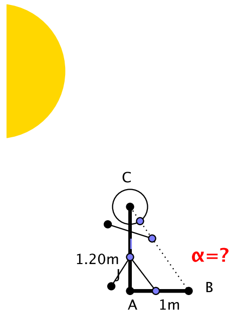
Un avión proyecta su sombra a 160m de su vertical, cuando el sol está a $65°$ sobre el horizonte, calcular la altura a la que vuela.



La función que relaciona el ángulo, y las dos distancias es la función tangente.

$$\tan 65° = \frac{h}{160m}$$
$$h = 160m(tan65°)$$
$$h = 343.12m$$

Una niña que mide 1.20m proyecta sobre el piso una sombra de 1m, calcular el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte.



La función que relaciona el ángulo con los dos lados conocidos es la tangente.

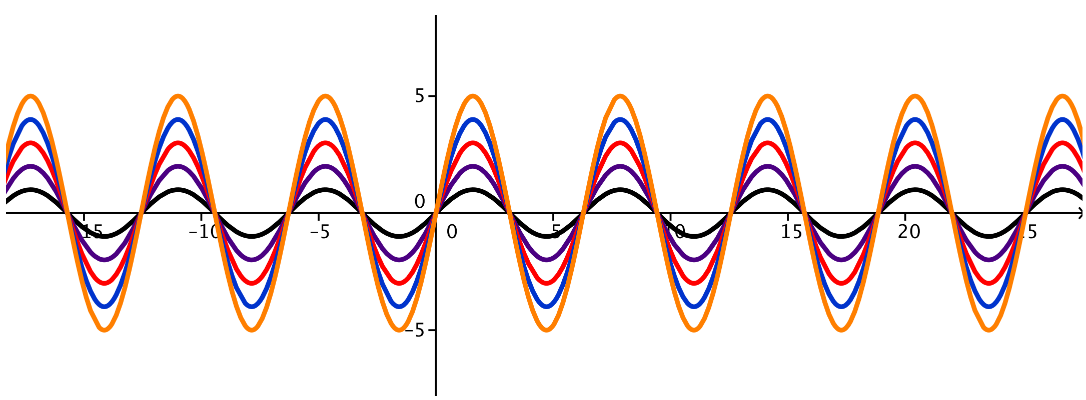
$$\tan \propto = \frac{1.20m}{1m}$$

$$\propto = tan^{-1}\left(\frac{1.20}{1}\right)$$

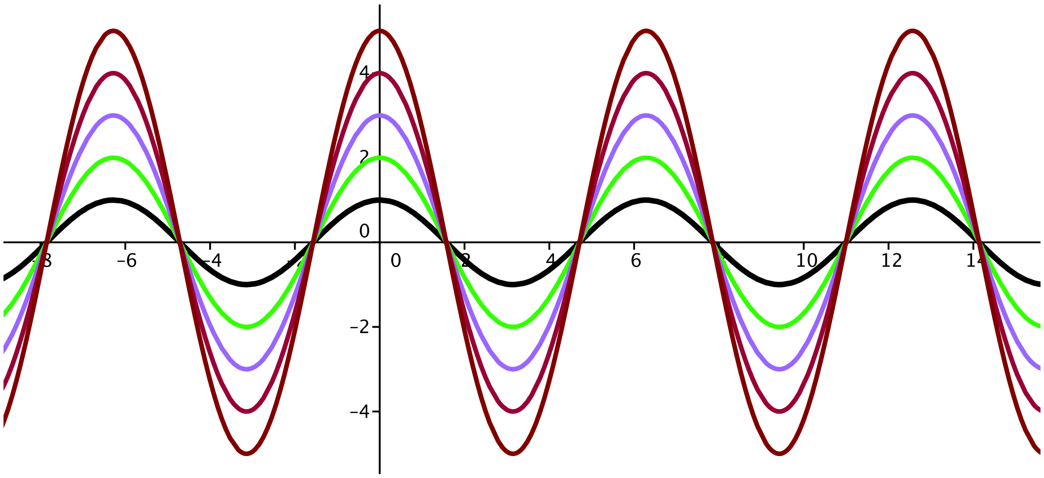
$$\propto = 50°11'$$

Curiosidades matemáticas:

Sabías que los babilonios hace cerca de 4000 años ya conocían algunas particularidades del triángulo rectángulo como las ternas llamadas ahora pitagóricas por ejemplo: 3, 4 y 5 que son los lados de un triángulo rectángulo.



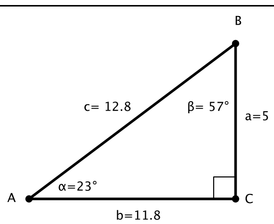
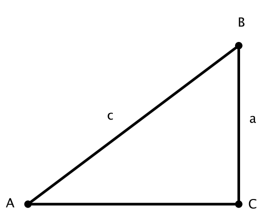
Gráficas de las funciones: f(x)=sen x, f(x)=2sen x, f(x)=3sen x, f(x)=4senx y f(x)=5senx

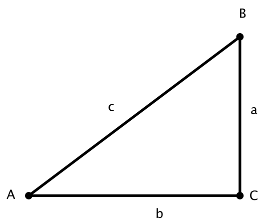
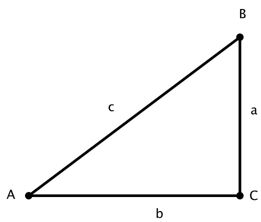


Gráficas de las funciones: f(x)=cos x, f(x)=2cos x, f(x)=cos x, f(x)=4cos x y f(x)=5sen x

Para resolver:

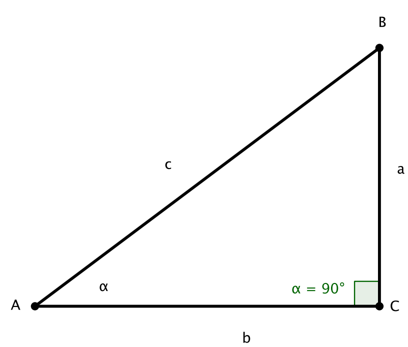
En parejas resolver cada uno de los siguientes triángulos rectángulos utilizando los elementos que se indican, llamaremos a y b a los catetos y c a la hipotenusa , los ángulos agudos son A y B.

FIGURA	CATETO a	CATETO b	HIPOTENUSA c	ÁNGULO $\measuredangle A(°\,')$	ÁNGULO $\measuredangle B(°\,')$
	5	11.8	12.8	23°	57°
	11	4			

	4	3			
	5	5			

4.7. Relaciones entre las funciones trigonométricas

4.7.1. Reciprocidad de las funciones trigonométricas



Calculemos las funciones trigonométricas para observar la relación que guardan entre sí.

$sen\ \propto = \frac{a}{c}$ $\qquad \csc \propto = \frac{c}{a}$

$\cos \propto = \frac{b}{c}$ $\qquad \sec \propto = \frac{c}{b}$

$\tan \propto = \frac{a}{b}$ $\cot \propto = \frac{b}{a}$

Comencemos por multiplicar $sen \propto \times \csc \propto$:

$$sen \propto \times \csc \propto = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

$$sen \propto \times \csc \propto = 1$$

despejando cada función:

$$\begin{cases} sen \propto = \dfrac{1}{\csc \propto} \\ \csc \propto = \dfrac{1}{sen \propto} \end{cases}$$

Multiplicando $\cos \propto \times \sec \propto$:

$$\cos \propto \times \sec \propto = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = 1$$

$$\cos \propto \times \sec \propto = 1$$

Despejando:

$$\begin{cases} \cos \propto = \dfrac{1}{\sec \propto} \\ \sec \propto = \dfrac{1}{\cos \propto} \end{cases}$$

Multiplicando $\tan \propto \times \cot \propto$:

$$\tan \propto \times \cot \propto = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

$$\tan \propto \times \cot \propto = 1$$

Despejando:

$$\begin{cases} \tan \propto = \dfrac{1}{\cot \propto} \\ \cot \propto = \dfrac{1}{\tan \propto} \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que una función es igual a uno entre su recíproca, como puedes ver esto permite hacer el cálculo de las funciones csc, sec y cot en la calculadora.

Por ejemplo calcular el valor de:

a) $\csc 36°$

la $\csc \propto = \frac{1}{sen \propto}$ por lo tanto

$$\csc 36° = \frac{1}{sen\ 36°} = \frac{1}{0.5877} = 1.7013$$

b) $\sec 75°\ 30'$

la $\sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$ por lo tanto

$$\sec 75°\ 30' = \frac{1}{\cos 75\ °30'} = \frac{1}{0.2503} = 3.9939$$

c) $\cot 44°23'50''$

la $\cot \propto = \frac{1}{tan \propto}$ por lo tanto

$$\cot 44°23'50'' = \frac{1}{\tan 44\ °23'50''} = \frac{1}{0.9791} = 1.02126$$

4.7.2. Relación entre el seno y el coseno

Otra relación importante se obtiene dividiendo la función seno entre coseno.

$$\frac{sen\ \propto}{\cos \propto} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \tan \propto$$

$\therefore$ $$\frac{sen \propto}{\cos\propto} = \tan \propto$$

y como la tangente es recíproca de la cotangente se deduce que :

$$\frac{cos\ \propto}{\text{sen} \propto} = \cot \propto$$

4.7.3. Relación pitagórica

En la siguiente relación sumamos $sen^2 \propto + cos^2 \propto$:

$sen\ \propto = \frac{a}{c}$ y $cos\ \propto = \frac{b}{c}$ elevando al cuadrado y sumando tenemos:

$$(sen\ \propto)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \qquad (\cos \propto)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$sen^{\ 2} = \frac{a^2}{c^2} \qquad cos^2 \propto = \frac{b^2}{c^2}$$

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

note que $a^2 + b^2 = c^2$, observe el triángulo anterior, la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

$$sen^2 \propto +cos^2 \propto = 1$$

conocida como identidad pitagórica.

4.7.4. Relación entre la cotangente y la secante, la tangente y la cosecante.

Dividiendo la relación pitagórica entre $sen^2 \propto$ tenemos:

$sen^2 \propto +cos^2 \propto = 1$ entre $sen^2 \propto$

$$\frac{sen^2 \propto +cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto}$$

$$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto}$$

$$1 + cot^2 \propto = csc^2 \propto$$

Análogamente dividimos la relación pitagórica pero ahora entre $cos^2 \propto$

$$\frac{sen^2 \propto +cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

$$\frac{sen^2 \propto}{cos^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{cos^2 \propto} = \frac{1}{cos^2 \propto}$$

$tan^2 \propto + \ 1 \ \ = \ sec^2 \propto$

A continuación probaremos algunas identidades trigonométricas pues no importa el valor que tome la variable que representa el ángulo , es conveniente convertir cuando sea posible, las funciones en términos de las funciones seno y coseno, es necesario dejar inalterado uno de los términos de la identidad.

Probar las siguientes identidades:

a) $sen\ x \ \equiv \frac{\cos x}{\cot x}$

$$sen\ x \equiv \frac{\cos x}{\frac{\cos x}{sen\ x}}$$

$$sen\ x \ \equiv \frac{sen\ x\ cosx}{\cos x}$$

$$sen\ x \ \equiv sen\ x$$

b) $sen\ \varphi + \cos\varphi \cot\varphi \ \equiv \cos\varphi$

$$sen\ \varphi + \cos\varphi\ \frac{\cos\varphi}{sen\ \varphi} \equiv \csc\varphi$$

$$sen\ \varphi + \frac{cos^2\varphi}{sen\ \varphi} \equiv \csc\varphi$$

$$\frac{sen^2\varphi + \ cos^2\varphi}{sen\ \varphi} \equiv \csc\varphi$$

$$\frac{1}{sen\ \varphi} \ \equiv \csc\varphi$$

$$\csc\varphi \ \ \equiv \csc\varphi$$

c) $\frac{\csc\propto}{\tan\propto + cot\propto} \ \equiv \cos\propto$

$$\frac{\frac{1}{sen\ \propto}}{\frac{sen\ \propto}{\cos\propto}+\frac{\cos\propto}{sen\ \propto}}\equiv\cos\propto$$

$$\frac{\frac{1}{sen\ \propto}}{\frac{sen^2\propto+cos^2\propto}{sen\ \propto\ cos\propto}}\equiv\cos\propto$$

$$\frac{\frac{1}{sen\ \propto}}{\frac{1}{sen\ \propto\ cos\propto}}\equiv\cos\propto$$

$$\frac{sen\ \propto\ cos\propto}{sen\ \propto}\equiv\cos\propto$$

$$\cos\propto\equiv\cos\propto$$

d) $\frac{sen\ x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{sen\ x}\equiv 2\csc x$

$$\frac{sen\ x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{sen\ x}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{sen\ ^2x+\ (1+\cos x)^2}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{sen^2x+1+2cosx+cos^2x}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{(sen^2x+cos^2x)+1+2\cos x}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{(1)+1+2\cos x}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{2+2\cos x}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{2(1+\cos x)}{sen\ x(1+\cos x)}\equiv 2\csc x$$

$$\frac{2}{sen\ x}\equiv 2\csc x$$

$$2\ \frac{1}{sen\ x}\equiv 2cscx$$

$2(\csc x) \equiv 2\csc x$

$2\csc x \equiv 2\csc x$

e) $(1 + tan^2x)cos^2x \equiv 1$

$$\left(1 + \frac{sen\,^2x}{cos^2x}\right)cos^2x \equiv 1$$

$(cos^2x + sen^2x) \equiv 1$

$1 \equiv 1$

f) $\csc x - sen\,x \equiv \cot x \csc x$

$$\frac{1}{sen\,x} - sen\,x \equiv \cot x\, cs\, cx$$

$$\frac{1 - sen^2x}{sen\,x} \equiv cot\,x \csc x$$

$$\frac{cos^2x}{sen\,x} \equiv cotx \csc x$$

$$\frac{\cos x \cos x}{sen\,x} \equiv \cot x \csc x$$

$$\frac{\cos x}{sen\,x} \times \frac{1}{sen\,x} \equiv \cot x \csc x$$

$\cot x \csc x \equiv \cot x \csc x$

g) $sen^2x + sen^2xcot^2x \equiv 1$

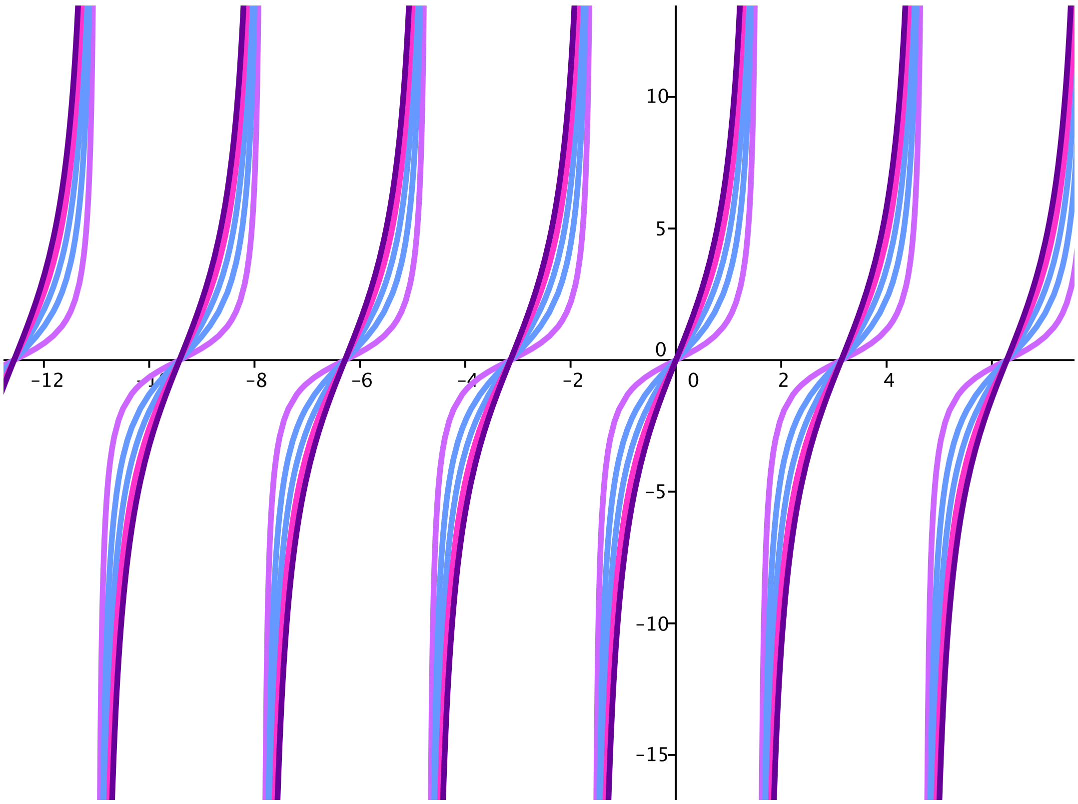
$sen^2x(1 + cot^2x) \equiv 1$

$sen^2x(csc^2x) \equiv 1$

$$sen^2x\left(\frac{1^2}{sen^2x}\right) \equiv 1$$

$$sen^2x\left(\frac{1}{csc^2x}\right) \equiv 1$$

$1 \equiv 1$



Gráficas de las funciones: f(x)=tan x, f(x)=2tan x, f(x)=tan x, f(x)=4tan x y f(x)=5tan x

Para practicar:

Con ayuda de las identidades trigonométricas prueba que:

$\dfrac{csc\ x}{\tan x + \cot x} \equiv \cos x$
$\dfrac{\tan \propto}{sen\ \propto} \equiv \sec \propto$
$\dfrac{sen\ x\ + \cos x}{sen\ x} \equiv 1 + \dfrac{1}{\tan x}$

$$\frac{sen\,A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A} \equiv 1$$
$$tan^2x - cot^2x \equiv sec^2x - csc^2x$$
$\sec x - \cos x \equiv \tan x\, sen\, x$
$$csc^2x + cot^2x + 1 \equiv 2csc^2x$$
$$\frac{\cos x}{1 + sen\,x} + \frac{1 + sen\,x}{cosx} \equiv 2\sec x$$
$\csc x - sen\,x \equiv \cos x \cot x$
$\cos x \cot x + sen\,x \equiv \csc x$

4.8. Resolución de triángulos oblicuángulos

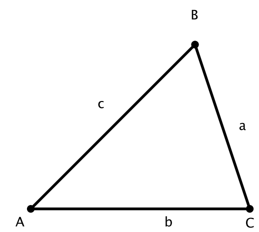
Resolver un triángulo como se mencionó anteriormente, es encontrar el valor de los ángulos interiores y las longitudes de los lados de un triángulo, ahora veremos como resolver un triángulo *oblicuángulo*[7], es todo aquel que no tiene algún ángulo recto, para lo cual aplicaremos la ley de senos y ley de cosenos.

Ley de senos

Los lados del triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Algebraicamente se representa:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$



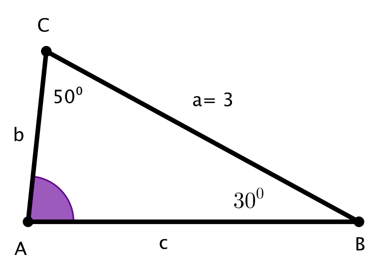
De lo anterior se desprenden tres igualdades

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \qquad \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C} \qquad \frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$$

Para poder aplicar alguna de estas igualdades se necesita conocer tres de los datos que ahí se involucren para poder encontrar el cuarto.

Para poder utilizar esta ley debemos conocer la medida de dos ángulos y la longitud de un lado que sea opuesto a alguno de esos dos ángulos.

Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo siguiente:

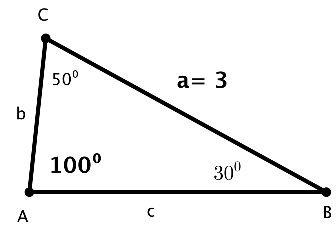


Comencemos por calcular el ángulo faltante, la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180°, calculemos el ángulo A.

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle A + 30° + 50° = 180°$

$\measuredangle A = 100°$



Observemos con detenimiento los datos conocidos que relacionen un ángulo conocido y su lado opuesto, también un lado o ángulo conocido y su lado o ángulo opuesto desconocido.

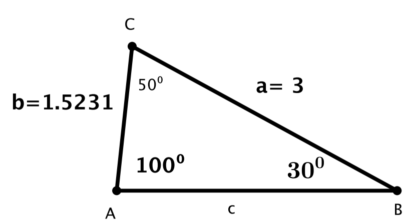
$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} \qquad o \qquad \frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C}$$

si utilizamos la primera relación tenemos:

$$\frac{3}{sen\,100°} = \frac{b}{sen\,30°}$$

$$b = \frac{3sen\,30°}{sen\,100°}$$

$$b = 1.5231$$



Usamos ahora la relación:

$$\frac{c}{sen\,C} = \frac{b}{sen\,B} \qquad o \qquad \frac{c}{sen\,C} = \frac{a}{sen\,A}$$

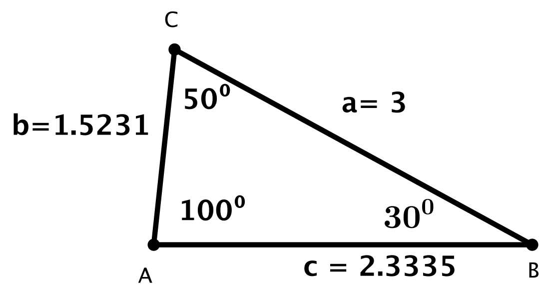
si usamos la segunda relación tenemos:

$$\frac{c}{sen\,50°} = \frac{3}{sen\,100°}$$

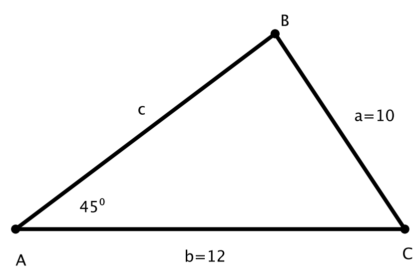
$$c = \frac{3sen50°}{sen\ 100°}$$

$$c = 2.3335$$

Resolvimos el triángulo al encontrar sus tres ángulos y sus tres lados.



Resolver el siguiente triángulo:



Tenemos un ángulo y su lado opuesto conocidos, otro lado conocido y desconocido su lado opuesto, esa debe ser la relación útil.

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

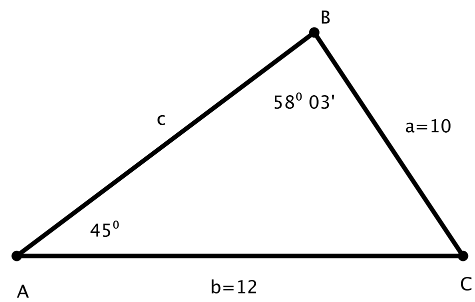
$$\frac{10}{sen\ 45°} = \frac{12}{sen\ B}$$

$$10 sen\ B = 12 sen\ 45°$$

$$sen\ B = \frac{12 sen\ 45°}{10}$$

$$sen\ B = 0.8485$$

$$B = sen^{-1}(0.8485)$$
$$B = 58°\ 3'$$



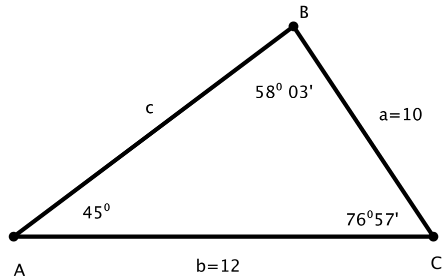
La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180°, entonces:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

$$45° + 58°03' + \measuredangle C = 180°$$

$$\measuredangle C = 180° - 103°03'$$

$$\measuredangle C = 76°57'$$



usando la relación:

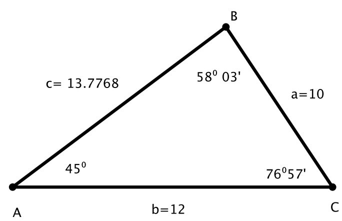
$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C}$$

$$\frac{10}{sen\ 45°} = \frac{c}{sen\ 76°57'}$$

$$10sen\ 76°57' = c(sen\ 45°)$$

$$c = \frac{10sen\ 76°57'}{sen\ 45°}$$

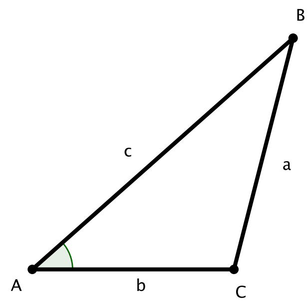
$$c = 13.7768$$



Ley de cosenos:

El cuadrado de cualquier lado de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de esos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

Sea ΔABCun triángulo cualesquiera



algebraicamente representamos la ley de cosenos para el lado a de la siguiente manera:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$

note que si el ángulo $\measuredangle A$ es igual a $90°$ entonces $\cos 90° = 0$, si lo sustituimos en fórmula anterior, tenemos que:

$a^2 = b^2 + c^2$

que es el teorema de Pitágoras.

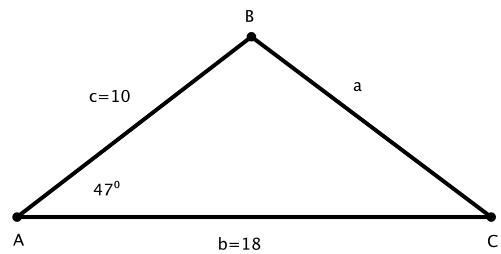
La representación algebraica con los otros lados es:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\ B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\ C$

La ley de cosenos permite calcular la medida de un lado cualquiera del triángulo, siempre y cuando se conozcan los otros dos lados y el ángulo formado por estos dos últimos.

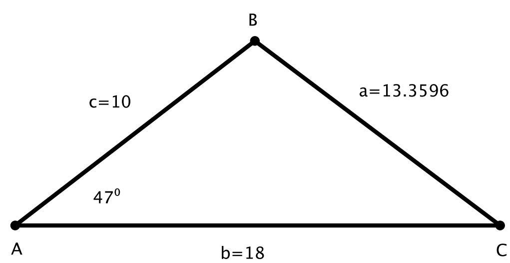
Resolver el siguiente triángulo aplicando la ley de cosenos:



Conocemos el lado b y c así como el ángulo formado entre ellos, por lo que podemos calcular el lado a.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$$

$$a^2 = 18^2 + 10^2 - 2(18)(10)Cos\ 47°$$
$$a^2 = 324 + 100 - 245.5194$$
$$a^2 = 178.4805$$
$$a = 13.3596$$



En este punto podríamos usar la ley de senos, pero usaremos la ley de cosenos para practicar su despeje, calcularemos el ángulo B comenzando por escribir su representación algebraica:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\ B$$

sustituimos los valores conocidos y tenemos:

$$(18)^2 = (13.3596)^2 + (10)^2 - 2(13.3596)(10)Cos\ B$$

despejando $Cos\ B$:

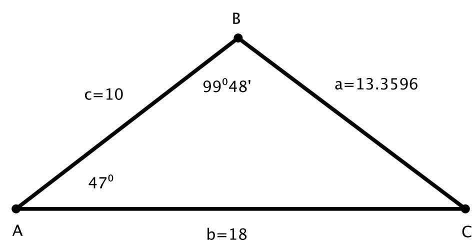
$$2(13.3596)(10)Cos\ B = (13.3596)^2 + (10)^2 - (18)^2$$

$$Cos\ B = \frac{(13.3596)^2 + (10)^2 - (18)^2}{2(13.3596)(10)}$$

$$Cos\ B = -0.17036$$

$$B = Cos^{-1}(-0.17036)$$

$$B = 99°48'$$

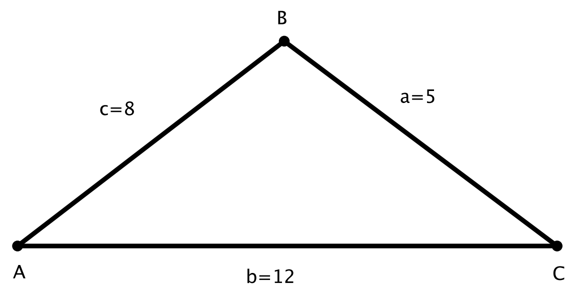


El ángulo C lo calculamos aplicando la propiedad: la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180°.

$\measuredangle C = 180° - 146°48'$

$\measuredangle C = 33°12'$

Resolver el siguiente triángulo:



Note que no se conoce la medida de ninguno de sus ángulos, por lo que podemos encontrar cualesquiera de los tres ángulos, comencemos por el ángulo A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$

despejando $Cos\ A$:

$$Cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

sustituyendo los valores:

$$Cos\ A = \frac{12^2 + 8^2 - 5^2}{2(12)(8)}$$

$$Cos\ A = 0.9531$$

$$A = Cos^{-1}(0.9531)$$

$$A = 17°36'$$

Análogamente calculamos el ángulo B:

$$Cos\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

sustituyendo:

$$Cos\ B = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)}$$

$$Cos\ B = -0.6875$$
$$B = Cos^{-1}(-0.6875)$$
$$B = 133°25'$$

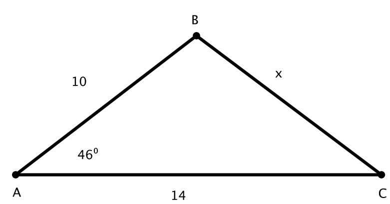
El ángulo C lo calculamos restando los ángulos A y B a 180°.

$\measuredangle C = 180° - 151°1'$

$\measuredangle C = 28°59'$

A continuación se muestran ejemplos donde conjuntamente se puede utilizar la ley de senos y/o la ley de cosenos.

a) Hallar el valor de x

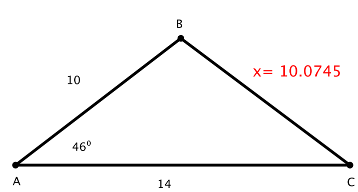


Calculando el ángulo A:

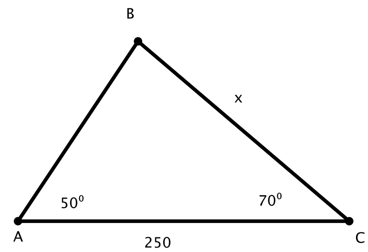
$x^2 = 10^2 + 14^2 - 2(10)(14)Cos46°$

$x^2 = 101.4956$

$x = 10.0745$



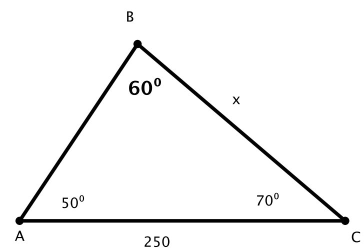
b) Hallar el valor de x en el siguiente triángulo:



Calculando el ángulo B:

$\measuredangle B = 180° - (50° + 70°)$

$\measuredangle B = 60°$



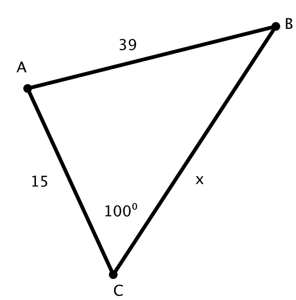
Usando la ley de senos:

$$\frac{x}{sen\ 50°} = \frac{250}{sen\ 60°}$$

$$x = \frac{250sen50°}{sen\ 60°}$$

$x = 221.1379$

c) Calcular el valor de x:



Usando ley de senos:

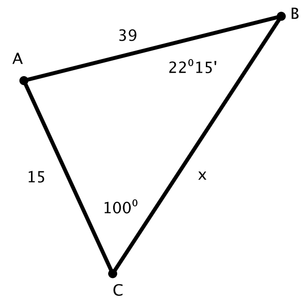
$$\frac{39}{sen\ 100°} = \frac{15}{sen\ B}$$

$$39senB = 15sen100°$$

$$sen\,B = \frac{15 sen\,100°}{39}$$

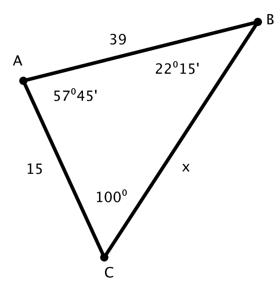
$$B = sen^{-1}(0.3787)$$

$$B = 22°15'$$



El ángulo A se calcula restando a $180° - (100° + 22°15')$

$A = 57°45'$



En este punto podemos elegir indistintamente la ley de senos o cosenos.

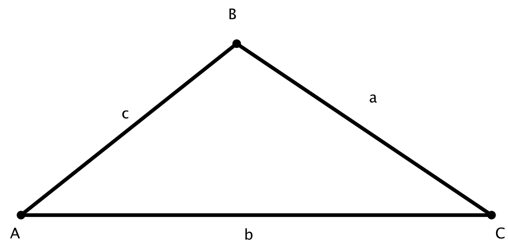
$$\frac{x}{sen\,57°45'} = \frac{39}{sen\,100°}$$

$$x = \frac{39 sen\,57°45'}{sen\,100°}$$

$$x = 33.4922$$

Para resolver:

Aplicando la ley de senos y/o ley de cosenos, resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos, conocidos 3 datos.



1) a=40
   b=20
   c=30

2) a=13
   b=4
   c=15

3) a=35
   b=28
   C=$60° \, 40'$

4) b=60.5
   c= 84
   $A = 30°20'$

5) a=40
   b=$28°40'$
   C=$50°$

6) c=25.5
   $B = 51°33'$
   $C = 31°30'$

4.9. Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas son en las que las incógnitas son argumento de las funciones trigonométricas, las incógnitas son los ángulos. Existen varios métodos para resolverlas dependiendo del tipo de ecuación, en algunas se procede con métodos algebraicos, otras por factorización, métodos cuadráticos o con identidades trigonométricas, a continuación mediante ejemplos mostraremos dichos métodos.

Resolver la ecuación:

$4sen\, x - 2 = 0$

usando pasos algebraicos despejamos la x:

$4senx = 2$

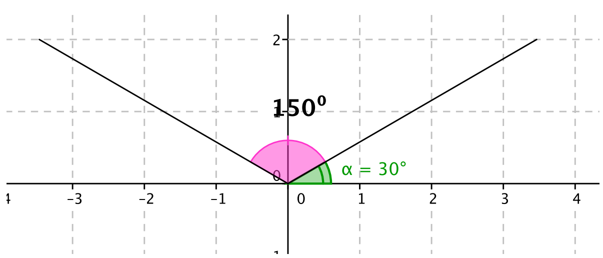
$$sen\, x = \frac{2}{4}$$

$$sen\, x = \frac{1}{2}$$

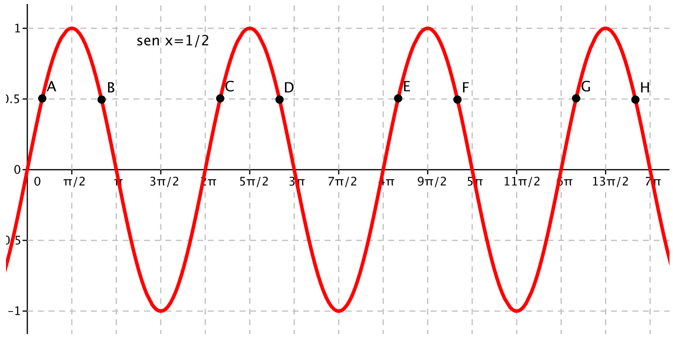
$$x = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 30° = \frac{\pi}{6}$$

Observa que la función $sen\, x$ es positiva en el primer y segundo cuadrante



Comprueba en tu calculadora que $sen\, 30° = sen\, 150° = \frac{1}{2}$, además recuerda que la función $sen\, x$ es periódica cada $360° = 2\pi$, observa la siguiente gráfica:



$\therefore$ las soluciones son $\begin{cases} x_1 = 30° \pm n360° = \frac{\pi}{6} \pm n(2\pi) \\ x_2 = 150° \pm n360° = \frac{5\pi}{6} \pm n(2\pi) \end{cases}$ para $n \in \mathbb{Z}$

Para comprobar que nuestra solución es correcta sustituimos es la ecuación original y verificamos que se convierta en identidad.

$4sen\, x - 2 = 0$

si $x_1 = 30°, 30° + 1(360°) = 390°, 30° + 2(360°) = 750°$,etc.

calculando el valor de $sen\, x_1 = sen\ 30° = sen\ 390° = \ sen750° = \frac{1}{2}$

$4(sen\, x_1) - 2 = 0$

$4\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$

$2 - 2 = 0$

$0 \equiv 0$

Análogamente se comprueba para $x_2 = 150° \pm n360°$.

Resolver la ecuación $2\tan\propto - \frac{3}{\tan\propto} - 1 = 0$

Es conveniente reducir la expresión, tomando el común denominador $\tan\propto$.

$$\frac{2\,tan^2\propto -3 - tan\propto}{\tan\propto} = 0$$

$$2tan^2\propto -tan\propto -3 = 0$$

haciendo un cambio de variable; $x = \tan\propto$ la ecuación se convierte a:

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

resolvemos la ecuación de segundo grado por medio de la fórmula general, con los valores de $a = 2, b = -1\ y\ c = -3$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Regresamos al cambio de variable realizado y tenemos:

$$\tan\propto_1 = \frac{3}{2}$$

$$\propto_1 = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

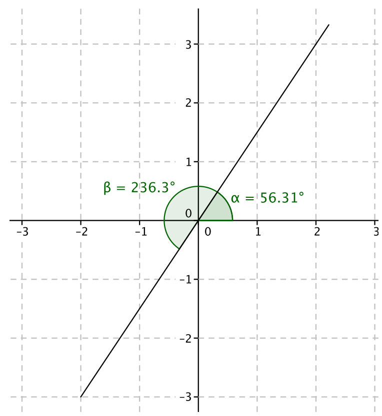
$$\propto_1 = 56.3099°$$

$\tan \propto_2 = -1$

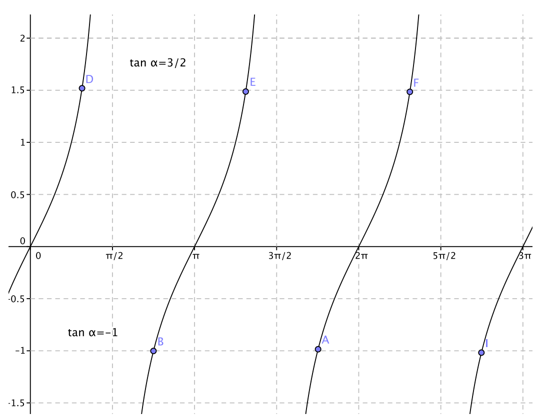
$\propto_2 = tan^{-1}(-1)$

$\propto_2 = -45° = 135°$

La función $\tan \propto$ es positiva en el primer y tercer cuadrante, por lo tanto los ángulos cuyas tangentes son iguales a 3/2 y -1 son los que están representados en la siguiente gráfica:



Comprueba en tu calculadora que $\tan 56.3099° = \tan 236.3099° = \frac{3}{2}$, además recuerda que la función $tan\, x$ es periódica cada $180° = \pi$, observa la siguiente gráfica.



$\therefore$ las soluciones son $\begin{cases} x_1 = 56.3099° \pm n180° \\ x_2 = 135° \pm n180° \end{cases}$ con $n \in \mathbb{Z}$

Resolver la ecuación:

$$2sen^2\beta - 5sen\beta + 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variable, $x = sen\ \beta$ la ecuación tomará la forma:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

como el trinomio no es factorizable completaremos el trinomio a cuadrado perfecto, dividimos primero los términos entre 2.

$$\frac{2x^2 - 5x}{2} = -\frac{2}{2}$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -1 + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{3}{4}$$

$$x = \pm\frac{3}{4} + \frac{5}{4}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Haciendo el cambio de variable tenemos:

$sen\ \beta = 2$

La solución x_1=2 la descartamos ya que $sen\, x_1 \neq 2$ recuerda que la función $sen\,\beta$ toma valores entre -1 y 1 ∴ no es solución.

$sen\ \beta = \frac{1}{2}$

$\beta = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\beta = 30°$

$\therefore$ la solución es $\begin{cases} \beta = 30° \pm n360° = \frac{\pi}{6} \pm n(2\pi) \\ \beta = 150° \pm n360° = \frac{5\pi}{6} \pm n(2\pi) \end{cases}$ con $n \in \mathbb{Z}$

Resolver $2cos^2 x - \cos x = 0$

Factorizando $\cos x$ tenemos:

$$\cos x(2\cos x - 1) = 0$$

los dos factores dan por producto cero $\therefore$ tenemos dos casos:

caso I:

$\cos x = 0$

$x = cos^{-1}(0)$

$x = 90°$

$x = 90° \pm n360° = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$

$x = 270° \pm n360° = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$

caso II:

$2cosx - 1 = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = 60°$

$x = 60° \pm n360° = \frac{\pi}{3} \pm 2n\pi$

$x = 300° \pm n360° = \frac{5\pi}{3} \pm 2n\pi$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Resolver: $2sen\, x - 1 = 0$

Despejando x:

$2sen\, x = 1$

$sen\, x = \frac{1}{2}$

$x = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = 30°, 150° \pm n360°\ con\ n \in \mathbb{Z}$

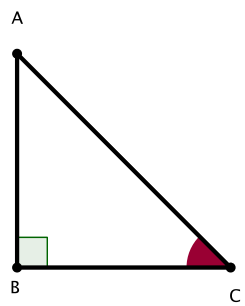
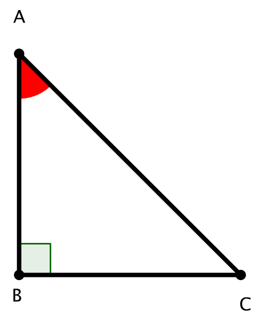
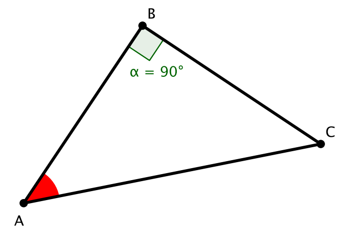
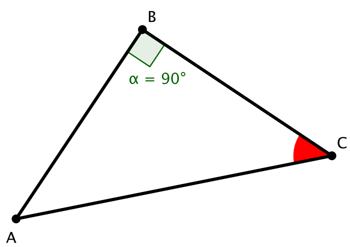
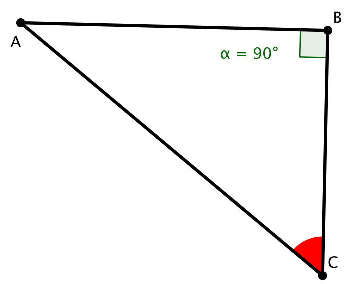
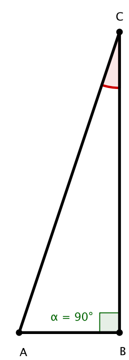
Para resolver:

En parejas discutan el método para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones trigonométricas y expresen el resultado en grados sexagesimales.

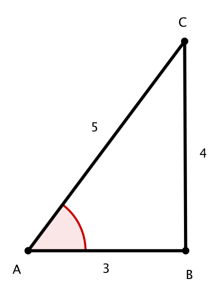
ECUACIÓN	SOLUCIÓN
$2sen^2 + sen\,x = 0$	
$2sen^2 x - 5sen\,x + 2 = 0$	
$sen\,\beta + sen\,\beta = 2$	
$2cos^2 = -2\cos x$	
$sen^2\delta - sen\,\delta = 0$	
$3tan^2 x - 1 = 0$	
$sec^2 x = \frac{4}{3}$	

4.10. Problemario

1. Respecto del ángulo marcado , indica cuál es el cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa.

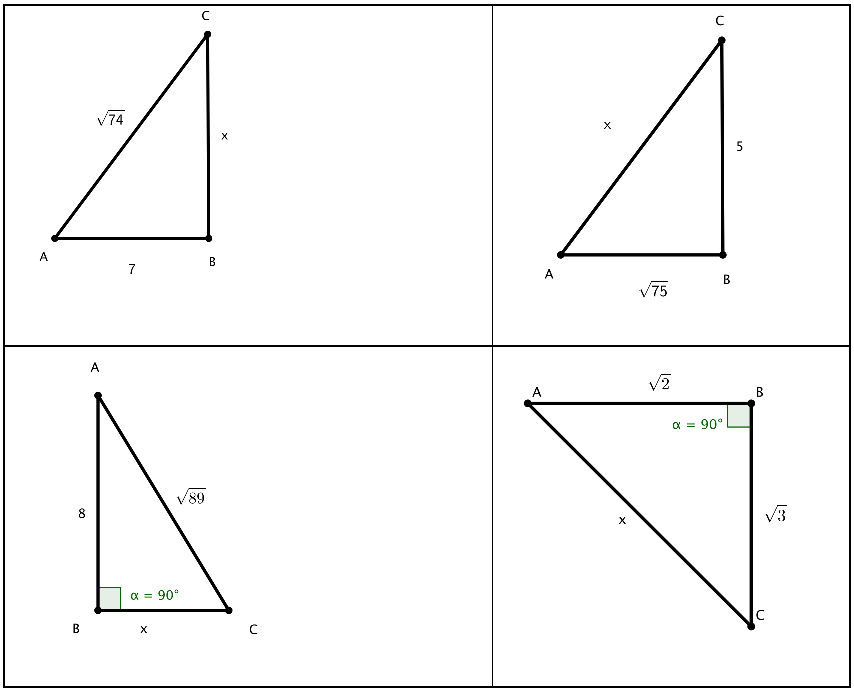
		
		

2. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo indicado

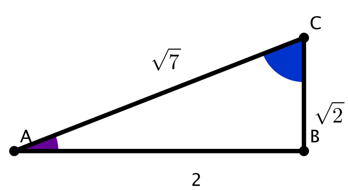


3. Dado $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ calcular las funciones faltantes

4. Calcular el valor de x en los triángulos siguientes:



5. Calcular las funciones trigonométricas de A, iguala con la co-función de su ángulo complementario.



6. Utilizando calculadora científica obtener:

a) $sen\ 41°$

b) $\cos 37°33'$

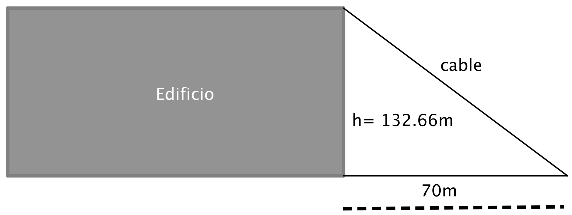
c) $\tan 20°20'20"$

d) $\csc 50°$

e) $\sec 38°$

f) $\cot 26°$

7. En un edificio de forma rectangular un cable está sujeto desde la parte más alta hasta el piso, la distancia de la base del edificio a el punto donde está sujeto en el piso es de 70m, y la altura del edificio es de 132.66m, calcular la longitud del cable.



8. Calcula el valor de $sen\ \frac{\pi}{7}$

9.Una pantalla plana de televisión tiene forma cuadrada, su diagonal mide 32 inch, ¿cuánto miden sus lados?

10. Calcular la altura de un triángulo equilátero de lado 4.

11. Calcular el valor de las siguientes expresiones

a) $sen\ 30° + \cos 60° + 2$

b) $3 \cot 45° + 2 \sec 60°$

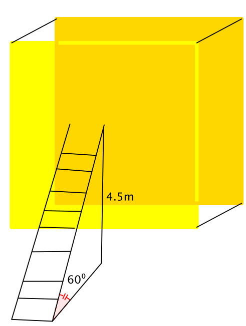
12. Utiliza calculadora científica para graficar

a) $sen\ \frac{x}{2}$

b) $\cos\frac{x}{2}$

c) $\tan\frac{x}{2}$

13. El extremo de una escalera está apoyada en un muro alcanzando una altura de 4.5m, respecto del suelo forma un ángulo de $60°$.¿Qué medida tiene la escalera?



14. Un árbol proyecta una sombra sobre el piso de 15m, cuando los rayos del sol forman un ángulo de $20°$ con el piso. Calcular la altura h del árbol.

15. Probar las siguientes identidades trigonométricas.

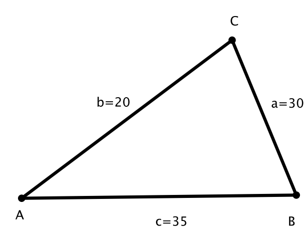
a) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

b) $cot^2x = cos^2x + (\cot x \cos x)^2$

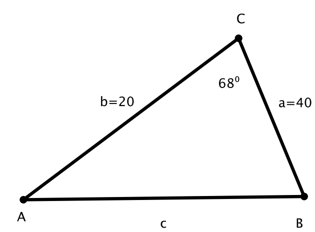
c) $tan^2x + sen^2x + cos^2x = sec^2x$

d) $sec^2x + csc^2x = \frac{1}{sen^2xcos^2x}$

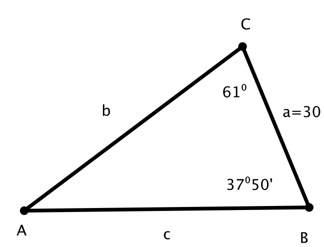
16. Resolver el siguientes triángulos oblicuángulo



17. Resolver el triángulo oblicuángulo siguiente

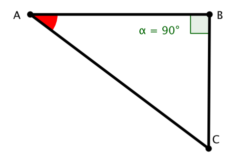


18. Resolver el triángulo oblicuángulo siguiente

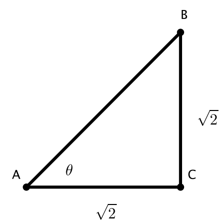


4.11. Autoevaluación

1. Identifica el cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa del siguiente triángulo, respecto del ángulo A.



2. Calcula las funciones trigonométricas de θ.



3. Dada la función $\cos\ \theta = \frac{3}{5}$ calcular el resto de funciones trigonométricas.

4. Graficar la función $2\ sen\ \ \theta$.

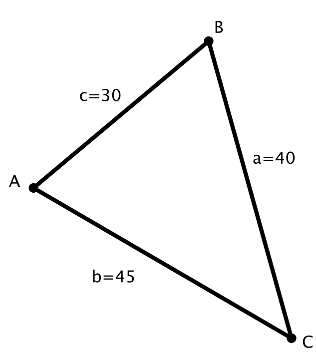
5. Probar la identidad

$$\frac{1}{tan^2x} + 1 \equiv\ csc^2x$$

6. Resolver la ecuación trigonométrica:

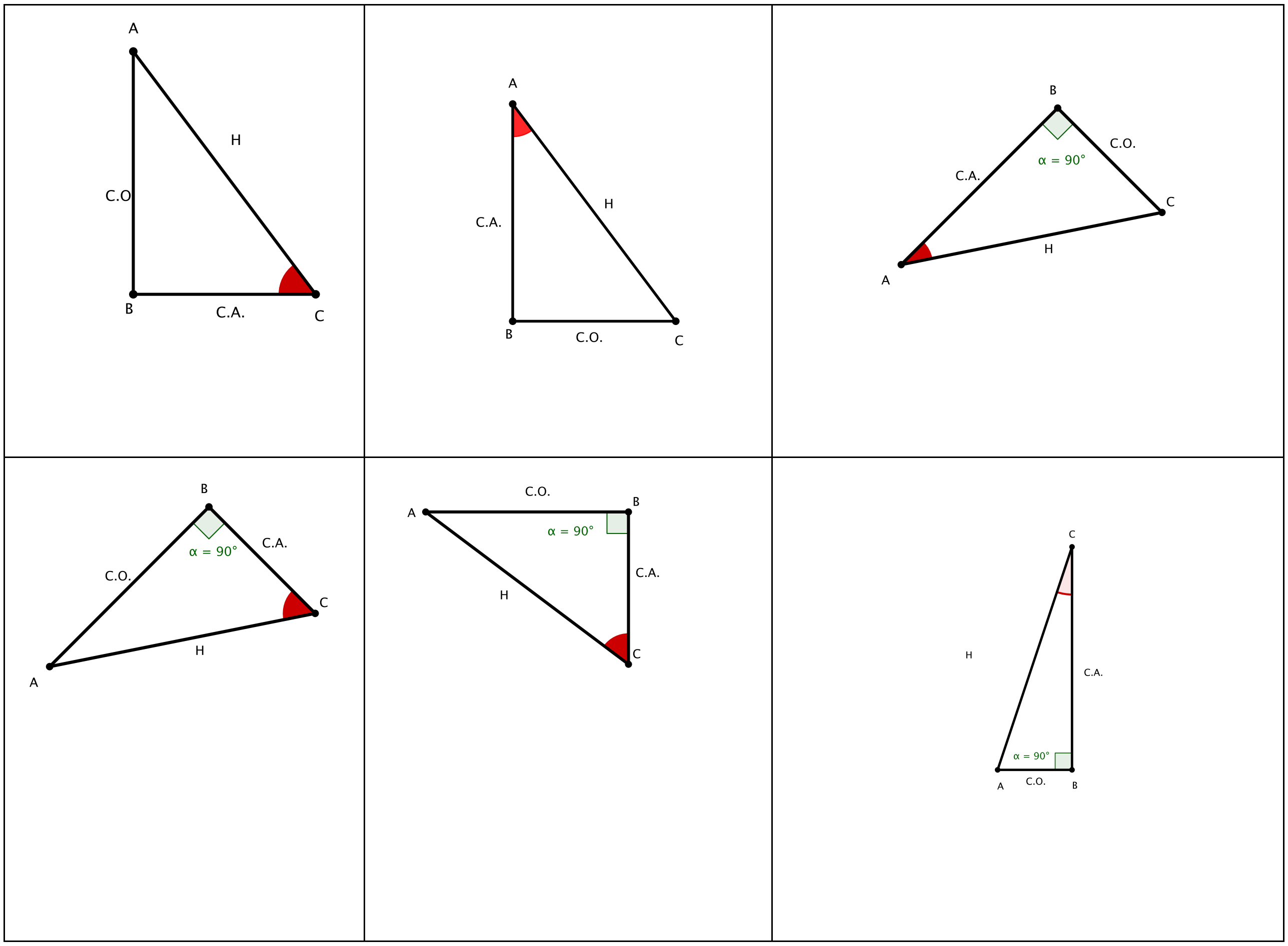
$$\cos x = \frac{1}{2}$$

7. Resolver el siguiente triángulo acutángulo

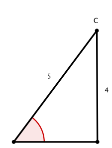


4.12. Soluciones del problemario

1.



2.

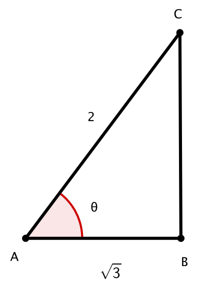


$$sen\ A = \frac{4}{5} \qquad \csc A = \frac{5}{4}$$

$$\cos A = \frac{3}{4} \qquad \sec A = \frac{4}{3}$$

$$\tan A = \frac{4}{3} \qquad \cot A = \frac{3}{4}$$

3.



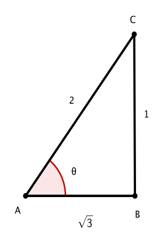
Conocemos que;

$\cos\theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ falta el cateto opuesto que calcularemos usando el teorema de Pitágoras.

$$2^2 = (\overline{BC})^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$4 = \overline{BC}^2 + 3$$

$$\overline{BC} = 1$$



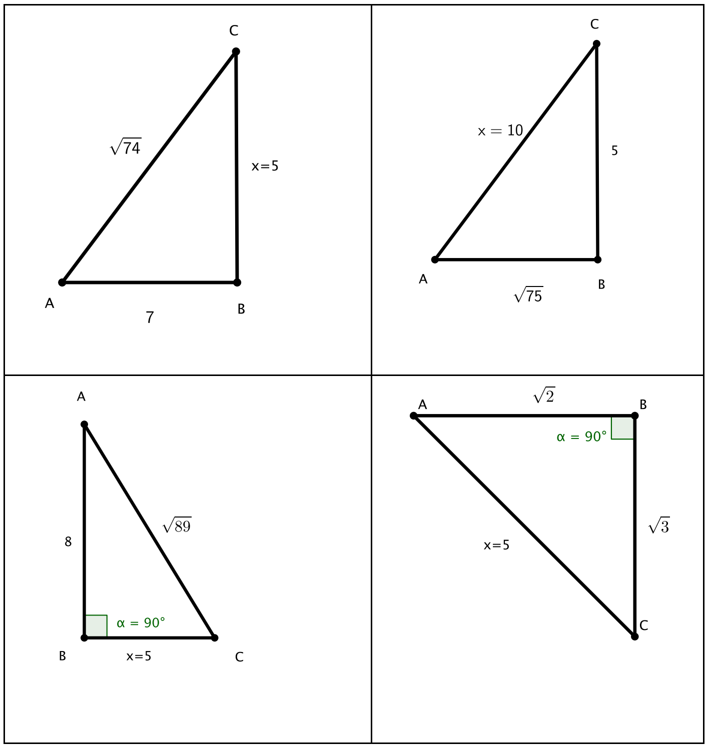
conocidos los 3 lados calculamos las funciones restantes. De hecho al conocer la función coseno podemos indicar su recíproca secante.

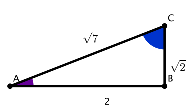
$sen\ A = \frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\csc A = 2$

$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\quad$ $\sec A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\quad$ $\cot A = \sqrt{3}$

4.



5. 

$$sen\ A = \cos C = \sqrt{\frac{2}{7}} \qquad \csc A = \sec C = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\cos A = sen\ C = \frac{2\sqrt{7}}{7} \qquad \sec A = \csc C = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\tan A = \cot C = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot A = \tan C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6. Utilizando calculadora científica obtener:

a) $sen\ 41°$= 0.6560

b) $\cos 37°33'$=0.7928

c) $\tan 20°20'20"$= 0.3706

d) $\csc 50°$= 1.3054

e) $\sec 38°$=1.2690

f) $\cot 26°$=2.0503

7. Longitud del cable 149.99m≈ $150m$

8. El valor de $sen\ \frac{\pi}{7}$= 0.4338

9. Cada lado mide 4 inch.

10. $h = \sqrt{12}$

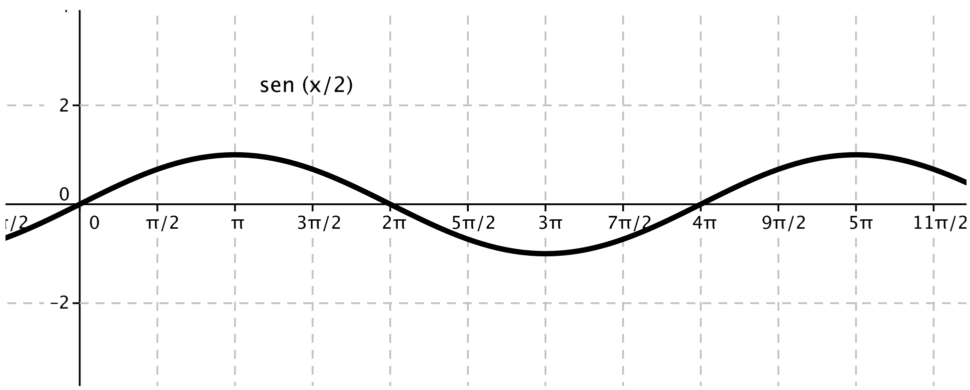
11.

a) $sen\ 30° + \cos 60° + 2 = 3$

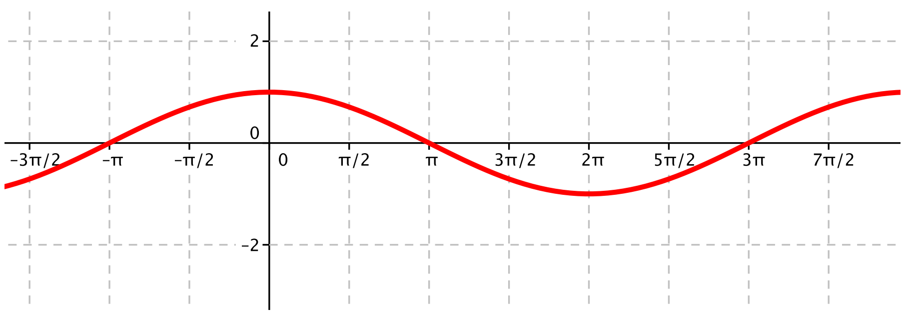
b) $3 \cot 45° + 2 \sec 60° = 5$

12.

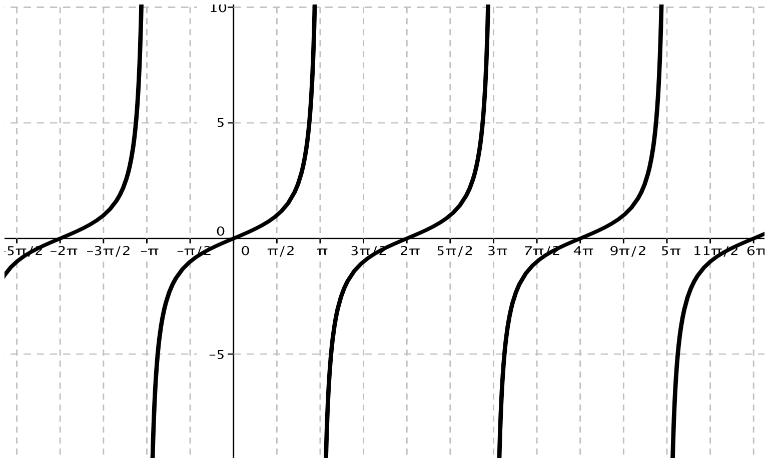
a)



b)



c)

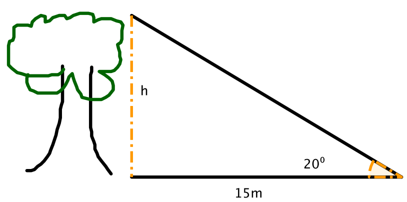


13. $sen\ 60° = \frac{4.5}{x}$

$x = \frac{4.5}{sen\ 60°} = 5.19$

longitud de la escalera 5.19m

14.



$\tan 20° = \frac{h}{15m}$

$h = 15m(tan20°)$

$h = 5.45m$

15.

a) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \csc\theta$

$\frac{sen\ \theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{sen\ \theta} = \sec\theta\csc\theta$

$\frac{sen^2\theta + cos^2\theta}{\cos\theta\ sen\ \theta} = \sec\theta\csc\theta$

$\frac{1}{\cos\theta\ sen\ \theta} = \sec\theta\csc\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{sen\ \theta} = \sec\theta\csc\theta$

$\sec\theta\csc\theta \equiv \sec\theta\csc\theta$

b) $cot^2x = cos^2x + (\cot x \cos x)^2$

$cot^2x = cos^2x + (cot^2xcos^2 x)$

$cot^2x = cos^2x(1 + cot^2x)$

$cot^2x = cos^2x(csc^2x)$

$cot^2x = cos^2x\left(\frac{1}{sen^2x}\right)$

$cot^2x = \frac{cos^2x}{sen^2x}$

$cot^2x = \left(\frac{\cos x}{sen\ x}\right)^2$

$cot^2x \equiv cot^2x$

c) $tan^2x + sen^2x + cos^2x = sec^2x$

$\frac{sen^2x}{cos^2x} + sen\ ^2x + cos^2x = sec^2x$

$\frac{sen^2x + sen^2xcos^2x + cos^4x}{cos^2x} = sec^2x$

$\frac{sen^2x + sen^2xcos^2x + cos^2x\ cos^2x}{cos^2x} = sec^2x$

$\frac{sen^2x + cos^2x(sen^2x + cos^2x)}{cos^2x} = sec^2x$

$\frac{sen^2x + cos^2x(1)}{cos^2x} = sec^2x$

$\frac{1}{cos^2x} = sec^2x$

$sec^2x \equiv sec^2x$

d) $sec^2x + csc^2x = \frac{1}{sen^2xcos^2x}$

$sec^2x\ csc^2x = \frac{(1)(1)}{sen^2xcos^2x}$

$sec^2x\ csc^2x = \frac{1}{sen^2x} \times \frac{1}{cos^2x}$

$sec^2x\ csc^2x \equiv csc^2x\ sec^2$

16. Resolver el siguientes triángulos oblicuángulos

Usando ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$

$2bcCos\ A = \ b^2 + c^2 - a^2$

$Cos\ A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$Cos\ A = \dfrac{20^2 + 35^2 - 30^2}{2(20)(30)}$

$Cos\ A = \dfrac{725}{1400}$

$A = \ cos^{-1}\left(\dfrac{725}{1400}\right)$

$\boldsymbol{A = 58°48'}$

Usando ley de senos:

$\dfrac{30}{sen\ 58°48'} = \dfrac{35}{sen\ C}$

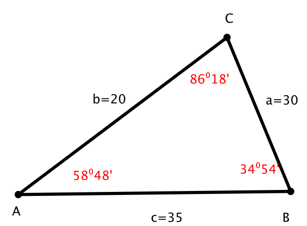
$sen\ C = \dfrac{35sen\ 58°48'}{30}$

$sen\ C = 0.9979$

$C = \ sen^{\ -1}(0.9979)$

$\boldsymbol{C = 86°18'}$

La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale $180°\ \therefore\ \measuredangle\boldsymbol{B = 34°54'}$



17. Usando ley de cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\ C$

$\boldsymbol{c = 37.42}$

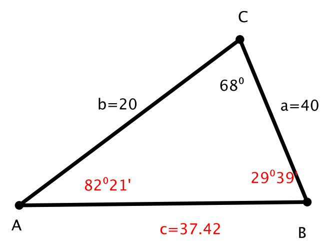
Usando ley de senos:

$$\frac{37.42}{sen\ 68°} = \frac{40}{sen\ A}$$

$$A = sen^{-1}(0.9911)$$

$$\boldsymbol{A = 82°21'}$$

$$\boldsymbol{\measuredangle B = 180° - (\measuredangle A + \measuredangle C) = 29°39'}$$



18. $\measuredangle A = 180° - (\measuredangle C + \measuredangle B) = 81°10'$

Usando ley de senos:

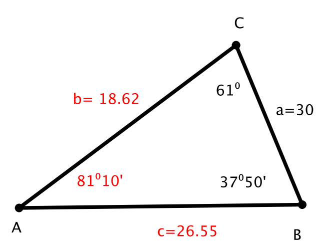
$$\frac{c}{sen\ 61°} = \frac{30}{sen\ 81°10'}$$

$$\boldsymbol{c = 26.55}$$

Usando ley de senos:

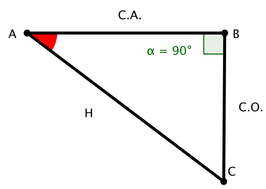
$$\frac{b}{sen\ 37°50'} = \frac{30}{sen\ 81°10'}$$

$$\boldsymbol{b = 18.62}$$

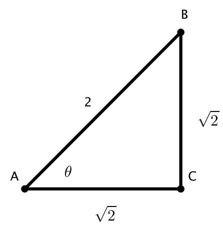


4.13. Soluciones de la autoevaluación

1.



2.

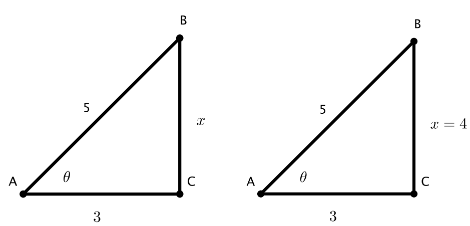


$sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\csc\ \theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\cos\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sec\ \theta = \sqrt{2}$

$\tan\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ $\quad$ $\cot\ \theta = 1$

3.

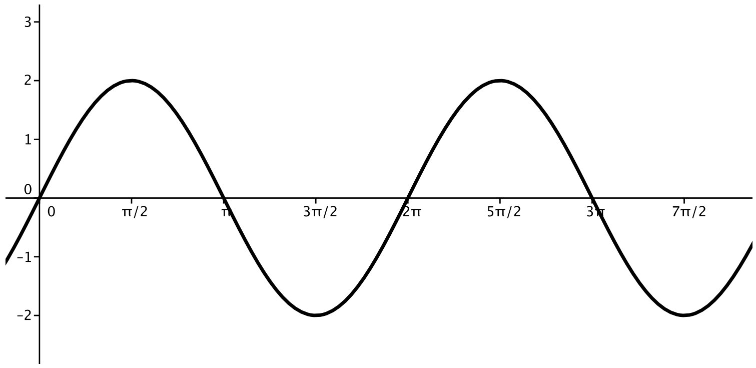


$\cos\ \theta = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\sec\ \theta = \frac{5}{3}$

$sen\ \theta = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\csc\ \theta = \frac{5}{4}$

$\tan\ \theta = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\cot\ \theta = \frac{3}{4}$

4.



5.

$$\frac{1}{\frac{sen^2x}{cos^2x}} + 1 = csc^2x$$

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} + 1 = csc^2x$$

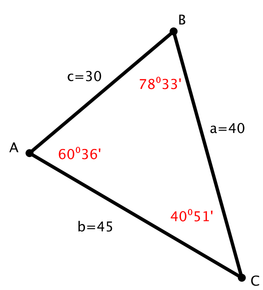
$$\frac{cos^2x + sen^2x}{sen^2x} = csc^2x$$

$$\frac{1}{sen^2x} = csc^2x$$

$$csc^2x \equiv csc^2x$$

6. $60° \pm 2n\pi$

7.



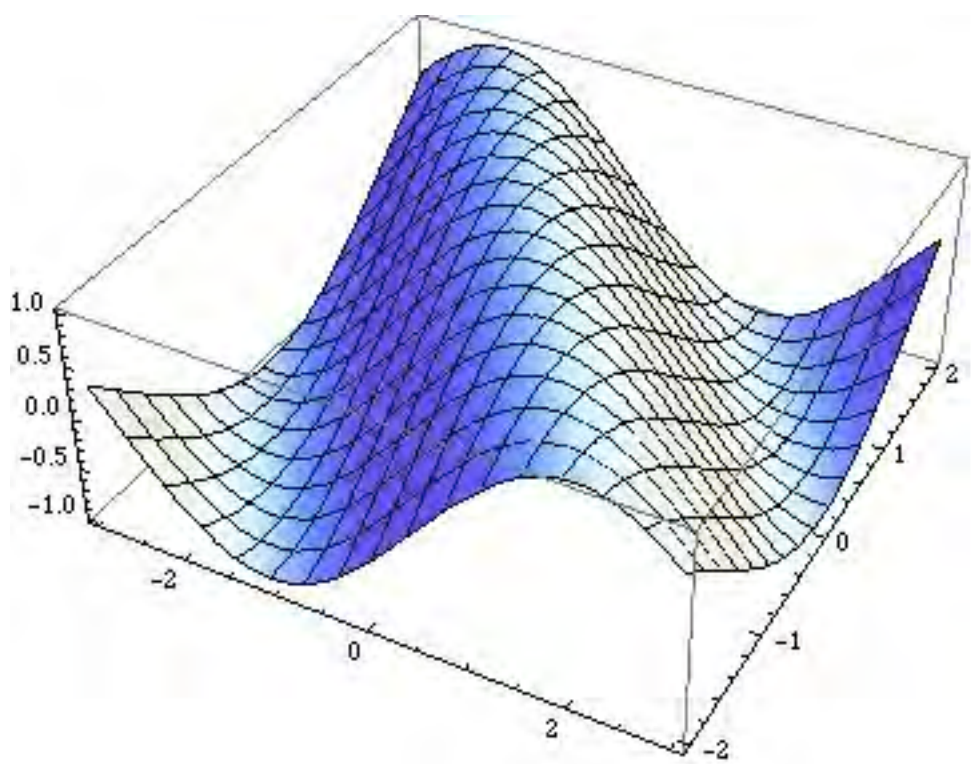
$\measuredangle A = 60°36'$

$\measuredangle B = 78°33'$

$\measuredangle C = 40°51'$

4.14. Conclusiones

Este capítulo es una introducción al maravilloso mundo de la trigonometría, como se comentó en un inicio, las funciones trigonométricas no siempre han sido tratadas como razones, es interesante conocer su origen y evolución, te invitamos a usar programas que te permitan visualizar las gráficas de las funciones y sus cambios cuando cambia el argumento, encontrarás que su aplicación es muy amplia e importante en las ingenierías y ciencias físicas, entre muchas otras áreas. El contenido de éste capítulo te servirá de apoyo en tus próximos cursos y lo aplicarás constantemente.



Gráfica de la función $\cos(x+y)$ en 3D

REFERENCIAS

[1] Flores Francisco (2008). Historia y didáctica de los números racionales e irracionales. España: Íttakus

[2] Pérez Miguel(2009).Una Historia de Las Matemáticas: Retos y Conquistas a través de sus personajes. España: Editorial Visión Libros.

[3] Strathern Paul (1999). Pitágoras y su teorema. España: Siglo veintiuno editores, S.A.

[4] Steiner Erich (2003).The Chemistry Maths Book. España: Editorial Reverté, S.A.

[5] Linés Escardó(1991). Principios de análisis matemático. España: Editorial Reverté, S.A.

[6] Díaz Zuleyka, Fernández José, et al.(2007). Matemáticas Fundamentales para Estudios Universitarios. España: Delta Publicaciones.

[7] Larson Ron(2008).Precálculo. España: Reverté Ediciones, S.A.