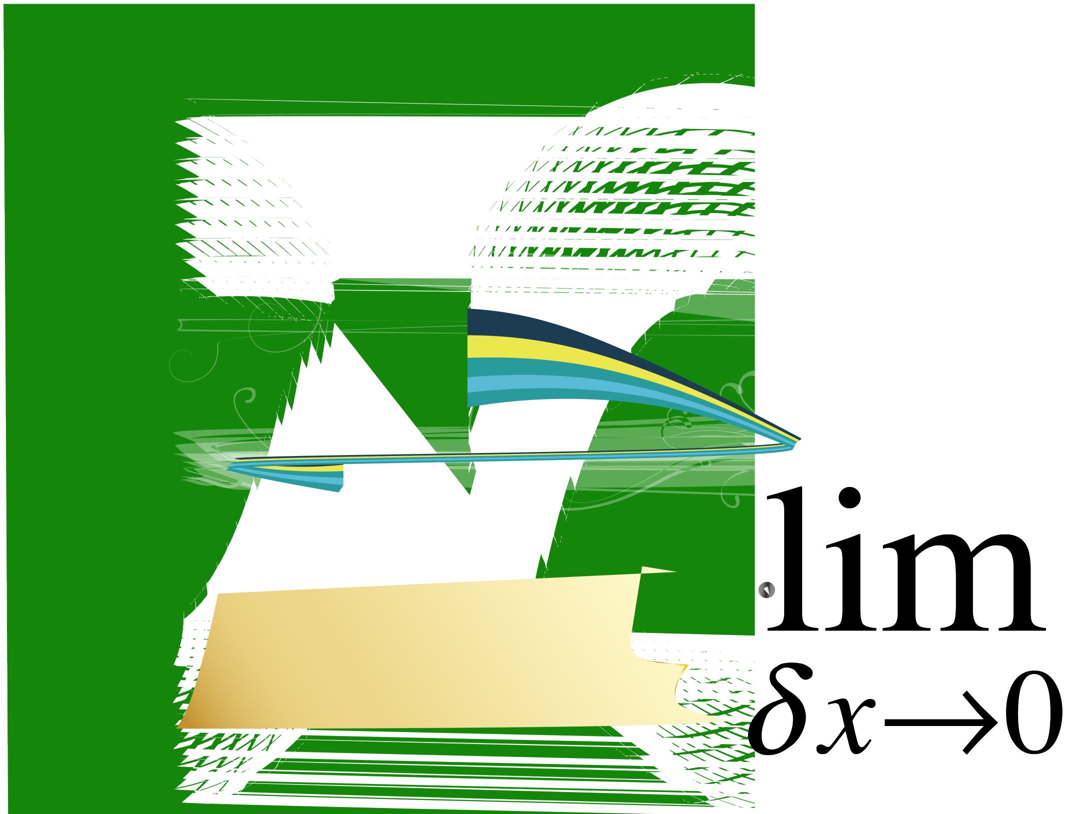
Análisis derivativo de funciones



Francisco Javier González García
Silvia Ochoa Hernández
Marisol Rodríguez Núñez
José Luis Molina Moreno
Leopoldo Francisco Chávez Contreras

SEP SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

conalep Michoacán

Gobierno del Estado MICHOACÁN

Semestre 5

PRESENTA:

Análisis derivativo de funciones

Autores:

Francisco Javier González García

Silvia Ochoa Hernández

Marisol Rodríguez Núñez

José Luis Molina Moreno

Leopoldo Francisco Chávez Contreras

Título original de la obra:

Registro: **CONALEP-DERIVA -1D**

Programa: Profesor escritor. Desarrollo de la competencia de la producción de información literaria y lectura.

González, G. F.J. ; *et al.* (2014) **Análisis derivativo de funciones.** México: CONALEP/CIE

x, 260 p.; carta

Registro: **CONALEP-DERIVA -1D** Documentos en línea

Editores:

Ing. Eduardo Ochoa Hernández

Lic. Filho Enrique Borjas García

Editorial: CONALEP Michoacán

Col. Chapultepec norte, Gral. Nicolás Bravo No. 144, Morelia, Michoacán.

http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/

Registro: **CONALEP-DERIVA -1D**

ISBN: En trámite

Impreso en_______________________

Impreso en México –Printed in Mexico

DIRECTORIO

Prefacio

Estimado estudiante:

Las palabras que sombrean estas páginas, no son simple ciencia dentro del diálogo como depósitos de datos e información, ni son cuestión de vocabulario o listado de definiciones, son la experiencia generosa de la comunidad CONALEP Michoacán, esa realidad oculta pero necesaria que respaldó las tareas de investigación y composición literaria del discurso que integra este libro. Nos referimos a los profesores, administrativos y sindicatos que hoy convergen en el umbral de la existencia para apoyar a un grupo de profesores escritores que han creado en el sereno libre, arquitecturas de conocimientos como un viaje de aprendizaje que exigirá del estudiante, lo mejor de sí mismo ante la presencia luminosa del texto, ese que pretende enseñarle a caminar con la frente en alto.

Las ideas asociadas en este texto, equivalen a la imaginación lograda en el acto de escribir desde otros textos, al decodificarlas el estudiante, se le exige más vocabulario para enriquecer su habla y hacer ver a sus ojos más allá de la estrechez de la información que inunda a la sociedad moderna. El libro no presenta la superficie de la existencia como cruda observación, procura que su dificultad incite a perforar la realidad hasta reflexiones que renueven los modos inciertos de dar significado al mundo. La ciencia, la literatura y la tecnología no las percibimos como mundos incomunicables, los valores son explícitos caminos que las vinculan entorno al currículo del técnico bachiller. Tienen estos textos organización de premisas, técnicas, justificaciones, normas, criterios y como Usted se dará cuenta, también mostrará nuestros límites para seguir haciendo puentes entre las incesantes creaciones de nuevas fronteras de la investigación científica y técnica. Se pretende que estos libros sean contenido y no un libro de prácticas escolares, sean la herramienta de complementación para enriquecer los discursos de la enseñanza-aprendizaje.

Los profesores de CONALEP enfrentan a diario las carencias visibles de medios tecnológicos, materiales y documentales, sería fácil usar las palabras para señalar hasta el cansancio nuestras apremias, pero se ha decidido mejor producir libros como testimonios vivos y luminosos que renueven el rol social de la academia colegiada sensible a la condición social, susceptible de ir perfeccionándose con la acumulación de esta experiencia literaria, para servir de mejor manera al enriquecimiento de las competencias necesarias para realizar el sueño de éxito de tantos jóvenes Michoacanos.

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Mensaje a la comunidad académica

conalep
Michoacán

Con la colaboración docente, administrativa y sindical se realizó el esfuerzo de producir literatura de contenido en apoyo a la formación curricular en CONALEP Michoacán. El libro, esa experiencia de conocimiento se ha democratizado, ya no es un secreto o privilegio de unos cuantos, el texto virtual en la Web resolvió lo que la imprenta de Gutenberg no logró hacer, la auto publicación, la biblioteca virtual móvil, el libro electrónico y el texto digital; esto nos replantea migrar a una pedagogía interactiva con la experiencia del conocimiento. Desde luego que el libro clásico como dice Humberto Eco, nadie puede acabar con su poder en esta sociedad. Promover crear y leer literatura es enriquecer el vocabulario, el desarrollo intelectual, la agudeza de la creatividad y pintar la realidad con lo que nacemos libres: la imaginación.

El docente escritor, dirige el aprendizaje en función de la experiencia de reconstruir el conocimiento contemplado en los currículo. Se realiza el acto de pensar al escribir e investigar, los modelos de conocimiento ensayo, libro, tesis, reseña, síntesis, semblanza, resumen, análisis de texto, definición, argumento, razonamiento, hipótesis, patente, marco teórico, revisión, poema, novela, cuento, … entre otros, resuelven la necesidad de conocer, ser y aprender. El docente escritor escribe y pública su propuesta en el formato de libro, con ello, se abre a la crítica social y expone su calidad como marco ético de revaloración moral frente a su comunidad.

La escritura es más que gramática y semántica, es el acto de estructurar el pensamiento en un modelo de conocimiento, es volver a dar voz al profesor como producción de la libertad de cátedra, acto creativo original en el que encarna la soberanía de la sociedad como expresión cultural particular que habla desde su propio tiempo. Leer para crear es el acto sustantivo del novel. Escribir es una cierta reorganización del conocimiento previo en un acto de creación, donde la teoría literaria, los marcos normativos de estilo, la sicolingüística, la epistemología y la comunicación son los pilares de plataforma del aprendizaje centrado en el acto creativo.

Este libro fue escrito para compartir la felicidad de crear la presencia del docente en el texto. CONALEP desarrolla un programa académico para impulsar su capacidad y compromiso social para generar las ideas curriculares para enriquecer la sensibilidad y la imaginación científica, técnica y humanista de su comunidad.

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

La palabra no solo nos otorga realidad, también tengo la sensación de que tiene vida propia separada de nosotros, y que cuando hablamos o escribimos, especialmente en momentos de intensa emoción, no hacemos más que dejarnos llevar por una sílaba amable o una frase complaciente.

Eric Ormsby. *Fine incisions*

Leer es una tarea de la memoria por medio de la cual las ficciones nos permiten disfrutar de experiencias ajenas y lejanas en el tiempo como si fueran nuestras.

Alberto Manguel. *La ciudad de las palabras*

En toda obra literaria se afirma una realidad independiente de la lengua y del estilo: la escritura considerada como la relación que establece el escritor con la sociedad, el lenguaje literario transformado por su destino social. Esta tercera dimensión de la forma tiene una historia que sigue paso a paso el desgarramiento de la conciencia: de la escritura transparente de los clásicos a la cada vez más perturbadora del siglo XIX, para llegar a la escritura neutra de nuestros días.

Roland Barthes, *El grado cero de la escritura*

Palabra escrita bajo luz

En un mundo cada día con más canales de comunicación, la palabra escrita camina por los muros que denuncian el drama catastrófico sobre el medio ambiente y sobre el control de la vida humana; el combustible de esta desesperanza produce apatía profunda por tener contacto con el mundo de la literatura, esta distorsión moral parece reflejarse entre los que no quieren sentir responsabilidad ni pensar, dejando a otros su indiferencia al ser prisioneros de ligeras razones y tirria justificada en la empresa de sobrevivir.

Especular en un mundo sin libros es exponer al mundo a la ausencia de pensamiento, creatividad y esperanza. Los libros, dedicados a ser arrebatados por el lector, están expuestos a ser poseídos por las bibliotecas vacías y que con el tiempo opacan sus páginas y empolvan la cubierta de lo que alguna vez fue un objeto de inspiración. Resulta difícil transcribir este instante de un peligroso espacio donde ya muy pocas palabras sobreviven dentro de la reflexión y las pocas sobrevivientes han abandonado la unión del sentido de vivir y el sentido del pensar científico. Escribir pasa de ser un placer repentino a ser una necesidad inminente, es el puente entre lo conocido y lo inexplorado. Es un reto de hoy en día inmiscuirse en lo que una vez fue lo cercano y dejar de lado la novedad tecnológica para poder, a través de las barreras que nos ciegan, abrir fronteras literarias. Es un proyecto que conspira a favor de la libertad creativa, de la felicidad lúcida cargada de libros embajadores de nuevas realidades.

Entre un mar de razones dentro del libro escolar en crisis, se percibe la ausencia de esa narrativa del cuerpo del texto, misma que alimenta al lector de una experiencia de conocimiento, su ausencia, es más un mal glosario, de un mal armado viaje literario científico o de ficción. En esos viajes de libros en crisis, nos cansamos de mirar espacios vacíos de talento, emociones y sensibilidad para responder a un entorno adverso; son muchas veces un triunfalismo de autoevaluación y una falsa puerta de una real competencia para actuar en la realidad. Uno no solo vive, escucha la voz interior de un libro, uno es fundado en el manejo del lenguaje que explica, crea, aplica o expande los límites del horizonte de nuestro imaginario actuante en lo real. No vivimos leyendo texto, sino leyendo el paisaje de una realidad, el libro toma la voz del progreso en una siempre reconstrucción lingüística del sujeto que explica, transforma y comunica desde los desafíos de su generación.

La información cruda que tanto rellena los libros grises, oscuros y papel pintado; requiere ser dotada de conceptos que permitan alimentar al sujeto que toma decisiones, que explora con paso lento, que mira por dentro del lenguaje y aplica la información que cobra sentido en la siempre expansión de las ideas.

Escribir un libro es siempre reconstruir un discurso, sus lectores en este discurso son el puente a un texto profundo que demanda esfuerzo en la reconstrucción de los procesos de razonamiento y el entretejido del discurso que involucra información de fondo, esas fuentes que justifican su análisis y poseen significado privilegiado para la comprensión de una realidad.

El lector puede hacer uso del libro con su propia experiencia y con su autoayuda, al precisar términos y conceptos para prolongar su horizonte de interpretación, el libro se hace cargo de la memoria de un plan de estudios, es un discurso de diferentes capas de argumentos, tras este texto se anuncia un orden de experiencia propuesto para su aprendizaje. El libro está conformado para jóvenes con memoria sin dolor para nuevas palabras, aborda el olvido como una deficiencia de interactividad entre el discurso argumentativo y los referentes conceptuales. Esto es el reto en la producción de los libros CONALEP. La propuesta es una reconstrucción de una semántica más profunda, como el principal reto del estudiante técnico bachiller del siglo XXI.

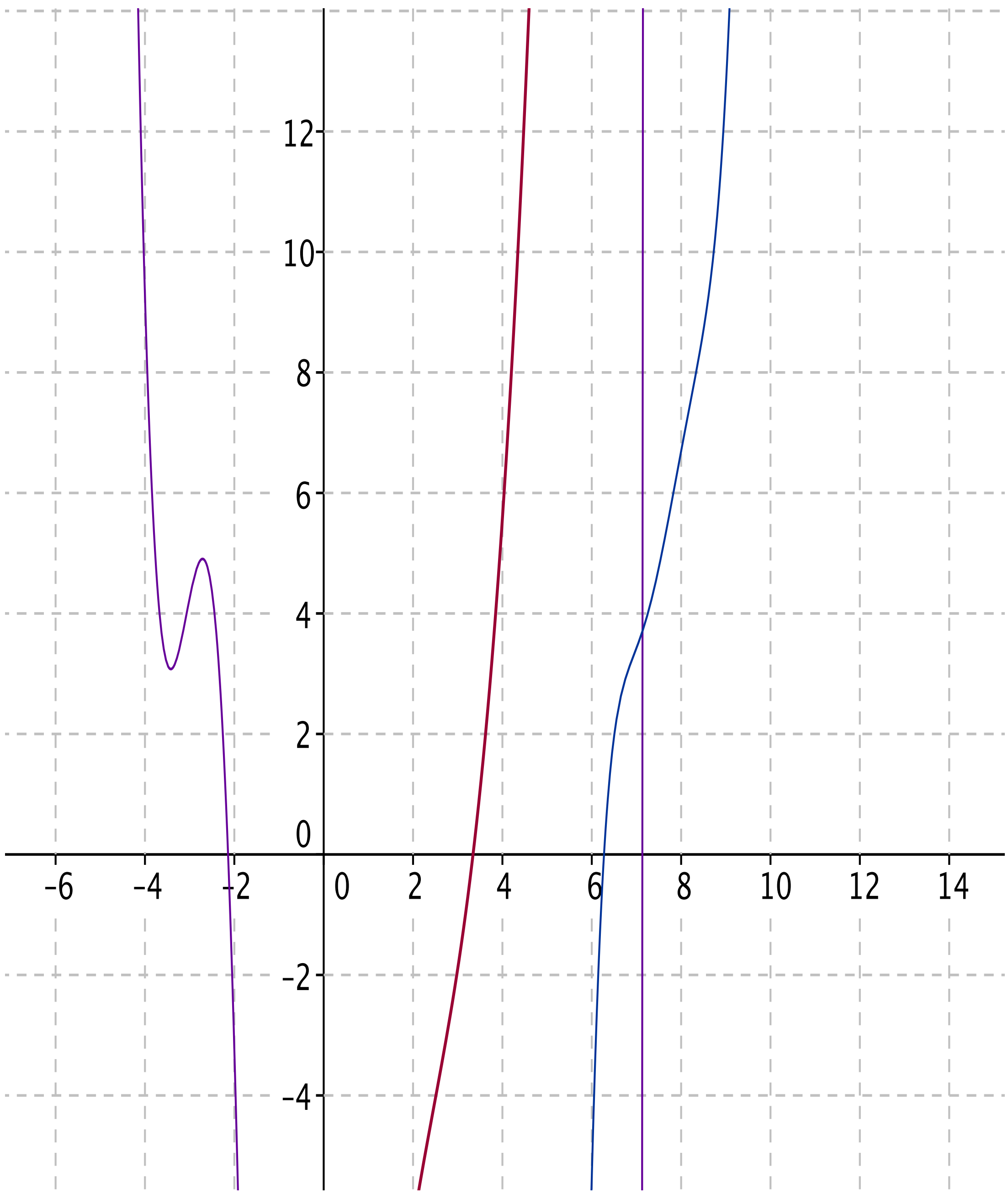
Libro,…

todos te miran,

nosotros te vemos bajo la piel.

SUMARIO

Capítulo 1



1. Introducción[1]

A nuestro alrededor encontramos cosas que se relacionan entre sí, o que están en función de algún parámetro, por ejemplo el peso y la altura, la masa corporal en función del peso y la estatura, los kilómetros recorridos y la cantidad de gasolina consumida, y muchos ejemplos más.

Los orígenes del concepto de función se remontan a ciertos escritos de astrónomos babilonios. En la Edad Media el concepto de función se asocia con el de movimiento siendo Nicolás de Oresme (1323-1392) quien representa en unos ejes coordenados el cambio de velocidad respecto del tiempo. Posteriormente Galileo (1564-1642) estudió el movimiento de manera cuantitativa y expresa sus resultados mediante leyes entre magnitudes.[2]

Han sido diferentes los personajes matemáticos que gracias a sus investigaciones han ido desarrollando el concepto de función. Entre los cuales podemos mencionar a René Descartes (1596-1650), quien en 1637 utiliza la palabra función para señalar la potencia entera de una variable. Isaac Newton (1642-1727) utilizó el término fluyente para designar la relación entre variables. Leibniz (1646-1716) aplica el término función para señalar cantidades que dependen de una variable. Los términos constante, variable y parámetro fueron introducidos por él. Por otro lado, la notación actual que designa a una función como f(x), se debe a Leonhard Euler (1707-1783). Finalmente se puede mencionar al alemán Johann Dirichlet (1805-1859), a quien se le atribuye la definición moderna de función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.[3]

Las funciones pueden ser representadas mediante gráficas, así como llevar a cabo operaciones entre ellas y ser utilizadas para describir situaciones o fenómenos que se presentan a diario en nuestro entorno mediante la modelación matemática.

1.1. Funciones y relaciones[4]

Función: Es una relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno del segundo conjunto[5,6,7], estos conjuntos se llaman dominio y contradominio.

El gran matemático Euler[8], llamado por Laplace como "El maestro de todos nosotros[9]", es quien introduce el término en el vocabulario matemático, pareciéndose al concepto de fórmula, término relacionado con variables y constantes. La definición moderna se le atribuye al alemán Peter Dirichlet[10]; quien introduce el concepto de función como una expresión, una regla o ley que define una relación entre una variable (variable independiente) y otra variable (variable dependiente).

Si observamos a nuestro alrededor, y tratamos de definir lo que ocurre, podríamos hacerlo en términos matemáticos, tal vez quedar definido mediante los siguientes axiomas[11]:

a) Todo evento en la naturaleza puede ser representado mediante ecuaciones o funciones y viceversa, toda ecuación o función puede ser la representación de algún evento en la naturaleza.

b) Todo evento en la naturaleza tiene patrones.

Desde la antigüedad el hombre ha intentado buscar estas relaciones, comenzó colocando marcas en relación con el número de años o de animales que poseía.

Herón de Alejandría en el siglo II D.C. encontró una fórmula que calcula el área de un triángulo en función de sus lados. Tratando de no malinterpretar a Platón[12], podría decirse que llegó a la conclusión de que los números son el lenguaje para expresar las ideas, tal vez aventurándonos, pero sin poder afirmarlo, podríamos pensar que ya tenían una noción de lo que es una función, de la misma forma se podría afirmar que los mayas, egipcios[13] o chinos, entre otras civilizaciones, ya manejaban el concepto o solamente uno cercano a él, el de relación.

Galileo[14] al relacionar el movimiento de los cuerpos celestes en función de su posición, pretendió relacionar los conceptos, formulando leyes, así dio un gran paso hacia la concepción de lo que es una función. Poco después de Galileo, Descartes muestra la relación que existe entre una gráfica y una ecuación y viceversa. Sin embargo, la definición de función se ha ido modificando con el tiempo, desde la construcción de tablas de raíces y potencias hasta como se emplea ahora. Se considera que Leibniz introduce este término, seguido por Bernoulli[15], quien en septiembre de 1694 escribe una carta en respuesta a Leibniz; lo que describe como función en el sentido más actual:

… una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes[16]…

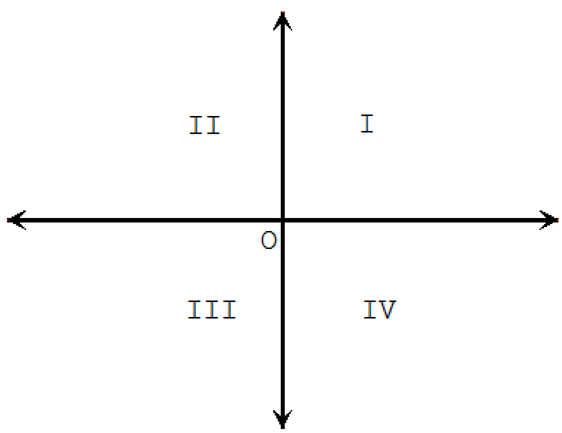
En 1748 el concepto de función tomó énfasis gracias a la publicación "introduction in analysin infinitorum" de Euler, donde define función como:

"…una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como cualquiera que lo sea de dicha cantidad y de números o cantidades constantes[17]…"

Así se da el crédito a Euler de precisar el concepto de función y del estudio de funciones elementales. Sin embargo, es Peter Dirichlet quien introduce el concepto moderno de función.

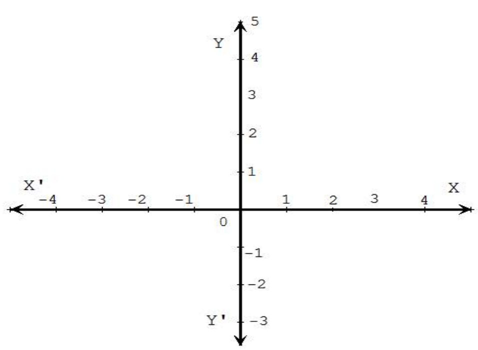
Plano cartesiano

Si dibujamos en un plano dos rectas perpendiculares entre sí, quedan delimitadas cuatro regiones, las cuales reciben el nombre de cuadrantes y se denotan mediante números romanos I, II, III y IV, como se especifica en la figura. Las rectas se llaman ejes coordenadas y su punto de intersección se llama origen y se denota por O.



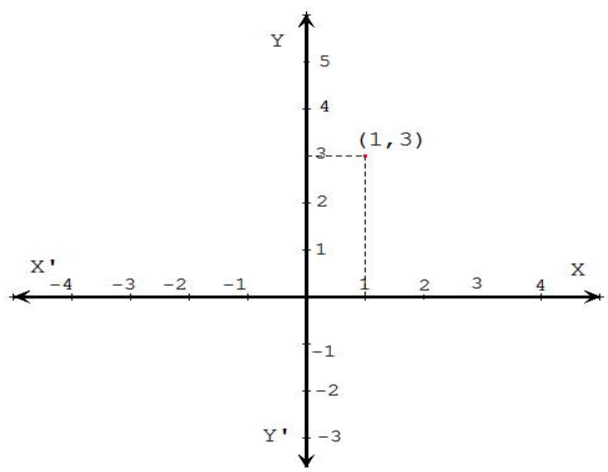
Cuadrantes en el plano cartesiano.

El eje horizontal, el eje **X** recibe el nombre de eje de las abscisas, y el perpendicular a este el eje **Y**, eje de las ordenadas. El plano y los ejes coordenados se llaman plano cartesiano en honor a René Descartes, el precursor de la geometría analítica.



Plano cartesiano

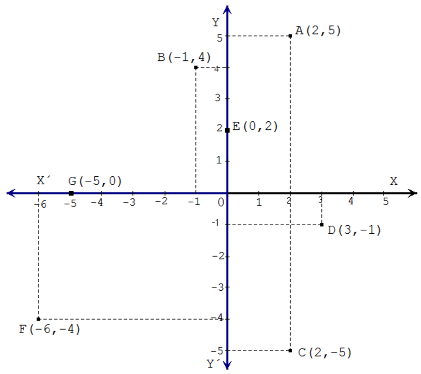
Los ejes X y Y son considerados como rectas reales, con el cero ubicado en el origen, y con la misma escala. En su posición usual, el eje X es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha con respecto al origen, por lo que los números positivos quedan en el extremo derecho y los negativos en el izquierdo; en tanto, que el eje Y es vertical, su dirección positiva es hacia arriba y los números negativos quedan abajo. Las coordenadas de puntos ubicados en el plano cartesiano:



Localización de puntos en el plano cartesiano

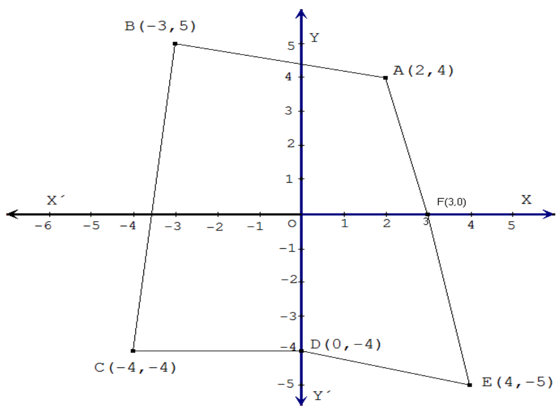
Ejemplo: localiza en el sistemas de ejes de coordenadas los siguientes puntos: A (2,5),

B(-1,4), C(2,-5), D(3,-1), E(0,2), F(-6,-4), G(-5,0)



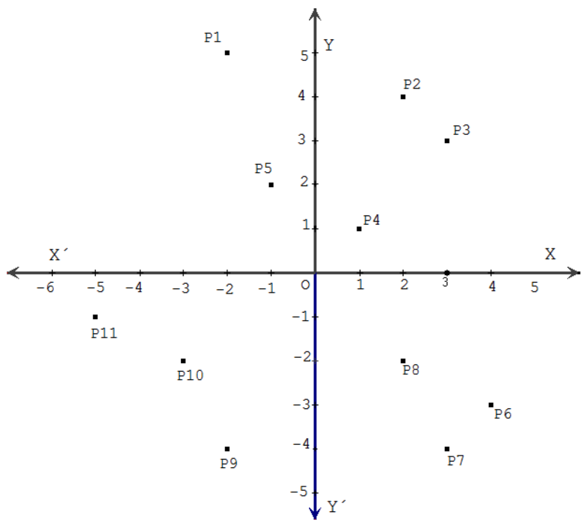
Puntos en el plano cartesiano

Ejemplo: dibuja el polígono cuyos vértices son: A (2,4), B(-3,5), C(-4,-4), D(0,-4), E(4,-5) y F(3,0).



Polígono en el plano cartesiano

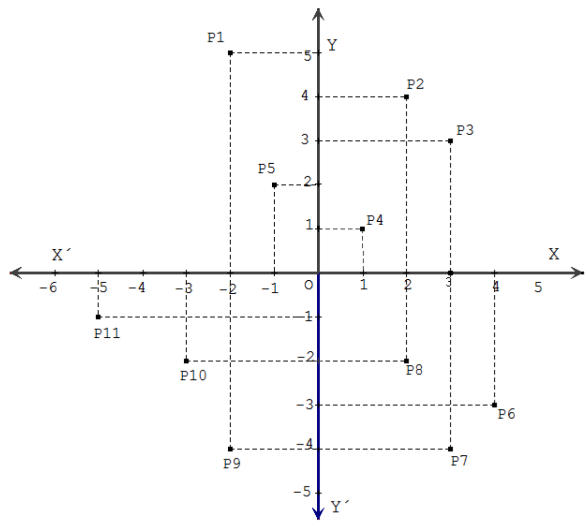
Ejemplo: encuentra las coordenadas de los puntos señalados en el siguiente plano cartesiano:



Puntos en el plano cartesiano

Coordenadas de los puntos:

$P_1(-2,5)$
$P_2(2,4)$
$P_3(3,3)$
$P_4(1,1)$
$P_5(-1,2)$
$P_6(4,-3)$
$P_7(3,-4)$
$P_8(2,-2)$
$P_9(-2,-4)$
$P_{10}(-3,-2)$
$P_{11}(-5,-1)$



Representación del lugar geométrico

Producto cartesiano

Comencemos por definir el producto cartesiano de dos conjuntos, como el conjunto formado por todas las parejas ordenas, tales que como primer elemento de las parejas se tome cada uno de los elementos del primer conjunto y como segundo elemento de las parejas ordenadas cada uno de los elementos del segundo conjunto[18].

Por ejemplo: sean A= {1,2,3} y B={a,b}, A× B={(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)}
Observe que por ser un conjunto se coloca entre llaves { } y se separan sus elementos que están formados por seis nuevas parejas ordenas, por comas; es decir, formamos un producto cartesiano de seis parejas.

Si calculamos B × A tendremos que: B×A= {(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)}.

Obsérvese que en el producto cartesiano no se presenta la propiedad conmutativa.

En el producto cartesiano[19], al conjunto formado por los primeros elementos de las parejas ordenadas se le llama dominio y al formado por los segundos elementos codominio.

1.2. Variables dependiente e independiente

Cuando se establece una función de un conjunto $\boldsymbol{A}$ en un conjunto $\boldsymbol{B}$, a través de una regla de correspondencia $\boldsymbol{f}$, se asocia a cada elemento **x** del conjunto **A** un único elemento **y** del conjunto **B.**

Esto se puede escribir con la siguiente notación[20]:

$$\boldsymbol{f : A \to B}$$

Si el valor de **y** depende de **x**, decimos que **y** es una función de **x**.

Entonces podemos usar la notación de función[21] $\boldsymbol{f(x)}$**.** (se lee *f* de **x**)

Es decir,

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

donde:

- **x** es la variable independiente
- **y** es la variable dependiente
- **f** representa la regla de correspondencia

Esta forma de denotar una función se atribuye al matemático Leonhard Euler.

Notación funcional:

Para indicar la relación entre las variables usamos $y = f(x)$, por ejemplo si

$$y = 70x \text{ o } f(x) = 70x$$

Si $x = 5$, $f(5) = 70(5) = 350$

La cantidad a la cual le podemos asignar valores a voluntad, es decir, el número que le asignemos a x, se le llama variable independiente.
Las cantidades cuyos valores se determinan por el valor que toma la variable independiente, en este caso $y = 350$, se les llama variable dependiente.

1.3. Dominio y rango

En una relación o función podemos definir el dominio de una función como el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable dependiente y que hace que exista un valor real de la variable dependiente.

Una **relación**[15] es un subconjunto de un producto cartesiano que asocia a los elementos del dominio con los del contradominio. En nuestra vida cotidiana hacemos uso de varias relaciones, por ejemplo, cuando de acuerdo al apellido de los alumnos les asignamos un número natural para hacer la lista de asistencia, así podría quedar un ejemplo de ella:

A={(1, Mauricio Sereno), (2, Karla Muñoz), (3, Sonia Torres),…}

En esta relación el dominio es un subconjunto de los números naturales:
Dom={1,2,3,4,…n} donde n representa el número del último alumno. El contradominio está formado por el nombre del alumno al que se le asignó un número en la lista, el contradominio se forma pues, con el nombre y apellido paterno de los alumnos y la imagen es igual al contradominio.

Otro ejemplo puede ser, la relación que existe entre el color de la luz del semáforo de tránsito y el estado de movimiento de un vehículo en la vía pública:
H= {(rojo, alto), (ámbar, disminución), (verde, siga)}

En esta relación el dominio es un subconjunto de los colores existentes y el contradominio es el estado de movimiento de un vehículo.

Ejemplo: sean A={1,2,3} y B={1,2,3,4}, obtener el producto cartesiano A×B

A×B={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),
(3,2),(3,3),(3,4)}

El dominio correspondiente es:

Dominio ={1,2,3} y el contradominio ={1,2,3,4}

Ejemplo: sean A={1,2,3} y B={1,2,3,4}, obtener el producto cartesiano B×A

B×A={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),
(4,1),(4,2),(4,3)}

Dominio={1,2,3,4} y el contradominio ={1,2,3}

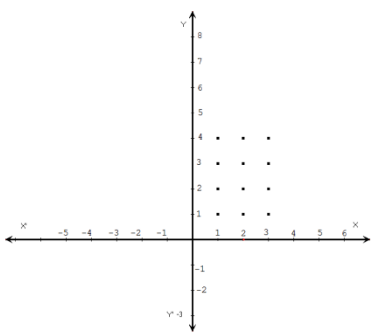
Nótese que el producto cartesiano no es conmutativo.

De lo anterior, podemos concluir que el producto cartesiano entre dos conjuntos es una operación que asigna a cada elemento del primer conjunto con todos y cada uno de los elementos del segundo conjunto, formando un nuevo conjunto, el conjunto de las parejas ordenadas, dicho conjunto puede ser representado gráficamente en un plano cartesiano.

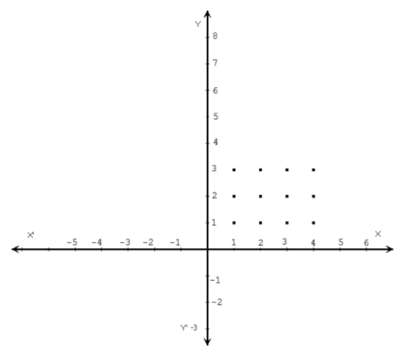
1.4. Gráfica de funciones

Gráfica de una relación

Es conveniente tener una representación gráfica de las relaciones, nos ayuda a ver objetivamente cómo se comportan las variables, esto se puede hacer representando en el eje horizontal los valores de las variables independientes X y en el eje vertical Y los valores de las variables dependientes, como se muestra a continuación:



Producto **A×B**

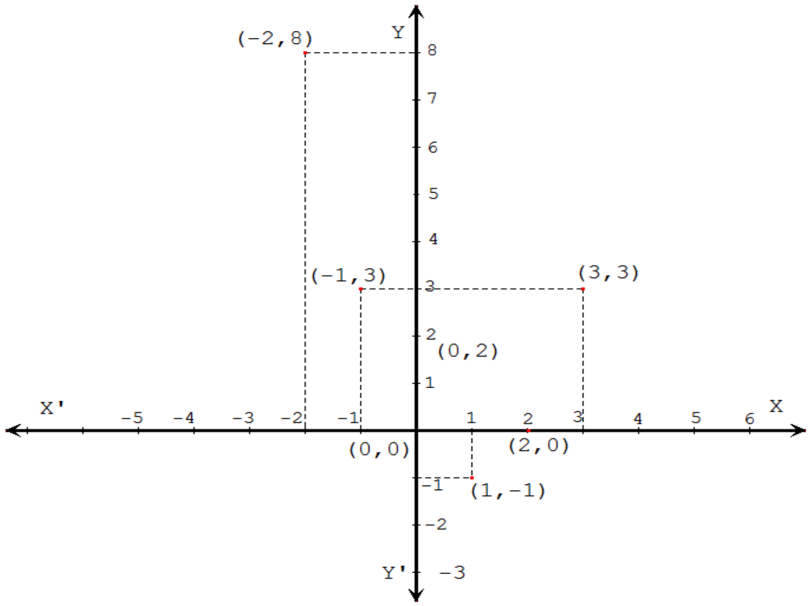


Producto **B×A**

Cuando tenemos una expresión algebraica a la que le asignamos diferentes valores a una literal, la expresión tomará determinados valores, por ejemplo en la expresión $\mathbf{x}^2$-2**x** la llamamos **y**, y escribimos **y**=$\mathbf{x}^2$-**2x**, si le damos valores a la variable independiente (**x** =-2, **x**=-1, **x**=0, **x**=1, **x**=2, **x**=3 etc.), la variable dependiente, tomará los valores: si **x** =-2, **y**=8, para **x** =-1, **y**=3, para **x** =0, **y**=0, para **x** =1, **y**=-1,para **x** =2, **y**=0, para **x** =3, **y**=3, etc., escribiremos las parejas ordenadas colocando como primer elemento al valor de la variable independiente **x** y su segundo elemento el valor correspondiente de la variable dependiente **y**, nos quedará:

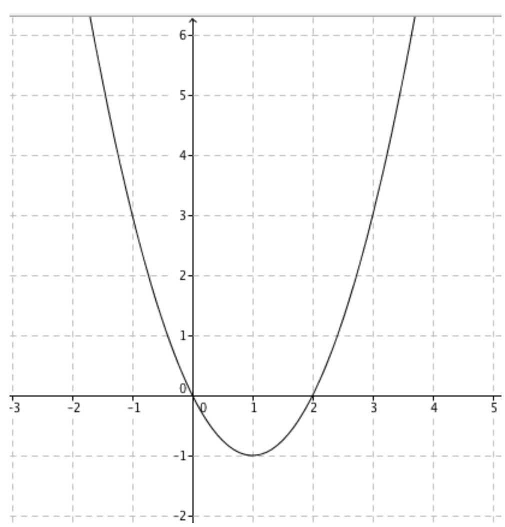
{(-2,8),(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)}

En la expresión y=x^2-2x, a la **x** se le llama variable independiente porque es a la variable que nosotros le asignamos valores de manera arbitraria, la variable **y** cambia dependiendo del valor que le asignemos a **x**, por lo que recibe el nombre de variable dependiente. Graficando la relación anterior, tenemos:

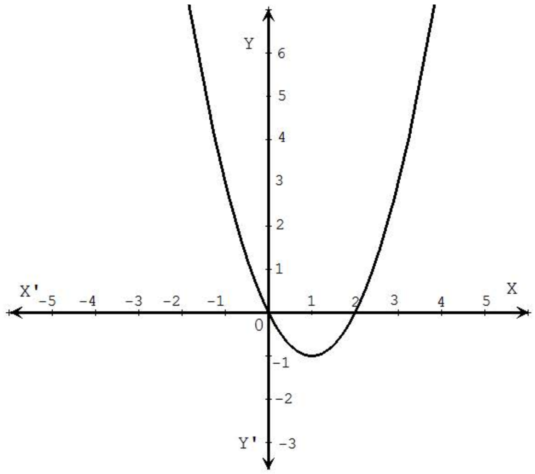


La relación $y=x^2-2x$

Si suponemos que estamos trabajando con el conjunto de los número enteros $\mathbb{Z}$[22], el dominio de la relación anterior estará formado por todo $\mathbb{Z}$ y el rango está formado por todos aquellos valores que cumplan con la relación $y=x^2-2x$, también están en $\mathbb{Z}$, rango={0,-1,3,8,15}. Si trabajamos con los números reales en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, la gráfica quedará representada por todos los puntos que satisfagan a la relación $y=x^2-2x$ y la gráfica se traza con una línea continua, que llamaremos gráfica de la función.



Graficación de funciones



Empleando el ejemplo anterior vemos que el dominio de la relación $y=x^2-2x$ son todos los puntos.

La imagen se obtiene despejando **x** y analizando qué valores reales puede tomar **y,** esto es:

$y=x^2-2x$

$x^2-2x+1= y+1$ completando el trinomio a cuadrado perfecto

$(x-1)^2=y+1$ factorizando el trinomio cuadrado perfecto

$x-1 = \sqrt{y+1}$ sacando raíz cuadrada en ambos lados

$x= \sqrt{y+1}+1$ despejando x

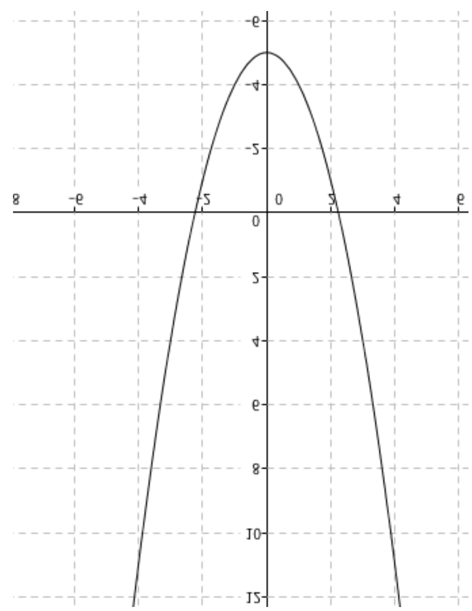
para que x sea un valor real el radicando

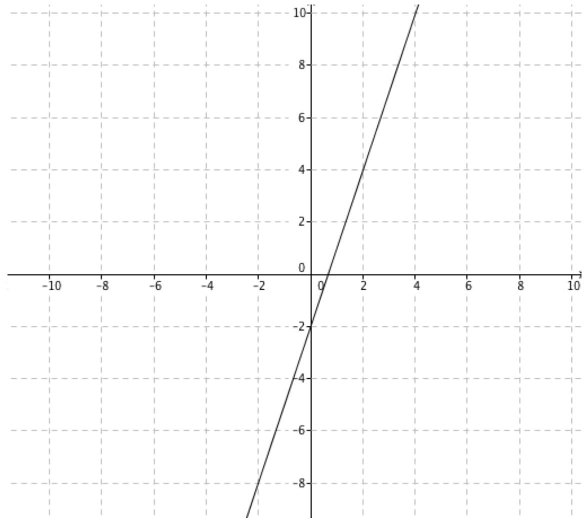
$y+1\geq 0$, esto es $y\geq -1$ por lo que el contradominio es $\{y\in \mathbb{R}/y\geq -1\}$

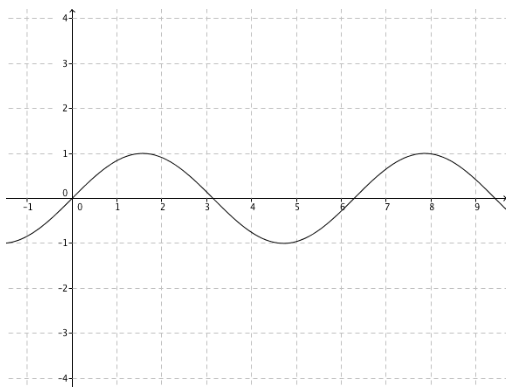
Definiremos ahora una función[14], como una relación en la que a cada elemento del dominio le corresponde una y solo una imagen o conjunto de parejas ordenadas, donde no existen dos diferentes que tengan el mismo primer elemento.

Si A={(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)} los primeros elementos a, b, c y d son diferentes entre sí, respecto a los segundos no se tiene esa limitación, no importa que el elemento 2 se encuentre en la segunda y cuarta pareja, por lo tanto, se puede decir que es una función si no existen dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer elemento. Para identificar si una relación es una función, podemos trazar rectas verticales paralelas al eje Y, y si al menos una corta a la gráfica de la relación en más de un punto, se dice que es una relación, dicho de otra manera, si solo corta en un punto la gráfica de la relación, representa una función.

Observe que para cada valor de **x** solo existirá un valor de **y,** por lo tanto son funciones las gráficas siguientes:

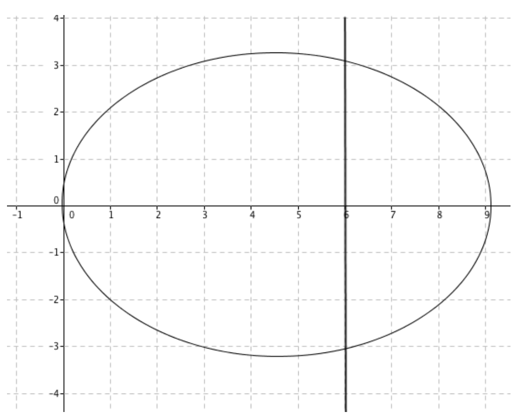






Más adelante se hablará de algunas de estas funciones, cómo obtener su gráfica y su ecuación.

La siguiente gráfica nos permite afirmar que no es la gráfica de una función, ya que si trazamos una recta paralela al eje Y, la corta en dos lugares distintos, eso es que dos parejas ordenadas diferentes tienen el mismo primer valor.



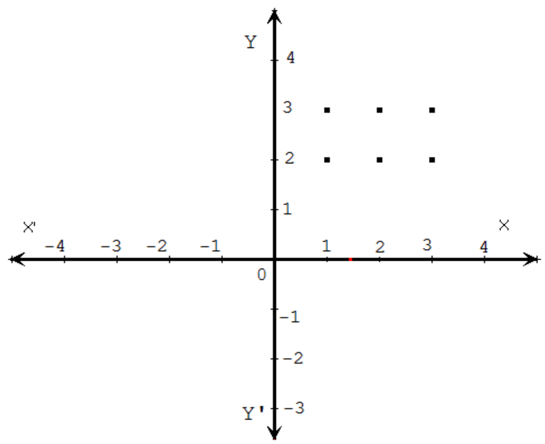
Nota[14,15]: Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Ejemplo: escribe el resultado del siguiente producto cartesiano y traza su gráfica AXB, si A={1,2,3},B={2,3}

A×B= {(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}

Observe que el número de pares ordenados, se puede calcular multiplicando el número de elementos del conjunto A por el número de elementos del conjunto B, esto es, 3×2=6 elementos correspondientes a las seis parejas ordenadas obtenidas.

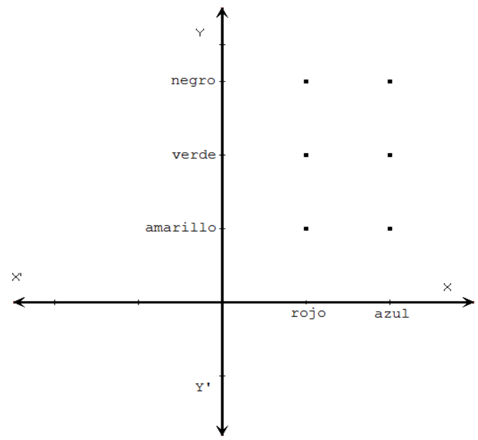
Su gráfica se muestra a continuación:



Gráfica del producto cartesiano A×B.

Ejemplo: calculemos el producto C×D, si C= {rojo, azul} y D= {amarillo, verde, negro}

C×D={(rojo, amarillo),(rojo, verde),(rojo, negro),
(azul, amarillo),(azul, verde),(azul, negro)}



Producto cartesiano $C \times D$.

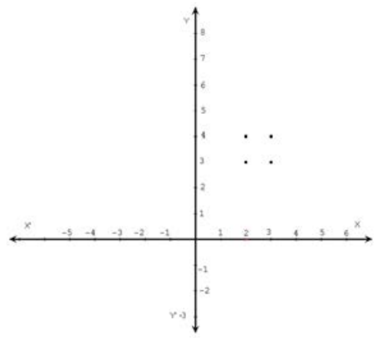
Observe que para hacer la gráfica, el eje de las abscisas corresponde a los elementos del conjunto C y el eje de las ordenadas corresponde al conjunto D.

Ejemplo**:** hallar el producto E×F, si E= {x∈ℤ/ 1<x<4},F={x∈ℤ/ 2<x<5}

El conjunto E está formado por las **x,** que pertenecen a los números enteros (ℤ) que son mayores que uno y menores que 4, por lo que E está formado por los elementos 2 y 3, de la misma forma, el conjunto F está formado por los enteros mayores que 2 y menores que 5, esto es, el 3 y 4.

Considerando que los conjuntos E={2,3} y F{3,4}

El producto cartesiano es: E×F={(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)} y su gráfica es la siguiente:



Producto cartesiano E×F.

Ejemplo: determinar si la siguiente relación es una función, encuentra el dominio y contradomio, y traza su gráfica: {(x,y)/x, y€ℝ 5x-3y=10}

Partiendo de la ecuación:

$$5x - 3y = 10$$

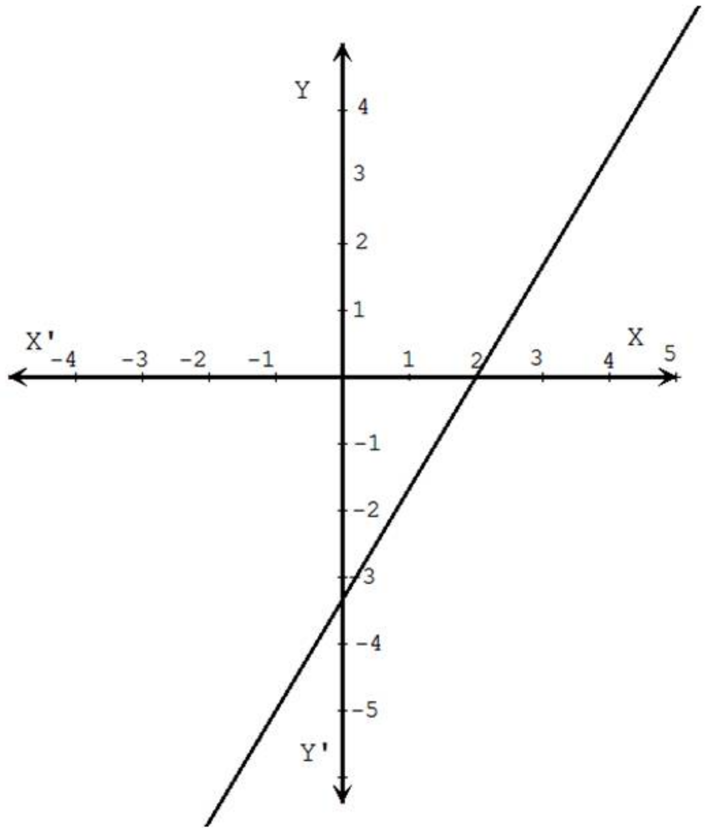
$$5x - 3y - 10 = 0$$

$$5x - 10 = 3y$$

$$y = \frac{5x - 10}{3}$$

$$y = \frac{5x}{3} - \frac{10}{3}$$

Por lo que el dominio de la función x€ℝ y el contradominio es y€ℝ, por lo tanto es una función, siendo su gráfica la siguiente línea recta:



Ejemplo: hallar si la siguiente relación es una función, encuentra el dominio y contradomio, y traza su gráfica: {(x,y)/x,y€ℝ $8x^2$-$19y^2$=64}

$8x^2 - 19y^2 = 64$

$8x^2 - 19y^2 - 64 = 0$ Igualando a cero

$8x^2 - 64 = 19y^2$ Despejando a y

$$y^2 = \frac{8x^2 - 64}{19}$$

$$y = \sqrt{\frac{8x^2 - 64}{19}}$$

Para que exista una solución real el radicando debe de ser mayor o igual que cero.

Dominio={x/$\frac{4}{-\sqrt{2}} \geq x \geq \frac{4}{\sqrt{2}}$}

También puede escribirse Dominio= {x/-$\sqrt{8}$ $\geq x \geq \sqrt{8}$}

Para encontrar el contradominio despejamos **y**

$$y=\frac{\sqrt{8x^2-64}}{\sqrt{19}}$$

$\sqrt{19}y=\sqrt{8x^2-64}$ elevando al cuadrado

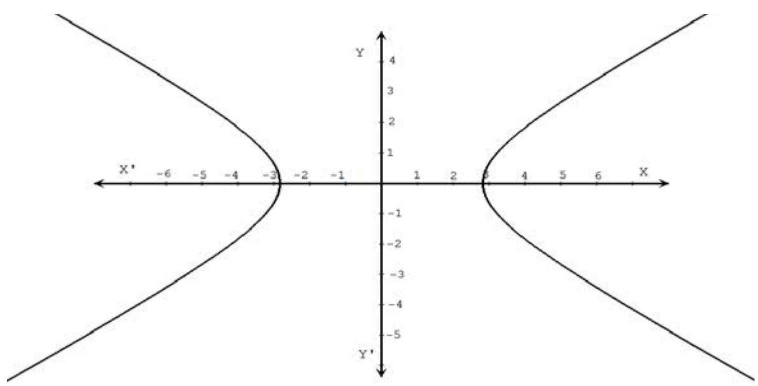
$19y^2=8x^2-64$

$19y^2+64=8x^2$

$$\frac{19y^2+64}{8}=x^2$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{19y^2+64}{8}}$$

Podemos observar que no tiene denominador indeterminado y que **y** puede tomar cualquier valor real, ya que si **y** es negativa o positiva al elevar al cuadrado su valor es positivo, por lo tanto el contradominio es el conjunto de los número reales y es una relación.



Gráfica de $y = \sqrt{\frac{8x^2 - 64}{19}}$

Ejemplo: hallar si la siguiente relación es una función, encuentra el dominio y contradomio, y traza su gráfica: {(x,y)/x,y€ℝ x^2-16x-12=0}

$x^2-16x-12=y$

$x^2-16x+64=y+12+64$

$(x-8)^2=y+76$

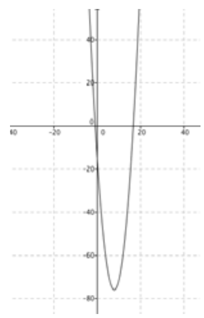
$x-8 = \sqrt{y+76}$ sacando raíz en ambos miembros

$x= 8 \pm \sqrt{y+76}$ investiguemos los valores donde $y+76 \geq 0$

$y \geq -76$ Contradominio son las **y** mayores o iguales que 76, y€[-76,∞)

Para encontrar el dominio analicemos $y=x^2-16x-12$ y podemos observar que **y** existe para cualquier valor de **x,** por lo tanto:

Dom x€ℝ y es una función.



Ejemplo: indica si la siguiente relación es una función, encuentra el dominio y contradomio, y traza su gráfica: {(x,y)/x,y€ℝ $y^2+8x-32=0$}

$y^2+8x-32=0$ para encontrar el dominio despejamos **y**

$y=\sqrt{32-8x}$ analizando $32-8x\geq0$

$x\leq4$ o x€$(-\infty,4]$

Para encontrar el contradominio despejamos **x**

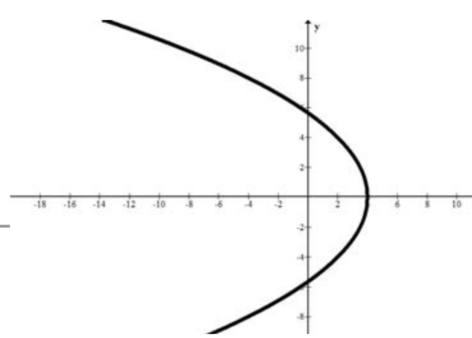
$y^2=32-8x$

$y=\sqrt{32-8x}$

$y=\sqrt{8(4-x)}$ analizando el radicando $4-x\geq0$

$x\leq 4$

x€$(-\infty,4]$ La gráfica que representa es una parábola horizontal que abre a la izquierda y es una relación.

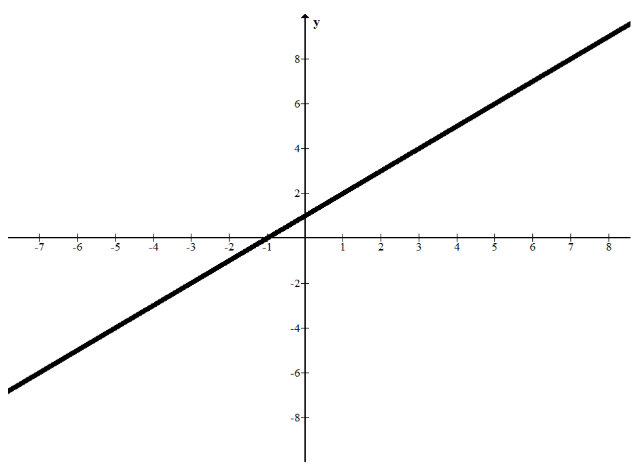


Ejemplo: determinemos el dominio y el contradominio de la siguiente función: $f(x)=x+1$

En las funciones polinomiales su dominio y contradominio queda definido por todos los números reales, ya que al sustituir el valor de **x** en la función polinomial, se obtiene un número real. Por lo que el dominio y contradominio de la función f(x)=x+1 son todos los números reales, esto es:

Dom={x/x€R} y Rango={y/y€R}

También podemos notarlo cuando observamos que no tiene denominador por lo que no existen indeterminaciones de la función, y decimos función, ya que al observar la gráfica y seguir la regla de la recta vertical lo podemos concluir.



Ejemplo: encontrar el dominio y el contradominio de la siguiente función: $f(x)=\frac{x}{x^2-x}$

En una función racional[23] $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, su dominio queda definido por los valores numéricos que corresponden a Q(x)$\neq 0$, ya que se debe de considerar que el denominador debe de ser distinto de cero, porque de lo contrario no se obtendría un número real, simplemente el dominio omite las raíces de Q(x).

Manipulando la ecuación, factorizando el denominador y simplificando tendremos:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Considerando que f(x) no está definida cuando el denominador es cero, por lo que el dominio es el conjunto de las **x** tales que x≠1

El contradominio se puede obtener haciendo $y = \frac{x}{x^2-x}$

$$y = \frac{x}{x(x-1)}$$

$$y = \frac{1}{x-1}$$

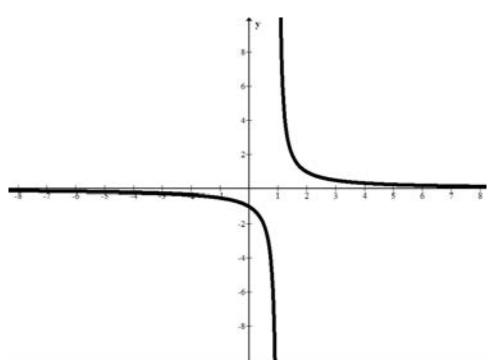
Despejando **x** y observando los valores reales que puede tomar **y** tendremos:

Y (x-1)=1

(x-1)=$\frac{1}{y}$

x= $\frac{1}{y}$ +1 obsérvese que **y** debe ser distinto de cero para que existan valores reales de **x**, por lo que se puede concluir que y≠0

Entonces el Contradominio={y€ℝ/ y≠0}



Gráfica de f(x)=$\frac{x}{x^2-x}$

Ejemplo: calcular el dominio y el contradominio de la siguiente función: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

Tenemos una función racional, analicemos el denominador de

$y=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{x+1}>0$ nótese que debe ser la condicionalidad estricta, es decir, debe ser mayor que 0, más no igual, ya que tendríamos una indeterminación o división entre cero.

Resolviendo:

$(\sqrt{x+1})^2>(0)^2$

x + 1 > 0

x > -1

Por lo que el dominio son todas las **x** que pertenecen a los números reales que son mayores que -1

{x/x€ℝ x>-1} o x€(-1,+∞)[24]

Para obtener el contradominio despejamos la **x** y observamos qué valores reales puede tomar la **y** para que **x** exista,

$$y=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$y\left(\sqrt{x+1}\right)=2$$

$\sqrt{x+1}=\frac{2}{y}$ elevando al cuadrado en ambos miembros tenemos:

$$x+1=\frac{4}{y^2}$$

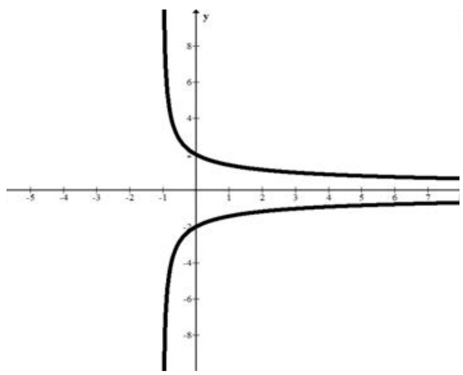
$$x = \frac{4}{y^2} - 1$$

Por lo que el contradominio son todas las **y** que pertenecen a los números reales tales que **y** debe ser distinta de 0 ($y \neq 0$).

Si hacemos una tabla de valores podemos obtener la gráfica, recuerde que $x>-1$

x	**y**
-0.9	± 6.32
0	± 2
3	± 1
8	$\pm 2/3$

Una observación muy importante es que debemos considerar los dos signos de la raíz.



Gráfica de $y=\frac{2}{\pm\sqrt{x+1}}$

Ejemplo: calcular el dominio y el contradominio de la siguiente función: $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Analizando el radicando $x^2-3x+2 \geq 0$

Factorizando $(x-1)(x-2) \geq 0$

Tenemos que considerar dos casos:

Caso I

Cuando los dos factores son positivos

$x-1 \geq 0$ y $x-2 \geq 0$

$x \geq 1$ y $x \geq 2$ eso se cumple cuando $x \geq 2$

Caso II

x-1 ≤0 y x-2 ≤0

x ≤ 1 y x ≤ 2, esto se cumple para x≤1

Uniendo las dos soluciones de cada caso tendremos que

x€(-∞, 1] ∪ [2, +∞) o 2≤x≤1

Para calcular el contradominio despejamos **x** y observamos qué valores reales puede tomar **y**

$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$y^2=x^2-3x+2$

$y^2-2=x^2-3x$ completando el trinomio cuadrado perfecto

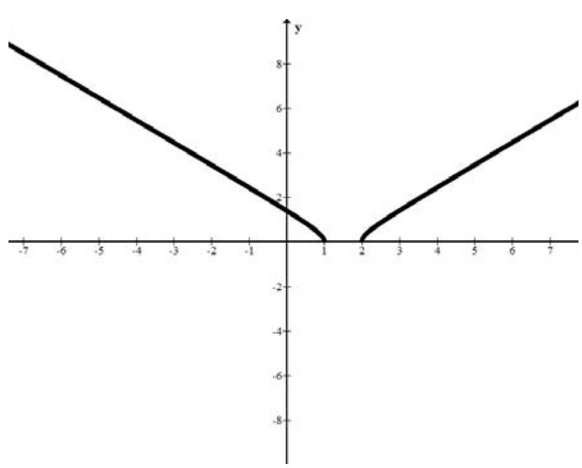
$y^2-2+\frac{9}{4}=x^2-3x+\frac{9}{4}$ reduciendo y factorizando

$y^2+\frac{1}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$ sacando raíz cuadrada

$\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}=x-\frac{3}{2}$

$x=\frac{3}{2} \pm \sqrt{y^2+\frac{1}{4}}$

Contradominio=ℝ



Gráfica de $y=+\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Gráfica de y=$\sqrt{x^2-3x+2}$ cuando solo consideramos la raíz positiva, queda al lector terminar la gráfica cuando se consideran los dos signos de la raíz.

Análisis de ecuaciones

Cuando se conoce una ecuación, es importante pasar a representar su lugar geométrico, es conveniente previamente conocer algunas propiedades, tales como

1. Determinar si la recta o curva es o no simétrica respecto a los ejes y al origen.
2. Determinar los puntos de intersección con los ejes, o si no los hay.
3. Determinar el dominio y la imagen (también llamado extensión).
4. Determinar si tiene asíntotas horizontales o verticales.
5. Hacer la gráfica.

Comencemos con el punto número uno:

Simetría respecto al eje de las X: si se sustituye en la ecuación **y** por **–y**, y la ecuación no se altera, entonces la curva es simétrica respecto al eje de las X, por lo tanto, basta con observar si los exponentes de la y en todos los términos tienen exponente par.

Simetría respecto al eje Y: Si se sustituye en la ecuación **x** por –**x** , y la ecuación no se altera, entonces la curva es simétrica respecto al eje de las Y, por lo tanto basta con observar si los exponentes de la **x** en todos los términos tienen exponente par.

Simetría respecto al origen: Es suficiente con observar que los exponentes de **x** y de **y** tengan exponente par, o bien, que cumplan con tener simetría respecto a los dos ejes.

Intersección con el eje de las X: Sustituimos y=0 y resolvemos la ecuación, encontramos así la abscisa del punto que intersecta al eje X, si no hay solución real significa que no tiene intersección con el eje X.

Intersección con el eje de las Y: Sustituimos **x**=0 y resolvemos la ecuación, encontramos así la ordenada del punto que interseca al eje Y, si no hay solución real significa que no tiene intersección con el eje Y.

Extensión: Dominio y contradominio

Respecto a **x**: Para encontrar el dominio se despeja la **y** y se determinan los valores reales que puede tomar la **x**, de manera que sea posible obtener un valor real para **y**.

Respecto a **y**: Para encontrar el contradominio se despeja la **x** y se determinan los valores reales que puede tomar la **y**, de manera que sea posible obtener un valor real para **x**.

Asíntotas: Es la recta que no es tocada por un punto por más que se aproxime a ella, hay asíntotas de cualquier posición, pero se hará énfasis en las asíntotas horizontales y en las verticales.

Asíntotas verticales: Se despeja **y**, y se observa la **x**, si aparece en el denominador se iguala a cero y los valores que hacen cero el denominador, son las abscisas correspondientes a las ecuaciones de las asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: Se despeja **x** y se observa la **y**, si aparece en el denominador se iguala a cero y los valores que hacen cero el denominador, son las ordenadas correspondientes a las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

Ejemplo: Discutir la ecuación $x^2+y^2-9=0$ y graficarla.

Simetría respecto al eje X: como **y** tiene exponente par, se dice que existe simetría respecto a **x** (o hacer también la sustitución de **x** por –**x**)

Respecto al origen: todos los términos tienen exponente par, por lo tanto es simétrica respecto al origen. Nótese que existe simetría respecto al eje X y respecto al eje Y, entonces existe simetría respecto al origen.

Intersecciones:

Con eje X: hacemos y=0

$x^2+y^2-9=0$

$x^2+(0)^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\pm\sqrt{9}$

$x=\pm 3$

Por lo tanto la curva corta el eje X en dos puntos (-3,0) y (3,0)

Con eje Y: hacemos x=0

$x^2+y^2-9=0$

$(0)^2+y^2-9=0$

$y^2=9$

$y=\pm\sqrt{9}$

$y= \pm 3$

por lo tanto la curva corta al eje Y en dos puntos (0,-3) y (0,3).

Extensión:

Respecto a **x**: (dominio) despejamos **y**

$x^2+y^2-9=0$

$y^2=9-x^2$

$y= \pm\sqrt{9-x^2}$

para que y€R $9-x^2\geq 0$; $-x^2\leq -9$

$(-1)\ -x^2\leq -9(-1)$ multiplicando por -1 ambos miembros

$x^2\geq 9$ recuerde que se invierte la desigualdad

$-3\leq x\leq 3$ o bien **x**€[-3,3]

Respecto a **y** (imagen) despejamos **x**

$x^2+y^2-9=0$

$x^2=9-y^2$

$x= \pm\sqrt{9-y^2}$

para que y€R $9-y^2\geq 0$

$-y^2\leq -9$

$(-1)-y^2\leq -9(-1)$

$y^2 \geq 9$

$-3 \leq y \leq 3$ o $y \in [-3,3]$

Asíntotas:

Horizontales: ya tenemos despejado **x**; x= $\pm\sqrt{9 - y^2}$, si observamos, no tiene denominador con **y**, por lo que la curva no tiene asíntotas horizontales.

Verticales: ya tenemos despejado **y**; y= $\pm\sqrt{9 - x^2}$, si observamos, tampoco tiene denominador con **x**, por lo que la curva no tiene asíntotas verticales.

Gráfica: podemos usar la ecuación y= $\pm\sqrt{9 - x^2}$, damos valores a la variable independiente **x**, que pertenezcan al intervalo que se obtuvo para su extensión

x	y
-2	$\pm\sqrt{5} = \pm 2.2$
-1	$\pm\sqrt{8} = \pm 2.8$
1	$\pm\sqrt{8} = \pm 2.8$
2	$\pm\sqrt{5} = \pm 2.2$

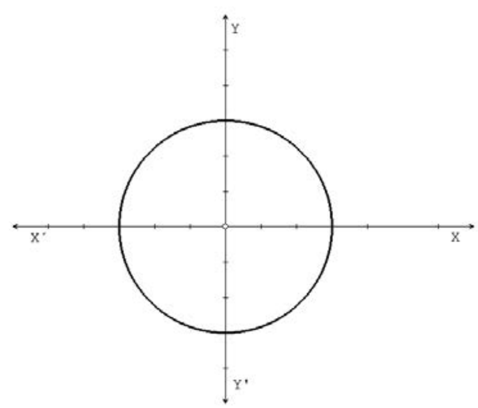


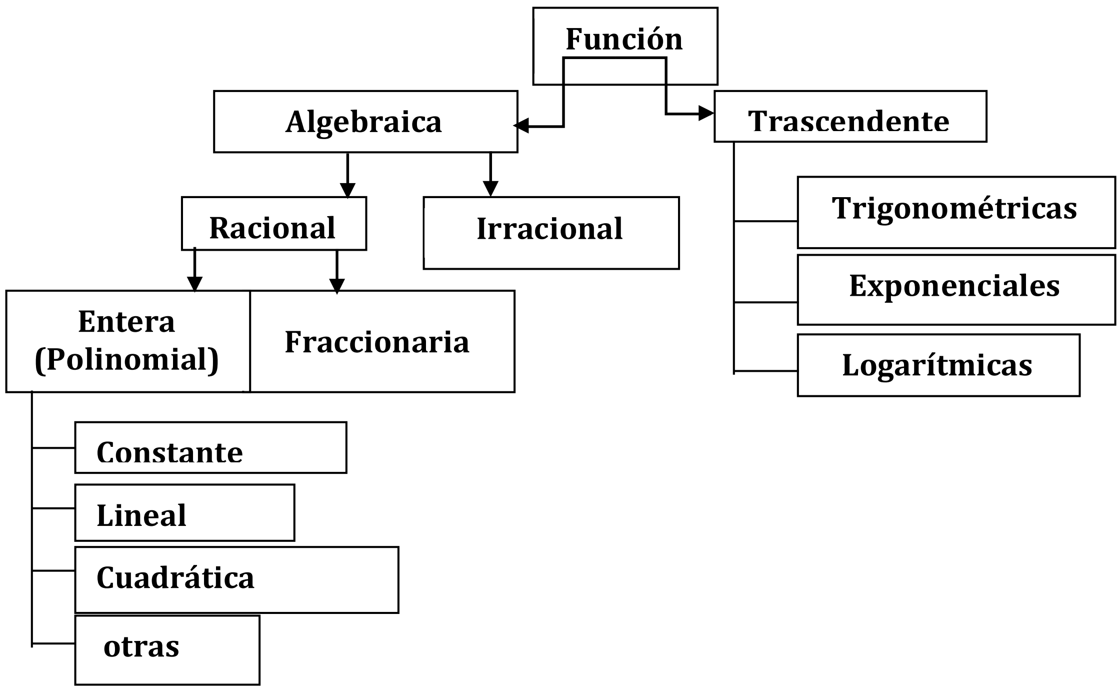
Fig. 26. $x^2+y^2-9=0$.

Recordemos que la curva es simétrica respecto a los 2 ejes y al origen, tracemos los puntos de intersección con los ejes.

La curva trazada corresponde a una circunferencia con centro en el origen C (0,0) y radio r=3.

1.5. Clasificación de funciones

Las funciones pueden ser clasificadas en dos grandes grupos, como funciones algebraicas y funciones trascendentes[1].



Las funciones algebraicas son aquellas en las que se combinan operaciones finitas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación, que afectan a la variable independiente, por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad f(x) = \sqrt{x-9}$$

$$h(x) = \frac{x-3}{x-7} \qquad g(x) = 6x^3 + 3x - 18$$

A su vez, una función algebraica puede ser racional entera o racional fraccionaria.

Función racional entera

Estas funciones también se conocen como polinomiales, y se caracterizan porque se expresan a través de un polinomio de la forma[25]:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde **n** es un número positivo, y los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ se les denomina coeficientes del polinomio y además son constantes. El grado del polinomio es **n** .
Por ejemplo en la siguiente función:

$$P(x) = 2x^5 + x^3 - 7x^2 + 10$$

Su grado es 5.

Dentro de las funciones polinomiales tenemos varios casos:
Función constante:
cuando en el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

todos los coeficientes de ***x*** valen cero, tenemos la función constante[6].

$$f(x) = a_0$$

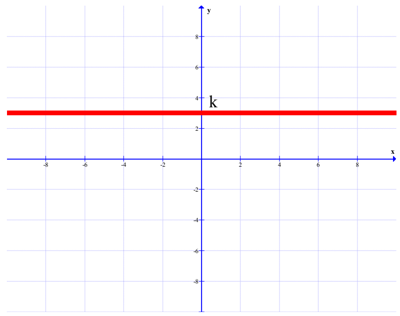
También es posible expresar esta función como

$$f(x) = k$$

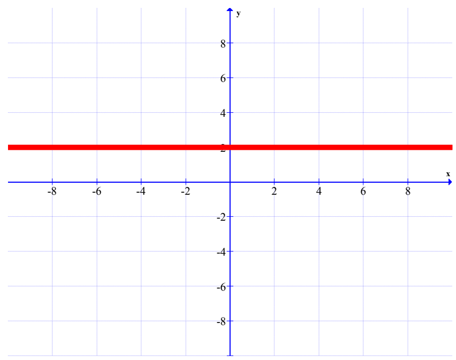
Df = *R* (El dominio es el conjunto de todos los reales)

Rf = *{k}* (El rango o contradominio lo compone el valor *k*)

$\boxed{f(x)=k}$



Ejemplo: la gráfica de la función $f(x) = 2$



Función lineal

Cuando en el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

todos los coeficientes de **x** valen cero, excepto para $a_0 \neq 0 \; y \; a_1 \neq 0$ tenemos la función lineal[6]:

$$f(x) = a_1 x + a_0.$$

Esta función también puede escribirse como

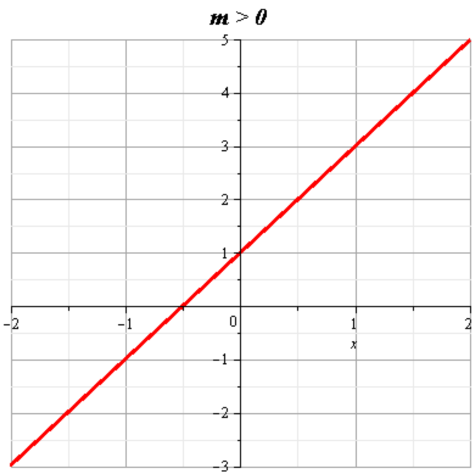
$$f(x) = mx + b$$

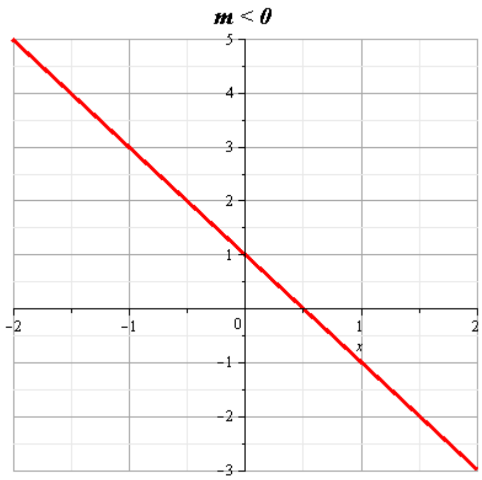
Donde ***m*** representa la pendiente (grado de inclinación) de la recta y b la ordenada en el origen.

Para este tipo de funciones el dominio y rango está en todos los reales R.

Df = *R*, o en forma de intervalo $(-\infty, \infty)$

Rf = *R*, o en forma de intervalo $(-\infty, \infty)$





Recordemos que la pendiente **m**, representa la razón de cambio de **y** respecto de **x.**

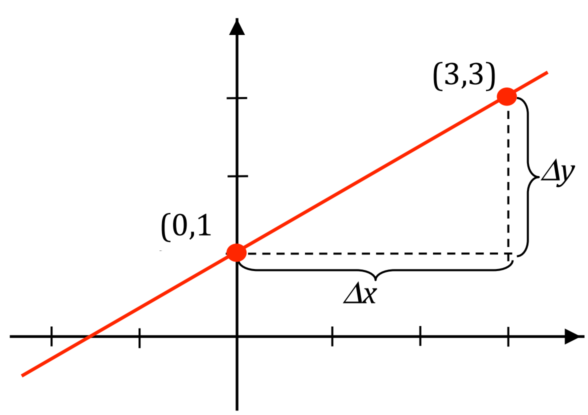
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo: obtener la gráfica de la función $y = \frac{2}{3}x + 1$

De la fórmula $y = mx + b$ se puede identificar que $m = \frac{2}{3}$ y **b**=1.

Conociendo dos puntos se traza la gráfica de una función lineal, pues basta unirlos a través de una recta que puede extenderse en ambos sentidos.

La pendiente $m = \frac{2}{3}$, nos indica que por cada 3 unidades que nos desplacemos en la dirección **x**, también nos desplazaremos 2 unidades en la dirección **y**. Conociendo b=1, tenemos un punto de la gráfica (0,1).



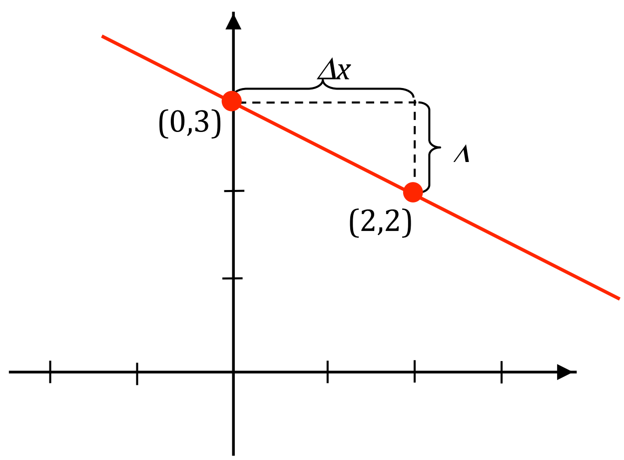
A partir de (0,1) nos desplazamos, 3 unidades en **x**, 2 unidades en **y** llegando al punto (3,3). Dichos puntos se unen con una recta y se obtiene la gráfica correspondiente.

Nota: si la pendiente es negativa un desplazamiento es positivo y el otro negativo.

Ejemplo: obtener la gráfica de la función $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Como la pendiente es negativa, se tiene que por cada 2 unidades que nos desplacemos en la dirección positiva de $\boldsymbol{x}$, habrá **una** unidad de desplazamiento en la dirección negativa de $\boldsymbol{y}$.

Esto nos permite obtener del punto (0,3) otro punto de coordenadas (2,2) y trazar una recta para obtener la gráfica correspondiente.

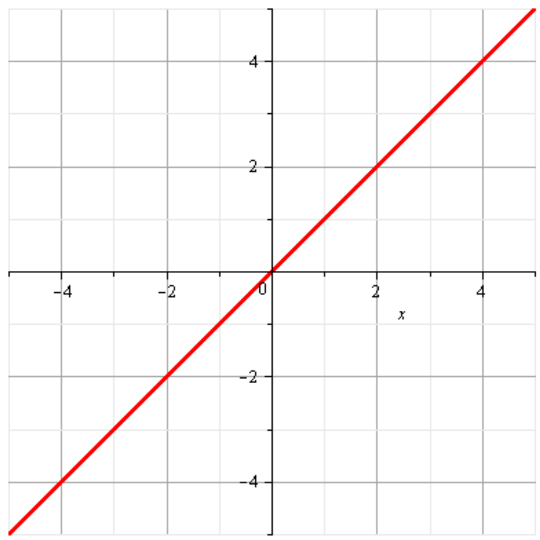


Función identidad

La función identidad es un caso particular de la función lineal $y = mx + b$ que surge cuando *m = 1 y b = 0*. Por lo que resulta la función $f(x) = x$.[6] También expresada como $y = x$.

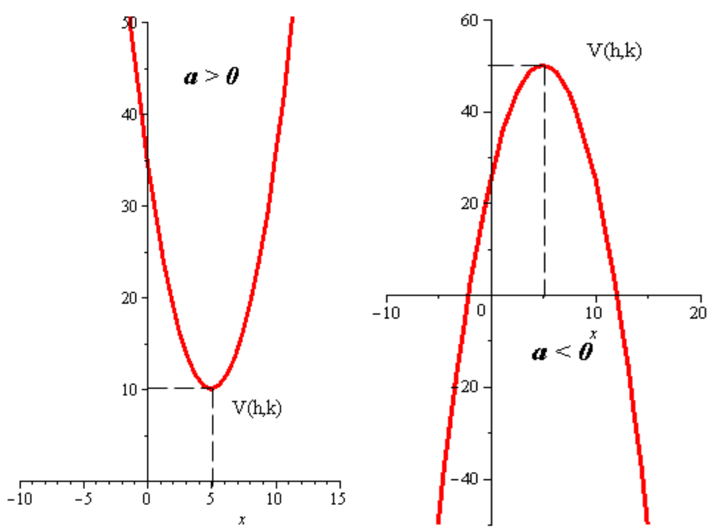
Como toda función polinomial, el dominio y rango lo conforman el conjunto de los números reales.

La gráfica de la función identidad es una recta con una inclinación de 45º.



Función cuadrática

Esta función es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo, dependiente del signo que tenga el coeficiente del término cuadrático[6].



Las coordenadas (*h,k*) del vértice de una parábola, se pueden obtener utilizando las siguientes fórmulas, tomando como base la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$h = -\frac{b}{2a} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Dominio: *Df*= R para las dos gráficas

Rango:

$Rf = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, \infty\right)$ cóncava hacia arriba

$Rf = \left[-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ cóncava hacia abajo

Ejemplo: obtener la gráfica de la función $y = x^2 - 4x + 3$ y determinar el dominio y el rango.

Observamos los valores que tienen los coeficientes en la función dada y tenemos: $a = 1,\ \ b = -4\ \ y\ \ c = 3$. Con estos valores calculamos las coordenadas del vértice:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(3) - (-4)^2}{4(1)} = \frac{12 - 16}{4} = -1$$

Así que las coordenadas V(*h,k*)=(2,-1).

Por otro lado, vemos que el coeficiente del término cuadrático es positivo a=1, por lo que la parábola abre hacia arriba.

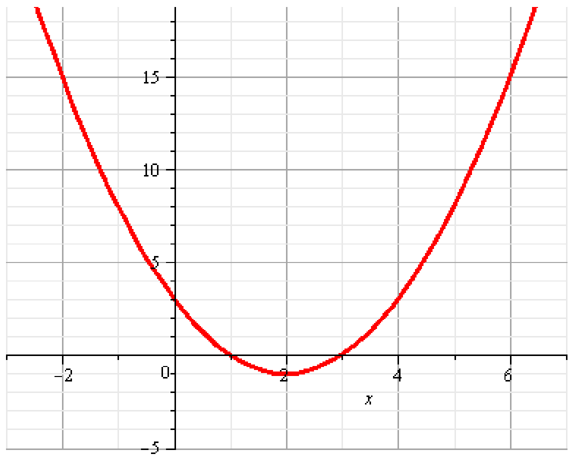
Dominio=ℝ o $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \infty)$

Contradominio $\boldsymbol{y}$ ∈[-1,∞)

Tabulando algunos valores para **x**, se obtiene:

x	-2	-1	0	1	2
y	15	8	3	0	-1

La gráfica es la siguiente:



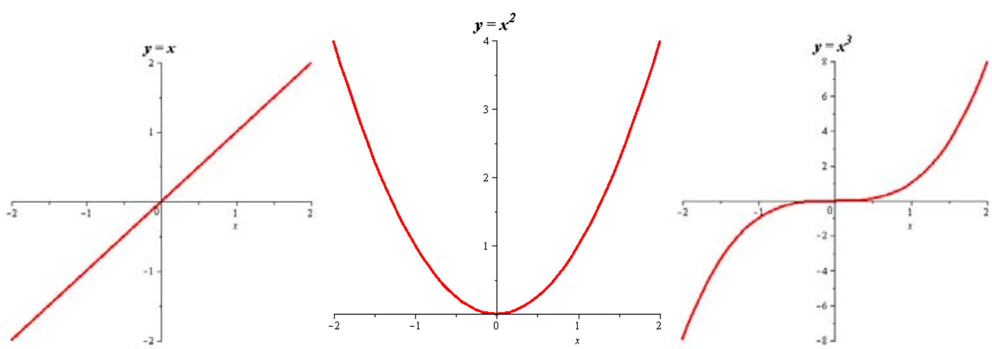
Función potencia

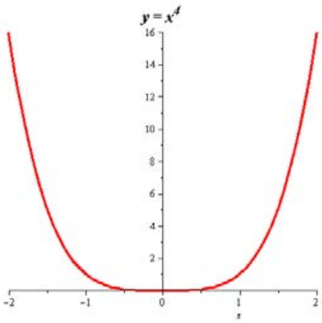
Esta función tiene la forma $f(x) = x^n$ donde **n** es un entero positivo[7].

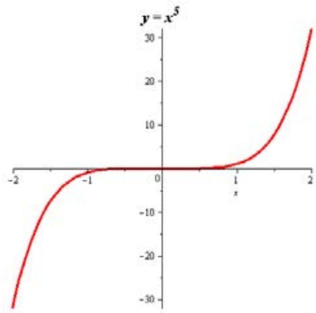
El dominio son todos los reales: $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \infty)$

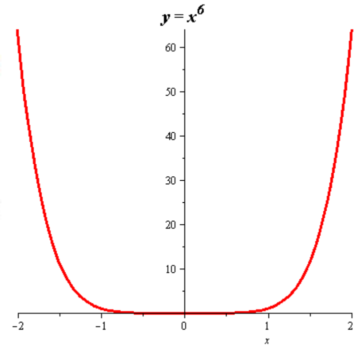
El rango es $[0, \infty)$ si **n** es par. El rango es $(-\infty, \infty)$ cuando **n** es impar

para $f(x) = x^n$ cuando n = 1,2,3,4,5,6









De acuerdo con las gráficas, se puede observar que cuando **n** es par, la función $f(x) = x^n$ será muy parecida a la parábola $y = x^2$, es simétrica respecto al eje Y, y cuando **n** es impar será semejante a la gráfica de $y = x^3$, es simétrica respecto del origen.

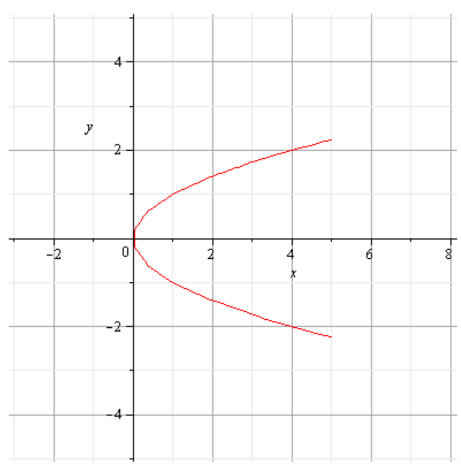
Para $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ cuando el exponente es $\frac{1}{n}$ y **n** es entero positivo

Cuando **n** es igual a 2 se tiene la función raíz cuadrada

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

El dominio para esta función es [0,∞).

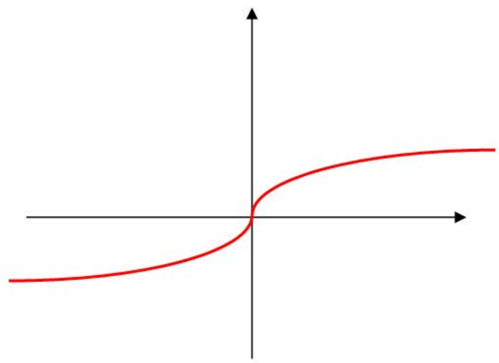
Para valores pares: 4,6,8… sus gráficas son semejantes a la de la raíz cuadrada.



Cuando **n** es igual a 3 se tiene la función raíz cúbica $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

El dominio para esta función son los reales (-∞, ∞).

Para valores impares: 5,7,9… sus gráficas son semejantes a la de la raíz cúbica.

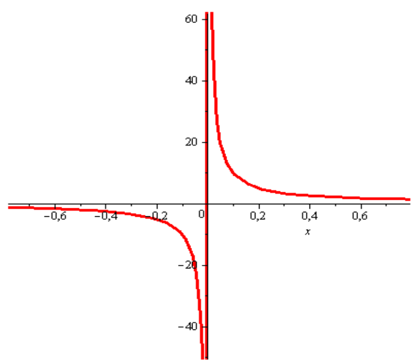


Para $f(x) = x^n$ cuando $\mathbf{n} = -1$

Cuando $n = -1$ se obtiene la función recíproca $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

El dominio son todos los reales excepto para 0.

Su gráfica es una hipérbola teniendo como asíntotas los ejes de coordenadas.



Función racional fraccionaria

También conocidas como funciones racionales, se caracterizan por expresarse como el cociente de dos polinomios[6]

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

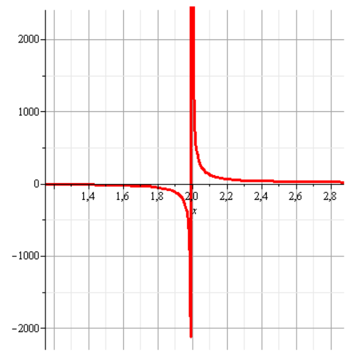
El dominio para este tipo de funciones lo forman todos los valores de ***x***, tales que $Q(x) \neq 0$.

La siguiente es un ejemplo de función algebraica racional:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+4}{x-2}$$

El valor de **x** que vuelve 0 al denominador, representa una asíntota vertical (recta a la cual tiende a tocar la gráfica, sin llegar a tocarla). Es decir, si $x-2=0$, despejando $x=2$.

En esta gráfica se observa una asíntota vertical cuya ecuación es $x=2$. La gráfica tiende a tocar dicha asíntota conforme **x** se acerca al valor 2.



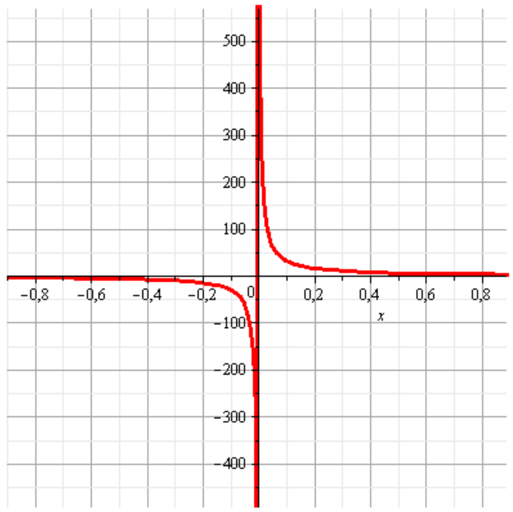
En la siguiente función el valor de **x** que hace 0 al denominador, es cuando $x+3=0$ despejando, $x=-3$

$$g(x)=\frac{x+1}{x+3}$$

Esta gráfica tiene una asíntota cuya ecuación es x = -3. Cuando **x** se aproxima a -3 los valores de la función crecen hacia el infinito de manera positiva y negativamente.

Finalmente, en la siguiente gráfica se observa una asíntota que coincide con el eje y.

$$y = \frac{3}{x}$$



Funciones trascendentes

Las funciones trascendentes son aquellas que no son algebraicas. Estas son las trigonométricas directas e inversas, logarítmicas y exponenciales.

Algunos ejemplos de ellas son:

$f(x) = senx$ trigonométrica

$f(x) = \frac{tan3x}{x}$ trigonométrica

$f(x) = 2^x$ exponencial

$f(x) = e^{5x}$ exponencial

$f(x) = lnx^2$ logarítmica

$f(x) = arccos3x$ trigonométrica inversa

Funciones trigonométricas[26]

Otro tipo de funciones llamadas transcendentes[27], de las que unas de las más importantes son las *funciones trigonométricas* que son muy importantes en ciencias físicas, ya que ayudan a describir el movimiento de tipo periódico, como el ondulatorio.

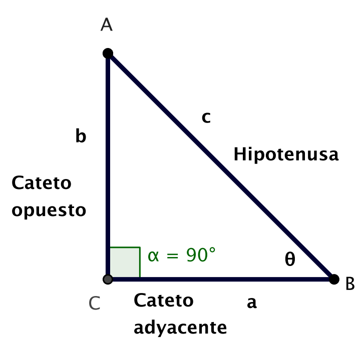
Las principales funciones trigonométricas son $\boldsymbol{seno}$, $\boldsymbol{coseno}$ y $\boldsymbol{tangente}$, a partir de estas se definen otras, las más importantes son $\boldsymbol{cosecante}$, $\boldsymbol{secante}$ y $\boldsymbol{cotangente}$.

Es importante recordar que las funciones trigonométricas se aplican a los ángulos agudos en triángulos rectángulos.

Aquí utilizaremos la definición de las funciones trigonométricas a partir de la relación entre sus lados, pero también se pueden definir mediante series[28] .

Definiciones de las funciones trigonométricas

Considere el ΔABC rectángulo en C, designemos θ el ángulo interior del vértice B.



La función seno de un ángulo θ, la abreviamos $sen\,\theta$. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{c}$$

La función coseno de un ángulo θ, la abreviamos $cos\ \theta$. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$cos\ \theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

$$cos\ \theta = \frac{a}{c}$$

La función tangente de un ángulo θ, la abreviamos $tan\ \theta$. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$tan\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

$$tan\ \theta = \frac{b}{a}$$

A partir de estas tres funciones definimos sus recíprocas, cabe recordar que son recíprocas si su producto es igual a uno.

La función $cosecante$ de un ángulo θ, la abreviamos $\csc\theta$. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$csc\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$$

$$\csc\ \theta = \frac{c}{b}$$

La función *secante* de un ángulo θ, la abreviamos $\sec\theta$. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$sec\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$$

$$sec\ \theta = \frac{c}{a}$$

La función *cotangente* de un ángulo θ, la abreviamos $\cot\theta$. Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$cot\ \theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}$$

$$\cot\ \theta = \frac{a}{b}$$

Resumen de las funciones trigonométricas:

FUNCIÓN	RECÍPROCA
$sen\ \theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$	$\csc\theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}$
$\cos\theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$	$\sec\theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}$
$\tan\theta = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$	$Cot\ \theta = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}$

Función exponencial[26]

Definición: se llama función exponencial a la función f definida por

$$f(x) = b^x \qquad b > 0, \qquad b \neq 1$$

donde b es llamada base y el exponente $x \in \mathbb{R}$.

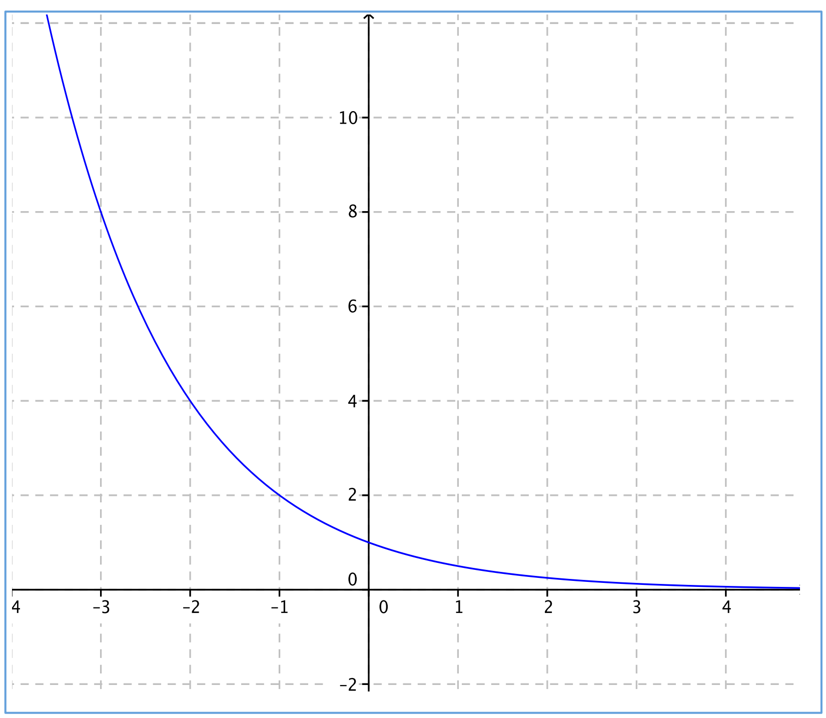
Ejemplos de este tipo de funciones son:

$$f(x) = 5^x \,, f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \,, f(t) = 3e^{-i\omega t}$$

Usaremos una base 0<b<1 y daremos diferentes valores arbitrarios a la variable independiente x, para obtener una tabla de valores y para trazar el lugar geométrico de la función.

En este caso $b = \frac{1}{2}$ y $-3 \leq x \leq 3$.

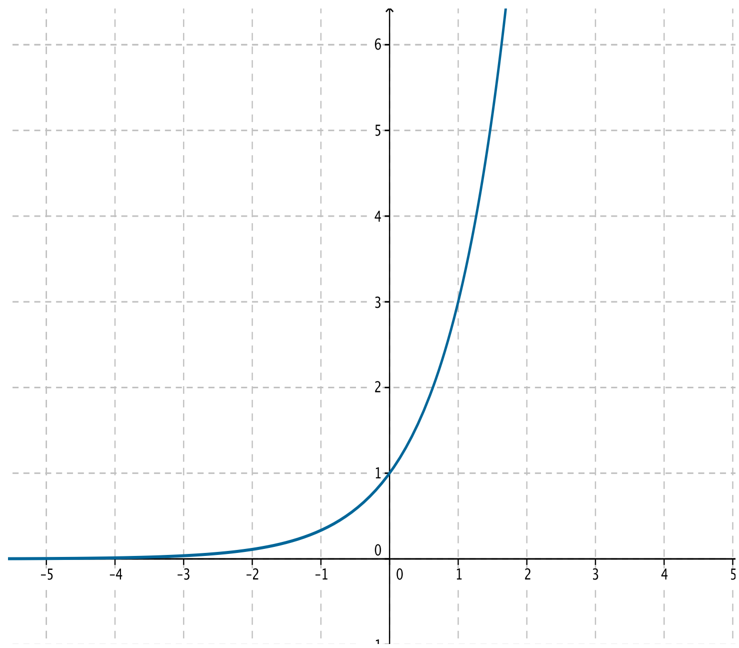
x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Esta gráfica muestra que la función es decreciente

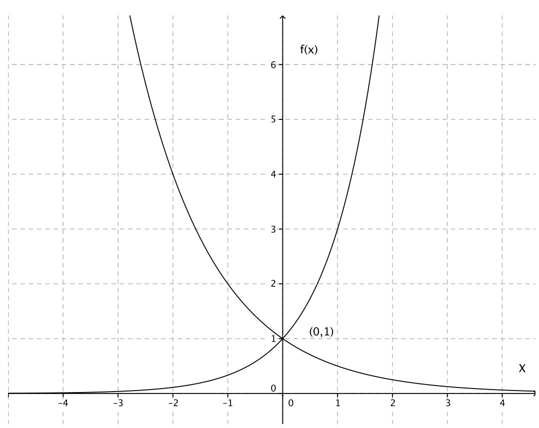
En la gráfica de la función $f(x) = (3)^x$ observe que b>1, análoga a la función anterior damos valores arbitrarios a la variable independiente x para obtener su gráfica.

x	$f(x) = (3)^x$
-3	0.03703
-2	0.11111
-1	0.33333
0	1
1	3
2	9
3	27



Esta gráfica muestra que la función es creciente

En la siguiente gráfica se muestran las funciones $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$, observe que ambas pasan por el punto (0,1).



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y \quad f(x) = (3)^x$$

Ejemplo:

México cuenta con una población de 117 millones de habitantes, se calcula que aumentará al triple en 20 años. Suponga que tenemos la misma tasa de crecimiento, ¿qué población tendremos en 10 años, a partir de ahora?

Usaremos el modelo de crecimiento del tiempo de triplicación

$$P = P_0 3^{t/c}$$

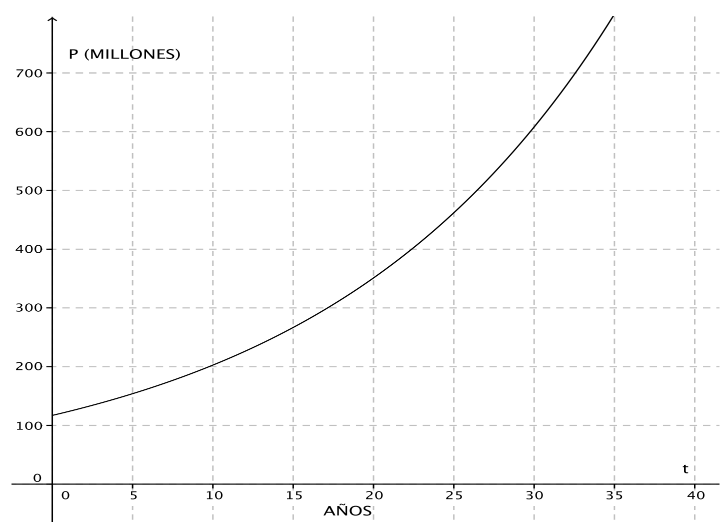
P0 es la población inicial de 117 millones

t es el tiempo al que deseamos hacer el cálculo t=10 años

c estimación aproximada de crecimiento

Sustituyendo:

$$P = 117\left(3^{10/20}\right) \approx 202.64 \, millones \; de \; habitantes$$



Propiedades[29] de $f(x) = b^x,\ b > 0,\ b \neq 1.$

a) Si 0<b<1, los valores de la variable x aumentan y los de $f(x)$ disminuyen, por lo tanto la función es decreciente.

b) Si b>1, cuando aumentan los valores de la variable x aumentan los de $f(x)$, por lo tanto la función es creciente.

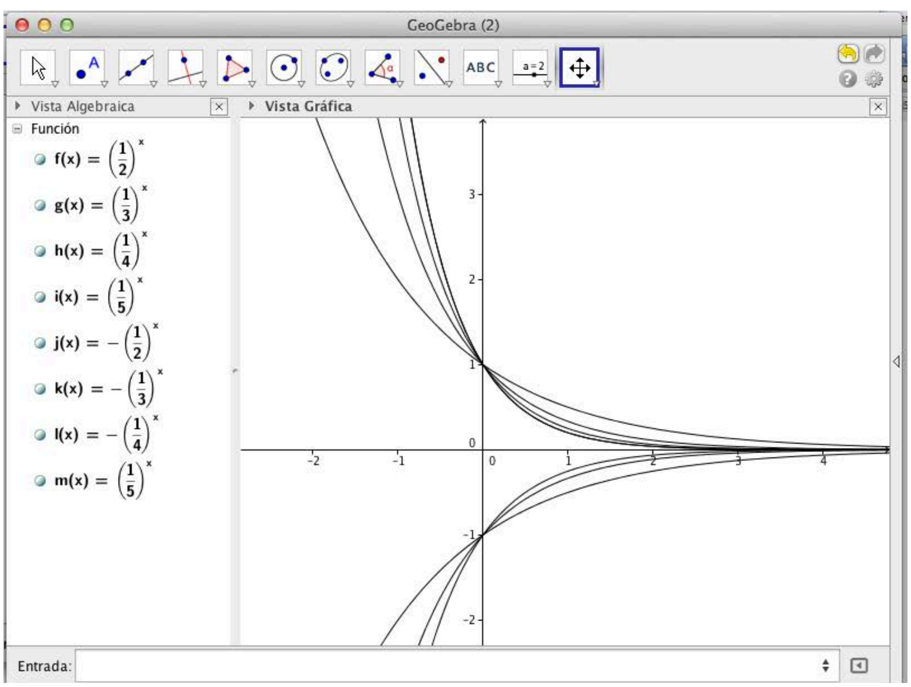
c) En ambas gráficas cuando el exponente es cero $f(0) = 1$, es decir, cortan al eje de las ordenadas en uno, su coordenada es (0,1).

d) El dominio de f es el conjunto de todos los números reales positivos esto es $x \in (-\infty, \infty)$, note que en ambos casos la gráfica se acerca al eje de las abscisas X pero no lo toca, en este caso el eje X es una *asíntota*.

e) Las gráficas son continuas, es decir, no dan saltos o tienen huecos.

f) Para cada valor de X existe uno y solo uno de $f(x)$, estas funciones se llaman uno a uno, lo que implica que tienen una función inversa llamada función logarítmica la cual analizaremos más adelante.

g) El rango o contradominio son las $y \in (0, \infty)$.



Funciones exponenciales graficadas con el programa Geogebra

Dominio y contradominio

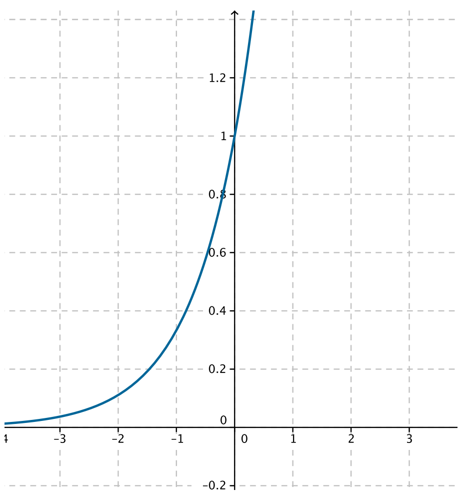
Respecto de las gráficas anteriores podemos concluir que la función exponencial $f(x) = b^x$ para b>0, b$\neq 1$ cumple con:

a) El *dominio,* es decir, los valores que puede tomar la variable independiente x, es el conjunto de los números reales, esto es $x \in (-\infty, \infty)$

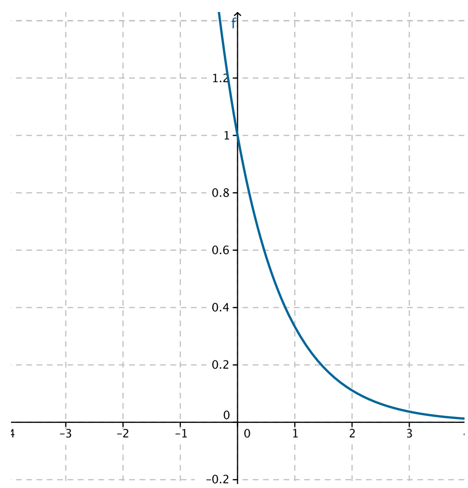
b) El *rango* o *contradomio* es el intervalo abierto $y \in (0, \infty)$

Representación gráfica

Al comparar las gráficas del tipo $f(x) = b^x$, se puede observar que ambas pasan por (0,1). Cuando 0<b<1 la gráfica es decreciente, y cuando b>1 la gráfica es creciente.



$f(x) = b^x\ para\ b > 1$

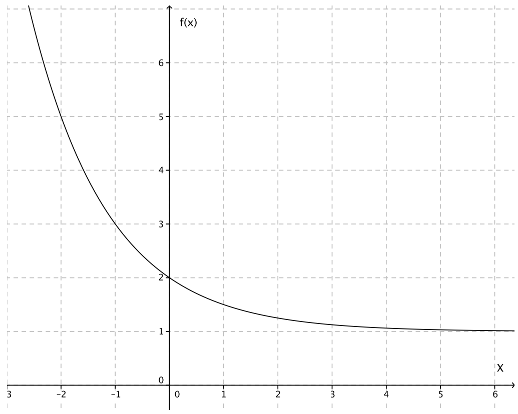


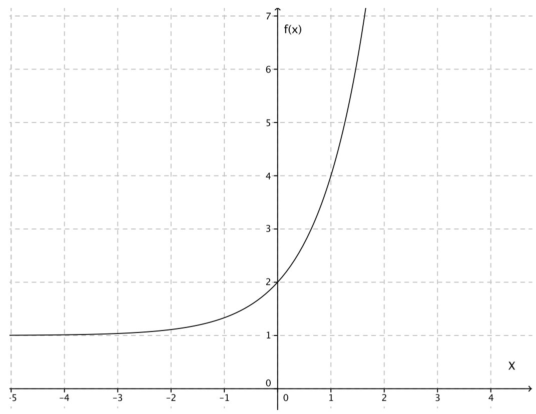
$f(x) = b^x para\ \ 0 < b < 1$

Surge la pregunta, ¿qué pasará con las gráficas de las funciones exponenciales si sumamos o restamos una constante?

Para responder a la pregunta observemos las gráficas de las funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$ y sumemos uno a cada una para observar que sucede.

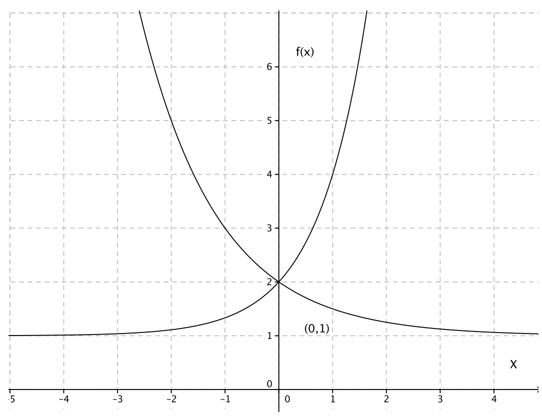
Con $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ y $f(x) = (3)^x + 1$ grafíca construyendo una tabla de valores, observa que si x=0, f(x)=2.



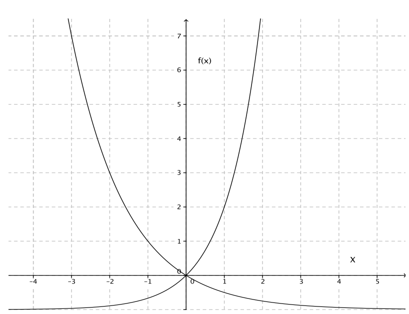


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ $\qquad$ $f(x) = (3)^x$+1

Las gráficas se desplazaron hacia arriba una unidad respecto del punto (0,1).



Si restamos una constante a las funciones exponenciales $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x) = (3)^x$ tenemos $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ y $f(x) = (3)^x - 1$, note que las gráficas bajan una unidad respecto a (0,1).



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ y $f(x) = (3)^x - 1$

Concluimos que al sumar o restar, las gráficas suben o bajan respectivamente las unidades agregadas o restadas.

En matemáticas hay un número irracional[16] muy importante que puede ser base de la función exponencial, dicho número es e que tiene un valor aproximado:

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$$

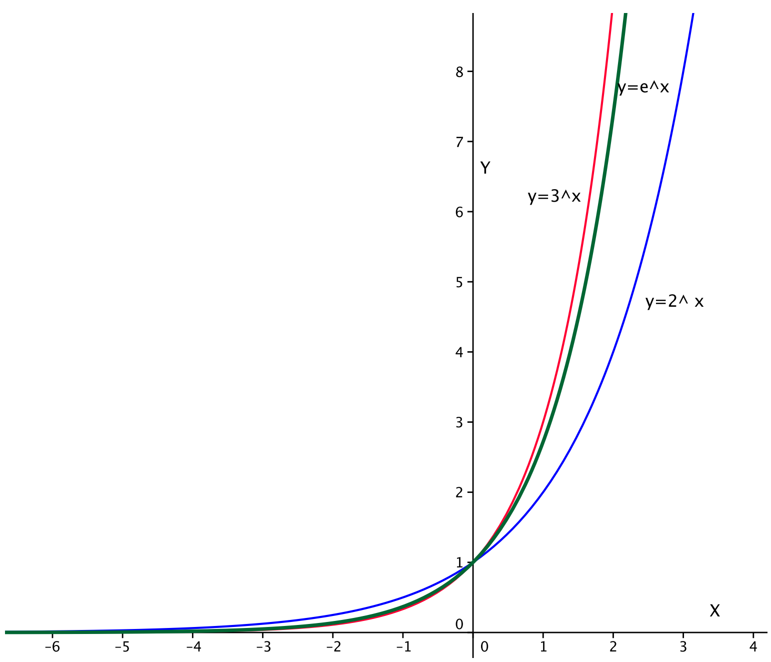
este número es llamado número de Euler o constante de Napier.

La función exponencial con base e recibe el nombre de función exponencial natural[30] :

$$f(x) = e^x \text{ o bien } y = e^x$$

es común que se le llame simplemente *función exponencial*.

Dado que la base es $2<e<3$ la gráfica de la función exponencial natural se encuentra entre las gráficas de $f(x)=2^X$ y $f(x)=3^X$ como se observa en la siguiente gráfica:



Función natural $y = e^x$ comparada con $y = 2^x$ y $y = 3^x$

Función logarítmica[26]

Sea a>0 con a≠ 1, la función logarítmica con base a, cuya notación es log_a se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para obtener x, $\log_a x$ se lee logaritmo base a de x.

Forma logarítmica

Exponente

$\log_a x = y$

Base

Forma exponencial

Exponente

$a^y = x$

Base

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_2 16 = 4$	$2^4 = 16$
$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$	$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$
$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$
$\log_4 64 = 3$	$4^3 = 64$
$\log_a b = x$	$a^x = b$
$\log_5 125 = 3$	$5^3 = 125$

Para practicar:

Pasa de la forma logarítmica a la exponencial y viceversa, utiliza calculadora científica para elevar.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_5 1 = 0$	
	$5^3 = 125$
$\log_5 3125 = 5$	
	$5^4 = 625$
$\log_5 125 = 3$	
	$5^6 = 15625$
$\log_5 25 = 2$	

Cuando la base usada en los logaritmos es 10 se llaman logaritmos comunes y se denotan log_{10} o solo log, observa en tu calculadora generalmente es la tecla log.

Propiedades de los logaritmos[14]

1. $\log_a 1 = 0$ *esto es porque* $a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1$ *esto es porque* $a^1 = a$
3. $\log_a a^x = x$ *y* $a^{\log_a x} = x$ *propiedades inversas*
4. *Si* $\log_a x = \log_b y$ *entonces* $x = y$ *propiedad uno a uno*

Ejemplos:

a) Aplicando la propiedad 1, $\log_6 1 = 0 \;\; porque \;\; 6^0 = 1$

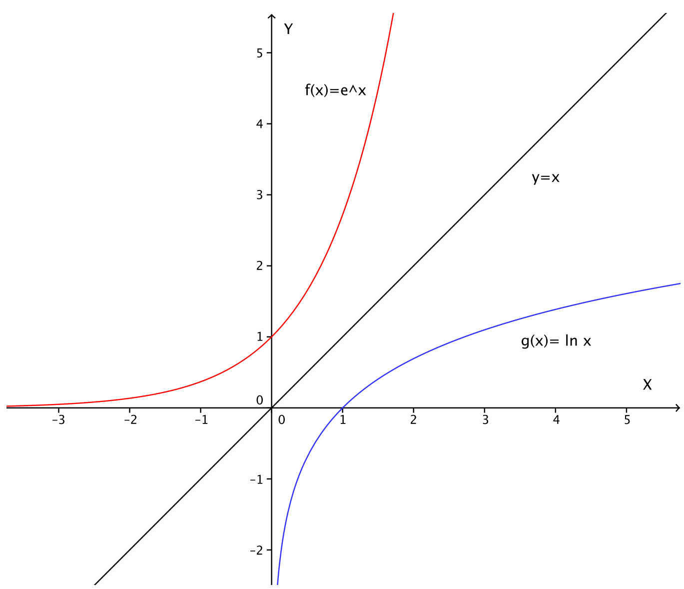
b) Aplicando la propiedad 2 , $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 1 \;\; porque \;\; \sqrt{5}^1 = \sqrt{5}$

Función logarítmica natural

Si la base de los logaritmos es la constante e, se denota ln x, se lee logaritmo natural de x. La función logarítmica natural está definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \qquad x > 0$$

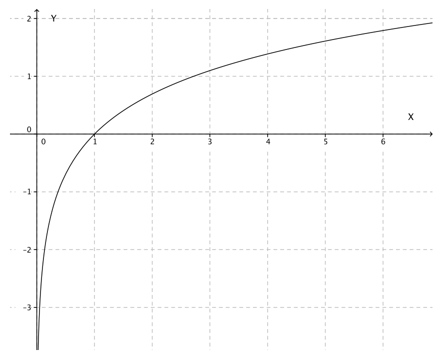
esto implica que la función logarítmica natural y la función exponencial son inversas[31]



Funciones $f(x) = e^x$ *y* $g(x) = \ln x$

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son inversas, por lo que sus gráficas son reflexiones respecto de la recta $y = x$.

La gráfica siguiente muestra el dominio y contradominio de la función logaritmo natural ln. El dominio de la función son las $x \in (0, \infty)$, lo que significa que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos. El contradominio son las $y \in (-\infty, \infty)$. La función es creciente. El logaritmo de 1 es 0 por lo que afirmamos que la gráfica pasa por (1,0).



Gráfica de $\ln x$

Teoremas de logaritmos aplicados a cualquier sistema de logaritmos

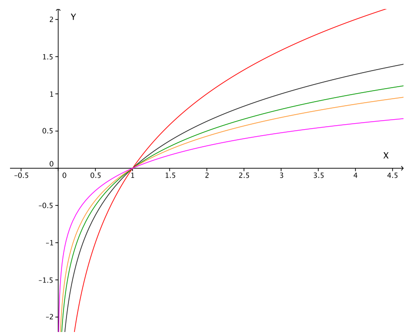
Teorema 1: $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Teorema 2: $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

Teorema 3: $\log_b M^n = n \log_b M$

Teorema 4: $\log_b \sqrt[r]{M} = \frac{1}{r} \log_b M$

La gráfica siguiente muestra la familia de las funciones $\log_b x$ para b=2,3,4,5 y 10, observe que todas pasan por el punto de coordenadas (1,0).



Operaciones con logaritmos

En los siguientes ejemplos se aplican las propiedades y teoremas sobre logaritmos, puedes comprobar su veracidad con ayuda de la calculadora científica.

a) log 15= log (3x5)= log 3 + log 5

b) $\log \frac{1000000}{100} = \log 1000000 - \log 100 = 6 - 2 = 4$

c) $\log 10^5 = 5 \log 10 = 5(1) = 5$

d) $\log \sqrt[2]{1000000} = \frac{1}{2} \log 1000000 = \frac{1}{2}(6) = 3$

Función creciente y decreciente

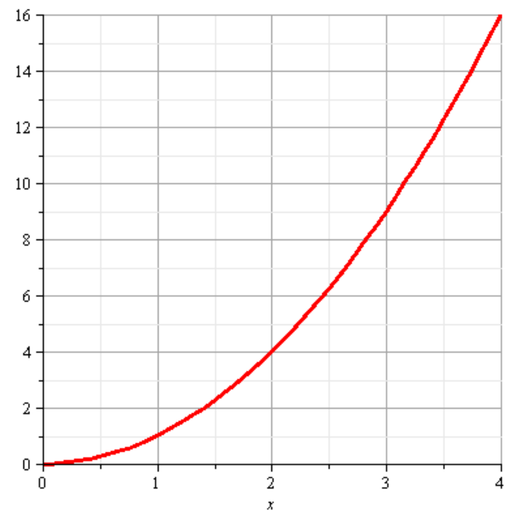
Otra manera de clasificar las funciones es de acuerdo con su monotonía.[32]

Una función *f(x)* es creciente en un intervalo *I*, si para cualquier par de valores x_1, x_2, pertenecientes al intervalo *I*, tal que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

Ejemplo: sea la función: $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,4], tomemos los puntos x=2 y x=3.

$$x_1 < x_2 \quad es\ decir, \qquad x_1 = 2 < x_2 = 3$$
$$f(2) = (2)^2 = 4$$
$$f(3) = (3)^2 = 9$$
$$f(2) < f(3) \quad es\ decir, \qquad 4 < 9$$

Por lo tanto la función es creciente del punto 2 al 3.

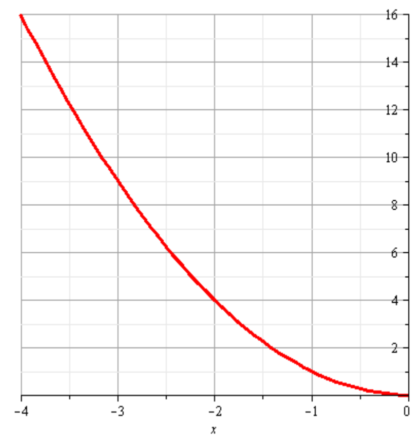


Una función *f(x)* es decreciente en un intervalo *I*, si para cualquier par de valores x_1, x_2, pertenecientes al intervalo *I*, tal que $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 19. Sea la función: $f(x) = x^2$ en el intervalo [-4,0], tomemos los puntos x=-3 y x=-2.

$$x_1 < x_2 \quad es\ decir, \qquad que\ \ x_1 = -3 < x_2 = -2$$
$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(-3) > f(-2) \quad es\ decir, \quad 9 > 4$$

Se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$ por lo tanto la función es decreciente.



Función par

Si en una función se sustituye la variable x por su simétrico $-x$ y se cumple

$$f(-x) = f(x)$$

se dice que la función es par[33,34].

Ejemplo: verificar si la función $f(x) = 3x^2$ es par o impar

Se sustituye $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{-x}$

$$f(-x) = 3(-x)^2 = 3x$$

Como se cumple que $f(-x) = f(x)$, entonces es una función par.

Función impar

Si en una función se sustituye la variable $\boldsymbol{x}$ por su simétrico $\boldsymbol{-x}$ y se cumple

$$f(-x) = -f(x)$$

se dice que la función es impar[6,7]

Ejemplo: verificar si la función $f(x) = x^3$ es par o impar

Se sustituye ***x*** por ***−x***

$$f(-x) = (-x)^3 = -3x^3$$

Como se cumple que $f(-x) = -f(x)$, entonces es una función impar.

Ejemplo: verificar si la función $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x$ es par o impar

Se sustituye ***x*** por ***−x***

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^3 + 2(-x) = x^4 - 3x^3 - 2x$$

Podemos ver que como $f(-x) \neq f(x)$la función no es par.

Por otro lado, para que la función sea impar se debe cumplir la condición de que $f(-x) = -f(x)$ pero

$-f(x) = -x^4 - 3x^3 - 2x$y$f(-x) = x^4 - 3x^3 - 2x$

Dado que $f(-x) \neq -f(x)$ la función no es impar.

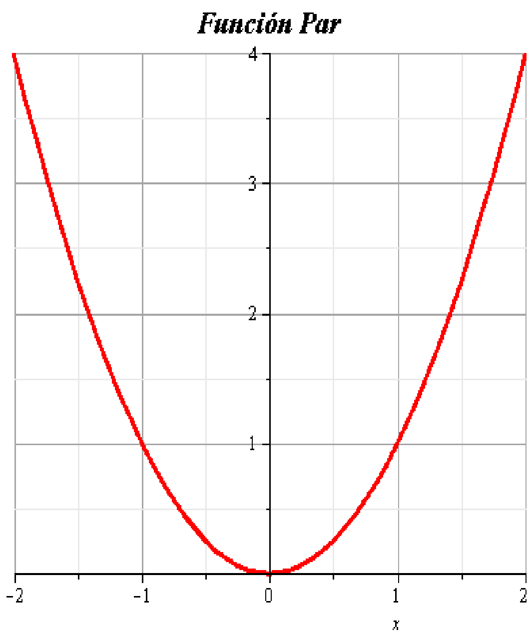
Esta función no es impar, ni par.

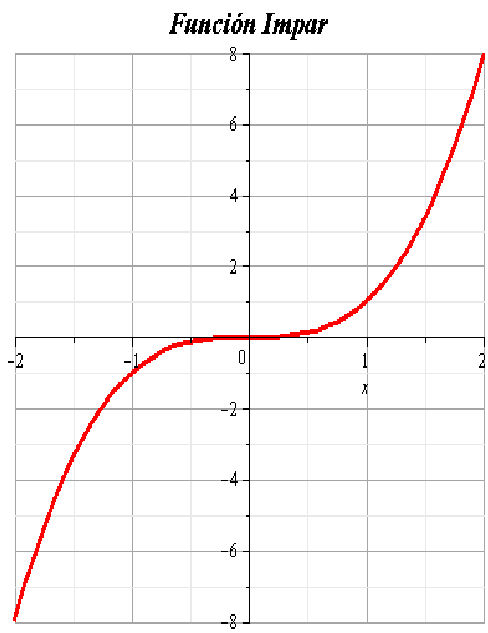
De lo anterior se concluye:

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y.

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Hay funciones que no son pares ni impares.





Nota: hasta aquí solo se ha hablado de algunas funciones que se presentan durante el estudio del cálculo. Sin embargo, es importante señalar que existe una gran cantidad de funciones que será conveniente investigar, tales como la función escalonada que se utiliza en los estacionamientos cuando nos cobran por hora o fracción, la función definida por intervalos, la función signo, entre otras.

1.6. Cálculo de funciones

Se puede combinar, una función ***f*** con otra función ***h*** a través de las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. Las cuales se pueden definir de la siguiente manera:[35]

Sean las funciones ***f*** y ***h***,

Suma: $(f+h)x = f(\square) + f(h)$

Resta: $(f-h)x = f(x) - f(h)$

Multiplicación: $(fh)x = f(x)f(h)$

División: $\left(\frac{f}{h}\right)x = \frac{f(x)}{f(h)}$ donde $f(h) \neq 0$

El dominio de estas nuevas funciones $f+h, f-h, fh\ y\ \frac{f}{h}$ es la intersección del dominio ***f*** con el dominio ***h***.

A continuación veremos algunas operaciones con funciones.

Sumas de funciones

Ejemplo: dadas las funciones: $f(x)=8x+1$ y la función: $g(x)=-5x^3+2$ calcular $r(x)=f(x)+g(x)$

Primero podemos sustituir cada uno de los sumandos de la función propuesta de la siguiente manera:

$$r(x)=f(x)+g(x)$$

$$r(x)=(8x+1)+(-5x^3+2).$$

Lo segundo sería realizar la suma de los dos términos, esto se realiza primeramente eliminando los paréntesis que agrupan cada una de las funciones. Recuerde que para concretar este proceso se debe considerar el signo que antecede al paréntesis, es decir: si el sigo que está antes del primer paréntesis es positivo, se dice más por menos y el resultado de esta operación de signos lo colocamos antes del término considerado. Para nuestro caso, como en el primer grupo de términos no contiene signo, se asume que este es positivo, es decir:

$$r(x)=f(x)+g(x)=+f(x)+g(x)$$

Ahora bien, el resultado de suprimir el primer paréntesis será entonces:

$$+(8x+1)=+(+8x+1)=+8x+1=8x+1$$

Para el segundo término tendremos:

$$+(-5x^3+2)=+(-5x^3)+(+2)=-5x^3+2$$

De manera que suprimiendo los paréntesis de ambas funciones (o de cada grupo de términos) tendremos:

$$r(x)=(8x+1)+(-5x^3+2)=8x+1-5x^3+2$$

El siguiente paso en el desarrollo de la suma, será agrupar los términos semejantes, que para nuestro caso solo tenemos los números +1 y +2:

$$r(x)=8x+1-5x^3+2=8x-5x^3+1+2=8x-5x^3+3$$

Finalmente, como una manera ordenada de presentar el resultado, podemos ordenar los términos, comenzando con los exponentes de mayor a menor, para finalmente colocar los términos numéricos. Recuerde que este acomodo debe respetar el signo de cada término como se observa en el acomodo del término $-5x^3$.

$$r(x)=8x-5x^3+3=-5x^3+8x+3$$

$$r(x)=8x+1-5x^3+2=8x-5x^3+1+2=8x-5x^3+3$$

Siendo el resultado final:

$$r(x)=-5x^3+8x+3$$

Resta de funciones

Dadas las funciones $f(x)=3x+1$ y la función $g(x)=-2+6x$; calcular: $r(x)=f(x)-g(x)$

Al igual que se hizo en la suma, lo primero que podemos realizar es sustituir cada una de las funciones por sus valores correspondientes:

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

$$r(x)=(3x+1)-(-2+6x).$$

Después, se eliminan los paréntesis que agrupan cada uno de los valores de las funciones. Para este caso, igual que la suma, se debe considerar el signo que antecede al paréntesis, es decir, si el sigo que está antes del primer paréntesis es positivo; lo cual no cambia el signo de los términos de la primer función:

$$f(x)=(3x+1)=3x+1$$

Ahora, la manipulación del segundo término conlleva a considerar el signo negativo que antecede a la función, lo cual, al aplicar la ley de los signos, cambia cada uno de los signos de cada uno de los términos, como se muestra:

$$-g(x)=-(-2+6x)=-(-2)-(+6x)=+2-6x$$

Así que finalmente, la resta se puede realizar en realidad como una suma, es decir; agrupando cada uno de los términos semejantes, solo que antes de hacer esto, es necesario considerar el resultado de las operaciones con los signos, en particular con la función a la que le antecede el signo negativo. Así, para este caso en particular tendremos:

$$f(x)-g(x)=(3x+1)-(-2+6x)=3x+1+2-6x$$

$$f(x)-g(x)=3x+1+2-6x=-3x+3$$

$$r(x)=-3x+3$$

Que es el resultado final.

Producto de funciones

Dadas las funciones $f(x)=2x+6$ y la función $g(x)=-2x^2+8x-1$; calcular $R(x)=f(x)\times g(x)$

Realizar el producto de dos funciones diferentes, conlleva al proceso de realizar el producto mismo de sus valores, es decir que para este caso propuesto tendremos el producto de los polinomios indicados:

$$R(x)=f(x)\times g(x)=(2x+6)(-2x^2+8x-1)$$

Lo cual se lleva a cabo multiplicando cada uno de los términos algebraicos del primer factor por los del segundo, es decir:

$$R(x)=(2x+6)\left(-2x^2+8x-1\right)=(2x)\left(-2x^2+8x-1\right)+(6)\left(-2x^2+8x-1\right)$$

$$R(x)=\left(-4x^3+16x^2-2x\right)+\left(-12x^2+48x-6\right)=-4x^3+16x^2-2x-12x^2+48x-6$$

$$R(x)=-4x^3+16x^2-2x-12x^2+48x-6=-4x^3+4x^2+46x-6$$

Siendo este último el resultado final.

Cociente o división de funciones

Dadas las funciones $f(x)=2x+6$ y $g(x)=-2x^2+8x-2$; calcular $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Lo primero que debe realizarse, es la sustitución de los valores de las funciones en el cociente propiamente dicho. Esto se expresa:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+6}{-2x^2+8x-2}$$

Este puede ser ya el resultado de la división, sin embargo, una manipulación algebraica puede exhibir un resultado más sintetizado:

$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+6}{-2x^2+8x-2}=\frac{(2)(x+3)}{(2)\left(-1x^2+4x-1\right)}=\frac{x+3}{-1x^2+4x-1}$$

De esta manera, tendremos como resultado final:

$$R(x)=\frac{x+3}{-x^2+4x-1}$$

Como puede observarse, realizar esta operación conlleva a la división a su vez de dos cocientes. Esta operación puede realizarse con el método de los productos cruzados, o bien, una vez acomodados en un divisor principal, realizando la ley de la herradura.

No hay que perder de vista que en el desarrollo de las divisiones y multiplicaciones, se deben considerar los signos para aplicar precisamente la ley de los signos.

Potencia de funciones

Elevar a la potencia 3 la función: $f(x) = 3x + 2$

Elevar a una potencia equivale a multiplicar por ella misma el número de veces que la potencia lo indique. Para este caso, elevar al cubo esta función equivale a multiplicarla por sí misma tres veces, es decir:

$$\left(f(x)\right)^3 = (3x+2)^3$$

El desarrollo de este producto equivale a realizar el producto:

$$(3x+2)^3 = (3x+2)(3x+2)(3x+2)$$

Para llevar un proceso similar al del producto (que ya hemos descrito), la potenciación puede realizarse primeramente con el producto de 2 de los factores y el resultado de nueva cuenta por el factor mismo; es decir:

$$(3x+2)^3 = \left[(3x+2)(3x+2)\right](3x+2) = \left(9x^2+12x+4\right)(3x+2)$$

El desarrollo de estos dos nuevos factores será entonces:

$$\left(9x^2+12x+4\right)(3x+2) = 27x^3+54x^2+36x+8$$

Teniendo entonces como resultado:

$$\left(f(x)\right)^3 = 27x^3+54x^2+36x+8$$

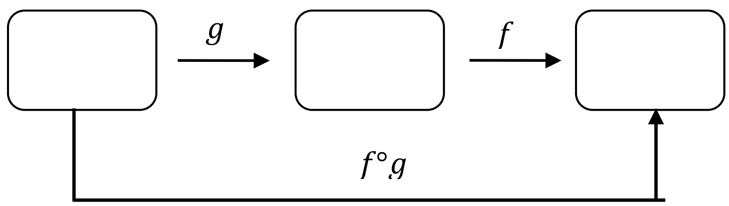
Composición de funciones

La composición de funciones es otra operación entre funciones que se basa en aplicar una función en otra en un orden determinado, dicho resultado es también una función[36,37].

Dadas dos funciones f y g , se llama función compuesta $f°g$ a la función definida de la siguiente forma:

$$(f°g)(x) = f(g(x))$$

Se lee: "f *composición de* g" o también "f *segida de* g"



El dominio de $f°g$ es el conjunto de toda x del dominio de g, tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

La función composición tiene las siguientes propiedades:

$f°(g°h) = (f°g)°h$ (asociativa)

$f°g \neq g°f$ (no es conmutativa)

Dadas las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$, determinar :

$$f°g,\ \ g°f,\ \ f°f,°\ \ g°g$$

$$f°g = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$g°f = g\big(f(x)\big) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$f°f = f\big(f(x)\big) = f(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$$

$$g°g = g\big(g(x)\big) = g(x^2) = ((x)^2)^2 = x^4$$

Dadas las funciones $f(x) = 2x^2 + 6$ y $g(x) = 7x + 2$, determinar:

$f°g,\ g°f,\ f°f,°\ g°g.$

$$f°g = f\big(g(x)\big) = f(7x+2) = 2(7x+2)^2 + 6 = 2(49x^2 + 28x + 4) + 6$$
$$= 98x^2 + 56x + 8 + 6 = 98x^2 + 56x14$$

$$g°f = g(f(x) = g(2x^2+6) = 7(2x^2+6) + 2 = 14x^2 + 42 + 20 = 14x^2 + 44$$

$$f°f = f\big(f(x)\big) = f(2x^2+6) = 2(2x^2+6)^2 + 6 = 2(4x^4 + 24x^2 + 36) + 6$$
$$= 8x^4 + 48x^2 + 72 + 6 = 8x^4 + 48x^2 + 78$$

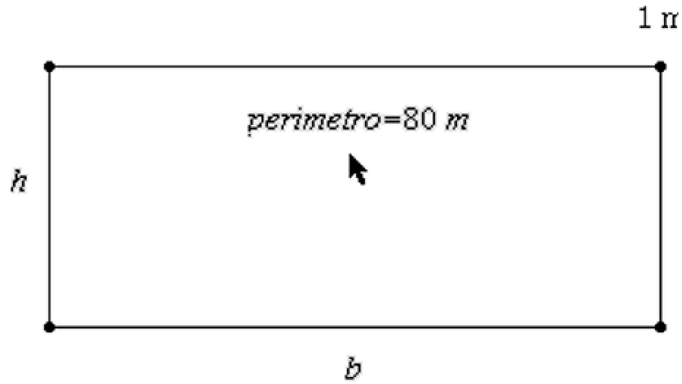
$$g°g = g\big(g(x)\big) = g(7x+2) = 7(7x+2) + 2 = 49x + 14 + 2 = 49x + 16$$

1.7. Modelación de funciones

Ejemplos:

1. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 80 m. Se desea expresar el área en función del lado más largo (base)

Un buen comienzo para el planteamiento de este problema, es realizar un dibujo que represente lo más posible al problema planteado, con todas las representaciones de sus variables. De esta manera, podemos expresar en un bosquejo un dibujo como el siguiente:



De acuerdo a la figura, podemos expresar el área del rectángulo en función de la base o de la altura, es decir:

$$A(b,h) = b \times h$$

Por otro lado, un cálculo que puede ser también útil es la función del perímetro, que se escribiría:

$$P(b,h) = (b+b) + (h+h) = 2b + 2h$$

Como conocemos el valor del perímetro, podemos sustituirlo en la expresión anterior de manera que

$$P(b,h) = 80m = 2b + 2h$$

Que podemos expresar como

$$80m = 2b + 2h$$

Esta es ya una ecuación, pues sus valores están en función de un valor en particular, de hecho, puede expresarse de manera más sintetizada como

$$40m = b + h$$

Podemos despejar de esta ecuación, la variable altura (h), para de esta manera tener la ecuación en función de la base (b), es decir:

$$h = 40m - b$$

Sustituyendo esta variable en la función del área tendremos:

$$A(b,h) = b \times h = b \times (40m - b)$$

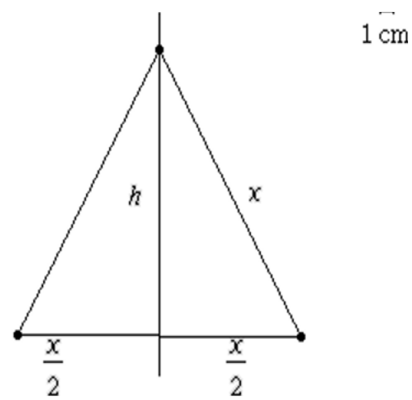
Lo cual nos deja una expresión en función de una sola variable:

$$A(b)=b\times(40m-b)=(40m)(b)-b^2$$

Y que es la función pedida.

2. ¿Cómo se puede expresar el área de un triángulo equilátero como función de la longitud **x** de uno de sus lados?

Al igual que en el problema anterior, un buen comienzo puede ser una representación del problema. Así, un dibujo del triángulo ayudaría:



Como puede observarse, la figura muestra la representación de un triángulo equilátero, esto es, con cada uno de sus lados iguales. La altura de esta parte de la mitad del lado considerado como base (por ser un triángulo rectángulo), de ahí que la base se divide en dos partes iguales a partir de la altura, que es una recta perpendicular a la base.

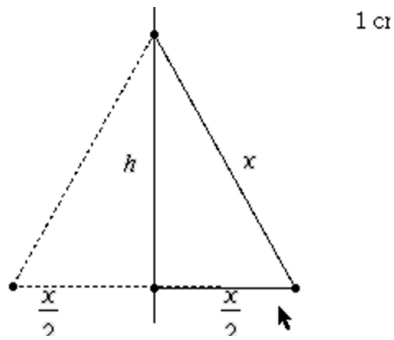
Comenzando con el análisis de la figura, tenemos que el área del rectángulo será:

$$A(b,h)=\frac{b\times h}{2}$$

Como sabemos, la base puede sustituirse por el valor de la base, es decir:

$$A(x,h)=\frac{(x)\times(h)}{2}$$

Por lo que puede observarse, debemos encontrar una expresión que vincule la variable **h** con la variable **x**. Una manera de expresar lo anterior es considerando uno de los triángulos rectángulo en los que se ha dividido el triángulo equilátero.



En el triángulo mencionado, podemos expresar que por teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (h)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Despejando la variable **h**:

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

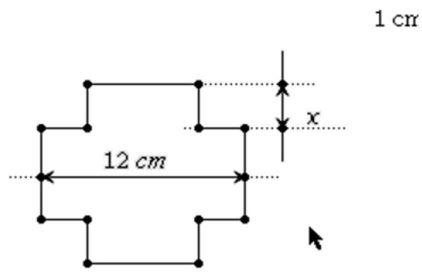
Que es una fórmula que contiene solamente a la variable **x**. Por tanto, podemos sustituir esta fórmula en la función que expresa el área del triángulo:

$$A(x) = \frac{(x) \times \left(\sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}{2}$$

Que es la fórmula pedida.

3. Se desea fabricar una caja sin tapa con una lámina de cartón cuadrada cuyos lados midan 12cm. Encontrar una expresión del volumen que contendrá la caja en función de cuatro recortes cuadrados que se realizarán en cada una de las esquinas

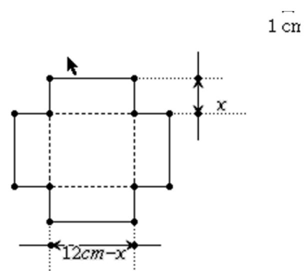
Un dibujo que represente el planteamiento del texto anterior puede ser similar al siguiente:



Como puede observarse, la hoja de cartón tiene los recortes descritos, por lo que una función que nos indique la base de la caja se expresaría como

$$b(x) = (12cm - 2x)(12cm - 2x)$$

Puesto que el cuadro que haría las veces de base tiene como lado el valor de $12cm - 2x$, como se muestra en la siguiente figura:



Como puede observarse, el valor de la altura de la caja será entonces de **x**, por lo que el volumen total de la caja puede expresarse como el producto de la base por la altura, es decir:

$$b(x) \times h(x) = (12cm - 2x)(12cm - 2x)(x)$$

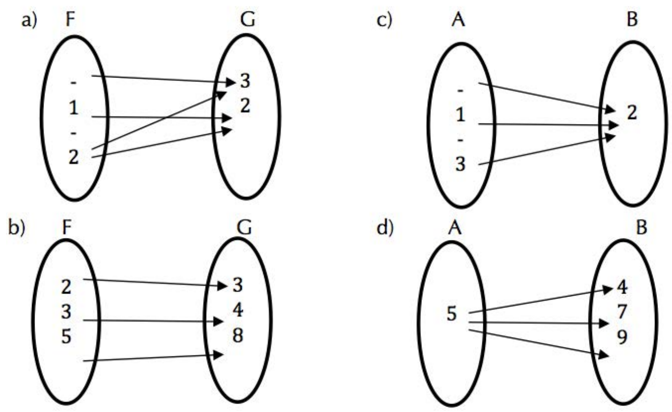
Desarrollando el producto y agrupando términos semejantes, tendríamos:

$$V(x) = 4x(x - 6cm)^2$$

Que es la función pedida.

1.8. Problemario

1. Analiza cada uno de los siguientes diagramas e identifica si corresponden a una función o relación:



2. Analiza cada uno de los siguientes conjuntos de pares ordenados, indicando si corresponde a una función o relación:

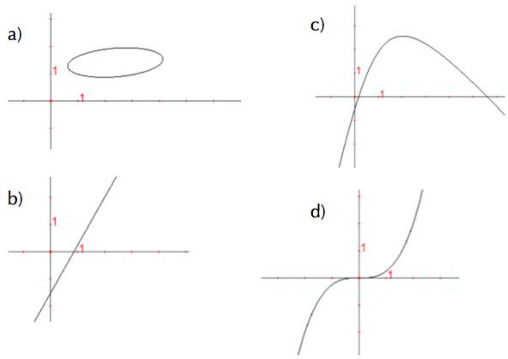
a) $A\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

b) $F\{(1,-1),(1,-2),(0,-4),(0,0),(3,3)\}$

c) $T\{(5,8),(3,2),(-1,-1),(0,4)\}$

d) $D\{(0,4),(0,-1),(0,-2),(0,-3)\}$

3. Estudia cada una de las siguientes gráficas e identifica si corresponde a una función o relación:



4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$a) g(x) = \sqrt{x-1}$

$b) f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

$c) g(x) = 3x+2$

$d) f(x) = \dfrac{2}{5-x}$

5. Grafica las siguientes funciones:

$a) f(x) = 4x-2$

$b) f(x) = 2x^2$

$c) g(x) = \sqrt{x-1}$

6. Relaciona ambas columnas, indicando dentro del paréntesis la literal que le corresponda:

1.( ) $f(x) = 4\pi$	$a)$ *Función* lineal
2.( ) $f(x) = 1-x$	b) Función irracional
3.( ) $g(x) = x$	c) Función Trigonométrica
4.( ) $f(x) = x^2 + x - 5$	d) Función constante
5.( ) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1}$	$e)$ Función cuadrática
6.( ) $f(x) = Cos 3x^2$	$f)$ Función racional
7.( ) $f(x) = \sqrt{2x+7}$	g) Función identidad

7. A partir de las funciones $f(x)=4x-1$, $g(x)=3-x$, $h(x)=x^2$, $r(x)=x+1$, realiza las siguientes operaciones:

$a) f(x)+g(x)$

$b) h(x)+f(x)$

$c) g(x)-r(x)$

$d) \dfrac{f(x)}{h(x)}$

$e) r(x)gg(x)$

8. Un celular de una marca comercial, presenta una forma rectangular como se muestra en la imagen, con un perímetro de 42cm. Expresa el área del celular en función de la longitud del lado menor.

9. Un cuaderno profesional tiene un área de 638cm^2. Expresar su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

10. Una caja de leche de cartón con base y tapa rectangular presenta un área total de 920cm^2. Expresa el volumen de la caja de leche en función de los lados de la tapa.

1.9. Autoevaluación

1. Identifica la variable independiente que se encuentra en los siguientes enunciados de funciones:

a) Área de un cuadrado $A = l^2$

b) La energía potencial de un automóvil en reposo Ep=mgh

c) El volumen de un cilindro $V = \pi r^2 h$

2. Escribe sobre la línea el tipo de función que corresponde a cada una de las siguientes funciones:

$a) f(x) = x + 3$ __________________________

$b) f(x) = 2\pi - x^2$ __________________________

$c) f(x) = \sqrt{5x - 1}$ __________________________

$d) f(x) = \dfrac{x}{3 - 4x}$ __________________________

3. Cuál es el producto de las siguientes funciones $f(x) = 3x^2 - 4$ y $g(x) = 1 - x$

4. Determina el dominio de la siguiente función: $t(r) = \sqrt{r^2 - 36}$

5. Identifica si corresponde a una relación o función los siguientes pares de ordenados:

a) (3,1), (4,2), (5,3),(6,4)

b) (0,0), (0,1), (0,-1), (-1,0)

c) (3,4), (4,3), (3,2), 2,3)

6. Una fotografía presenta un perímetro de 72cm. Expresa el área de la fotografía en función de lado mayor, según la imagen presentada.

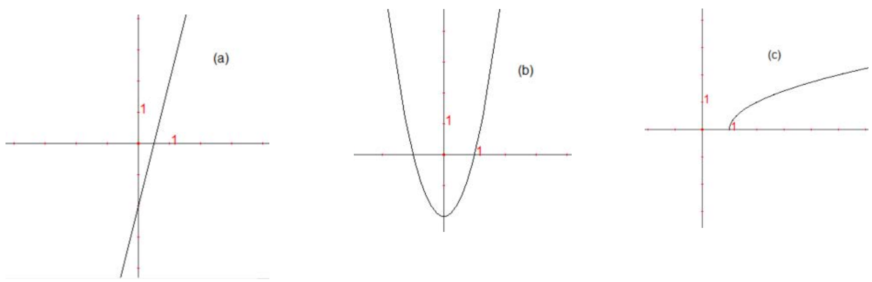
7. El área de un portarretrato corresponde a 1050cm^2. Expresa el perímetro como función de uno de sus lados.

1.10. Soluciones del problemario

1. a)Relación, b)Función, c)Función, d)Relación
2. a)Función, b)Relación, c)Función, d)Relación
3. a)Relación, b)Función, c) Función, d) Función

4.a) $x \geq 1$, b) $x \neq 2$, c)Todos los R, d) $x \neq 5$

5.



6. 1d, 2a,3g,4e,5f,6c,7b

7.

$a)3x+2$

$b)x^2+4x-1$

$c)2-2x$

$d)\dfrac{4x-1}{3-x}$

$e)3+2x-x^2$

8. $A(x)=21x-x^2$

9. $P(h)=\dfrac{1276-2h^2}{h}$

10. $V(x,y)=xy(230-\dfrac{x}{2})$

1.11. Solución de la autoevaluación

1. a) l , b) m,h, c) h,r
2. a) F. lineal ,b)F. cuadrática, c) F. irracional, d) F. racional
3. $-4+4x+3x^2-3x^3$
4. $r \geq 6$
5. A) Función, B) Relación, C) Relación
6. $A(h)=38h-h^2$
7. $P(h)=\dfrac{2100}{h}+2h$

1.12. Conclusiones

Es importante comprender el presente capítulo, ya que es uno de los pilares fundamentales en las matemáticas, además que te ayudará a entender mejor el cálculo. Ahora bien, en nuestra vida diaria nos enfrentamos a un sinfín de funciones y relaciones, desde el inicio de nuestra concepción, ya que debe de haber una relación con el sexo opuesto para poder existir y finalmente está en función de la madre en que se diera o no, nuestra existencia; las gráficas las vemos reflejadas como información en algunos recibos de cobro, como lo es en el servicio de la luz eléctrica o del agua potable, además de que se requiere su identificación, para poder determinar el tipo de función o relación que corresponde. Debes de considerar que seguirás estudiando las funciones, por lo que se te invita a seguir indagando sobre el tema, en las diferentes fuentes bibliográficas.

Referencias

[1] Molina Moreno, José Luis & et.al. (2011). México: CONALEPMICH/CIE

[2]Gozález G. Carlos, ET.AL. (2008). Matemáticas: Bachillerato 1. Madrid, España. Editex, S.A.

[3] Engler Adriana, ET.AL. (2005). Funciones. Santa Fe, Argentina. Ed. Universidad Nacional Del Litoral.

[4] Rodríguez Núñez, Marisol & et. al.(2011). México: CONALEPMICH
[5] Engler Adriana, et al. (2010). F*unciones*. Santa Fe, Argentina: UNL. Recuperado 15 de junio de 2011, de http://www.google.com.mx/#sclient=psy&hl=es&tbm=bks&source=hp&q=funciones+engler+adriana&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=61d914ee0792f9b8&biw=1280&bih=540

[6] A. Bak Thor,Lichtenberg Jonas (1972). *Functions of one several variables*. Barcelona: Reverté. Recuperado 15 de junio de 2011, de http://www.google.com.mx/#sclient=psy&hl=es&tbm=bks&source=hp&q=Functions+of+one+several+variables+A.+Bak+Thor%2CLichtenberg+Jonas.&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=61d914ee0792f9b8&biw=1280&bih=540

[7] Prawda W. Juan (1995). *Métodos y modelos de investigación de operaciones*. México: Limusa. Recuparado 15 de junio de 201, de http://www.google.com.mx/#sclient=psy&hl=es&tbm=bks&source=hp&q=Prawda+W.+Juan%2CM%C3%A9todos+y+modelos+de+investigaci%C3%B3n+de+operaciones.M%C3%A9xico:+LImusa+%281995%29&aq=f&aqi=&aql=&oq=&pbx=1&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=61d914ee0792f9b8&biw=1280&bih=540

[8] Biografías y Vidas (2011). Leonhard Euler. Biografías y Vidas . Recuparado 15 de junio de 201, de http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm

[9] Bradley, Robert E. & Sandifer, Charles Edward (2007). *Leonhard Euler: life, work and legacy*. Netherlands : Elsevier. Recuparado 15 de junio de 201, de http://books.google.com.mx/books?id=75vJL_Y-PvsC&pg=PA214&dq=Introduction+to+analysis+of+the+infinite&hl=es&ei=Ax0zTo_iHI6NsALz_OCaCw&sa=X&oi=book_result&ct=book-thumbnail&resnum=3&ved=0CDcQ6wEwAg#v=onepage&q=Introduction%20to%20analysis%20of%20the%20infinite&f=false

[10] Enciclopedia Británica. Recuperado el 16 de junio de 2011, de http://www.britannica.com/EBchecked/topic/165066/Peter-Gustav-Lejeune-Dirichlet

[11] Axioma: proposición tan obvia, clara y sencilla que se admite sin demostrar.

[12] Hidalgo de la Vega, María José, et al. (1988). *Historia de la Grecia antigua.* Salamanca: Universidad de Salamanca. Recuperado el 16 de junio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=lw8XTUFXelkC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[13] Barradas, Ignacio (2005). *Las matemáticas del antiguo Egipto*. Buenos Aires: Argenpress. Recuperado el 16 de junio de 2011, de http://www.revistaarabe.com.ar/noticias_matematicas_egipto.asp

[14] James Holton, Gerald Brush, & Stephen G. (1996). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. Barcelona: Reverté. Recuperado el 16 de junio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=DROlYRS_VWoC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[15] G. Furones, Daniel (2011).*Biografía de Johann Bernoulli*. Astroseti. Recuperado el 17 de junio de 2011, de http://www.astroseti.org/articulo/4494/biografia-de-johann-bernoulli

[16] Hairer, Ernst & Wanner, Gerhard (2008). Analysis by Its History. New York: Springer. Recuperado el 17 de junio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=Kzp4zPIL8B0C&pg=PR5&dq=Introduction+to+analysis+of+the+infinite,Book+I,+trad.+John&hl=es&ei=_SEzTtPVOa_CsQL287HnCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CC0Q6AEwAQ#v=onepage&q&f=false

[17] Albert Dou, Euler. (1993). *Métodos de máximos y mínimos*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona Recuperado el 17 de junio de 2011, de http://books.google.com/books?id=amelmrfmwEMC&pg=PA19&dq=Euler:+institutiones+calculi+differentialis&hl=es&ei=3ur2TaWxOoP2tgP-oszCBw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CC0Q6AEwAA#v=onepage&q=funci%C3%B3n&f=false

[18] Guerra T. Manuel (1994). *Geometría analítica.* México: McGraw-Hill

[19] Juan Manuel Silva &Adriana Lazo (2003). *Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México: Limusa* *http://books.google.com.mx/books?id=TyRUwQ4pKLMC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false*

[20] De Oteyza Elena. (2006). Conocimientos Fundamentales de Matemáticas Cálculo diferencial e integral. México. Pearson

[21] Aguilar Marquez Arturo, et.al. (2010). Cálculo diferencial e integral. México. Pearson.

[22] Z=conjunto de los números enteros {…-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…}

[23] Función expresada como el cociente de dos funciones polinomiales $P(x)/Q(x)$ donde $Q(x)\neq 0$

[24] ( ) notación de intervalos abiertos por los dos extremos

[25] Stewart James. Cálculo: Conceptos y Contextos.(2010). México. Cengage Learning

[26] Ochoa Hernández, Silvia & Carreño García, J. Jesús (2014) Representación simbólica y angulas del entorno. México: CONALEP/CIE

[27] Steiner Erich (2003).The Chemistry Maths Book. España: Editorial Reverté, S.A.

[28] Linés Escardó(1991). Principios de análisis matemático. España: Editorial Reverté, S.A.

[29] Estrada William, Moreno Vladimir (2005) Colombia: Editorial Norma S.A.

[30] James Stewart, Redlin Lothar, et al. (2007) Precálculo: Matemáticas para el Cálculo.México: Cengage Learning Editores, S.A.

[31] Fleming Walter, Varberg Dale (1991) Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

[32]Mendez Hinojosa Arturo. (2007). Matemáticas 4. México. Santillana

[33]Haar R. Bart M. Front-end vision and multi-scale image analysis. (2003). KluwerAcademic Publisher.

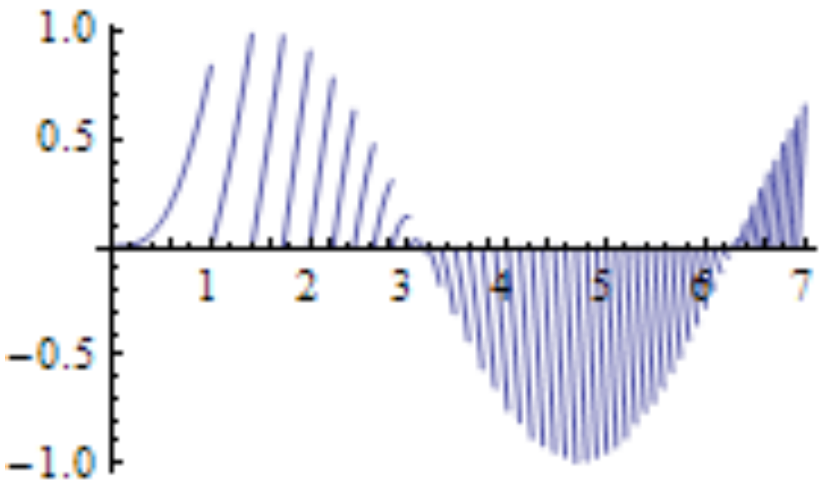
[34]Fuenlabrada Samuel. Cálculo Diferencial. (2008). McGraw Hill Interamericana

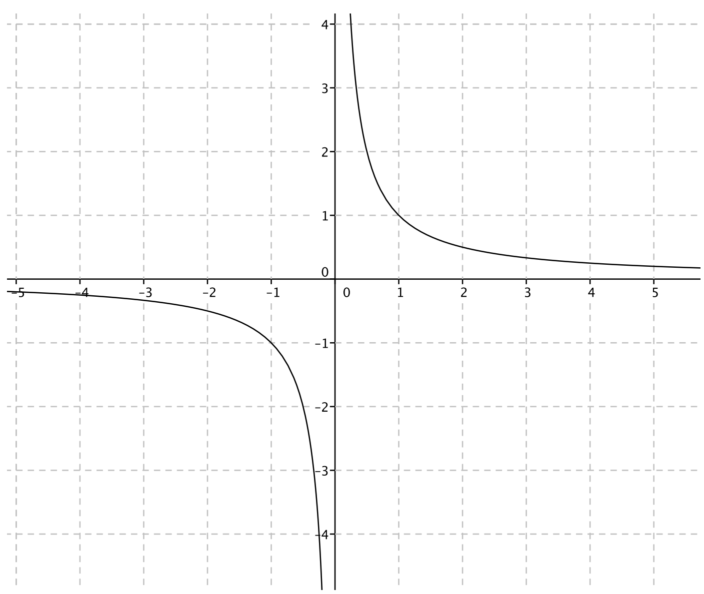
[35] G. Zill Dennis. (1987). Cálculo con geometría analítica. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

[36]Fuenlabrada Samuel.(1995) *Matemáticas IV Cálculo Diferencial* .México: McGraw-Hill

[37]González G: Carlos, et al.(2008). *Matemáticas, 1 Bachillerato.* México. Editex

Capítulo 2: Límites de funciones





2. Introducción

La idea del límite de una función es intuitiva, nos refiere hacia donde va, a dónde llega la función al acercarse a un valor determinado.

Es en el siglo XIX aparece el término límite de manera formal por Fourier, Bolzano y Euler.

Al tratar de explicar los pequeños desplazamientos de un cuerpo en física surge este concepto, y el álgebra para describirlo, así, surge el cálculo infinitesimal.

Una definición práctica del concepto de límite[1] puede ser a partir de una serie de números, esto es: el límite de una sucesión.

Por ejemplo, la sucesión:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots\frac{1}{10},\ \ldots,\frac{1}{100},\ \ldots\ \frac{1}{1000},\ \ldots.,\ \frac{1}{n}$$

Podemos observar que el cociente de las fracciones se va acercando cada vez más y más a un determinado valor:

$$1,\ 0.5,\ 0.3,\ 0.25,0.2,\ \ldots.1,\ \ldots,.01,\ \ldots\ .001,\ \ldots.,\ ¿?$$

El valor al que tiende es cada vez más pequeño pero no exacto, ya que a medida que crece el valor de n, el cociente tiende a ser cada vez más cercano a cero, si hacemos que **n** tienda a infinito, el cociente será cero; es decir:

$$\frac{1}{n}=0 \text{ cuando } n\to\infty$$

léase $\frac{1}{\mathrm{n}}=0$, cuando n tiende a infinito.

Es necesario aclarar que solo podemos colocar el signo de igual, cuando la **n** tiene como tendencia una cantidad que es tan cercana como sea posible a la expresada, infinito, para nuestro caso.

Por otro lado, si realizamos la misma operación tratando de expresar una fracción cuyo denominador tienda a cero (recuerde que la operación de cualquier número entre cero no está definida), ¿cómo podemos expresar el resultado?. Analizando esta situación de manera similar a la anterior, podemos comenzar expresando una sucesión de cocientes, cuyo denominador se vaya haciendo en cada ocasión más pequeño:

$$1,\ \frac{1}{.9},\ \frac{1}{.8},\ \ldots,\frac{1}{.5},\ \ldots,\frac{1}{.1},\ \ldots,\frac{1}{.01},\ \ldots,\frac{1}{.001},\ \ldots\ \frac{1}{.0001},\ \ldots.,\ \frac{1}{n}$$

El cociente tomará los valores:

$$1,\ 1.1\ ,\ 1.25,\ \ldots,2,\ \ldots,10,\ \ldots,100,\ \ldots,1000,\ \ldots\ 10000,\ \ldots.,\ ¿\infty?$$

De acuerdo a estos resultados y al proceso de análisis descrito en el ejemplo anterior, podemos afirmar que dada la sucesión de fracciones, donde el denominador de estas se hace cada vez más pequeño, el resultado de la fracción uno entre **n** cuando **n** tiende a cero será infinito.

En otras palabras:

$$\frac{1}{n}=\infty \text{ cuando } n\to 0$$

Una definición práctica de límite de una función nos lleva a situarnos en un conocimiento elemental y práctico del concepto de límite, afirmar que **f** tiende a L en a, equivale a expresarlo en la ecuación:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Esta definición se retoma el concepto de función y debido a que, la variable **n** puede tomar cualquier valor, lo que nos proporciona una evaluación de la función. De hecho, prácticamente la tendencia de la variable es equivalente a tomar su valor, solo que no se debe olvidar que es un valor tan cercano como sea posible a la tendencia, no es igual a ese valor. Por lo que, considerando los ejemplos anteriores, podemos reescribir que la función $\frac{1}{n}$ tiende a cero en infinito de acuerdo a la notación de límite. Esto es:

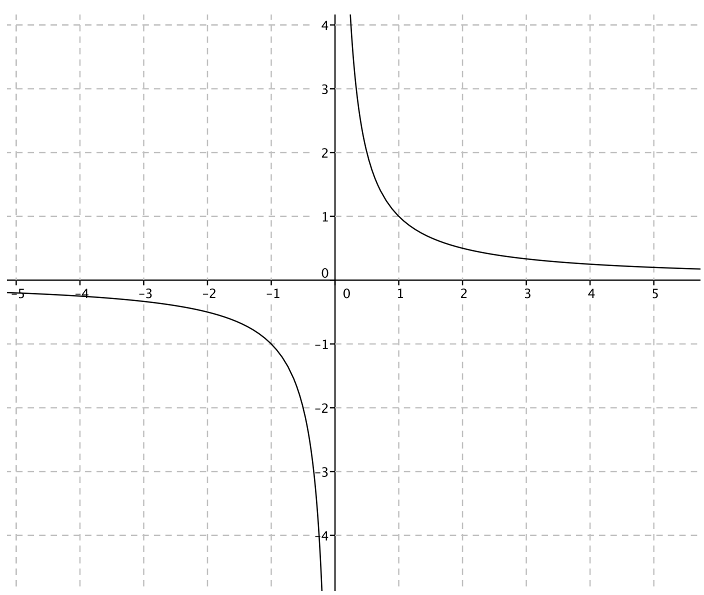
$\frac{1}{n}=0$ cuando $n \rightarrow \infty$ será equivalente a escribir: $\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$

De la misma manera, podemos afirmar que

$\frac{1}{n}=\infty$ cuando $n \rightarrow 0$ será equivalente a: $\lim_{n\rightarrow 0}\left(\frac{1}{n}\right)=\infty$

Por otro lado, podemos evaluar la función con cualquier otro valor definiéndolo como su límite. De esta manera, cuando de se evalúa la función anterior en diez, podemos decir:

$$\lim_{n\rightarrow 10}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10}=0.1$$



2.1. Límites laterales

Calcularemos el límite de funciones analizando el comportamiento de la variable independiente y dependiente.

Analicemos la siguiente función racional cuya ecuación es :

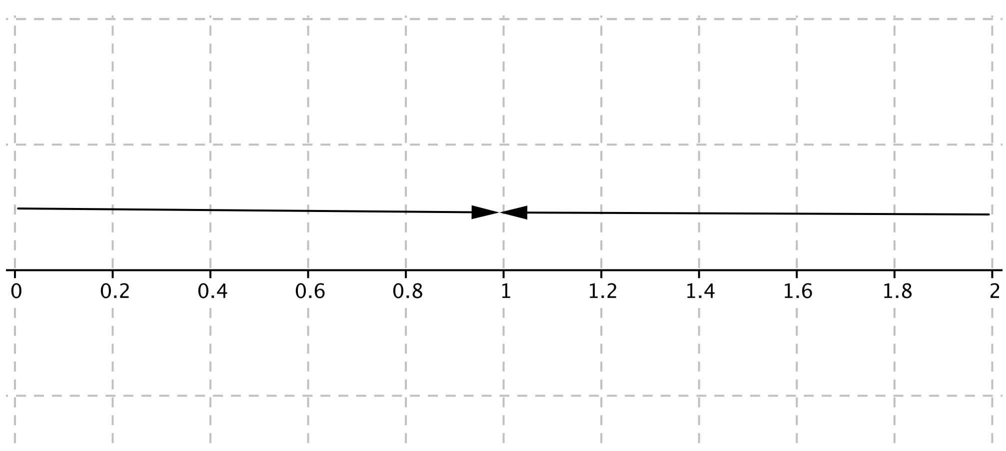
$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1}$$

para describir su comportamiento es importante observar los valores para los cuales esta definida.

Su dominio son todos los números reales con excepción del 1, ya que dicho valor hace cero el denominador y por lo tanto indeterminada a la función.

Pero analicemos que sucede cuando la variable independiente x se acerca a 1 sin llegar a serlo, desde valores menores que él y valores mayores que él.

Realicemos una tabla de valores donde la función tome valores menores que uno acercándose por la izquierda y donde la variable x se hacer al uno por la derecha.



Comencemos acercándonos al valor $x = 1$ por la izquierda:

x	$f(x)$
0	2
.25	3.25
0.5	4.5
0.75	5.75
0.9	6.5
0.99	6.95
0.999	6.995
0.9999	6.9995
0.99999	6.99995

Se lee: el límite de $f(x)$, cuando x tiende a 1 por la izquierda, es 7, y lo representamos por el símbolo:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 7$

Ahora acerquémonos al uno por la derecha:

x	$f(x)$
2	12
1.75	10.75
1.5	9.5
1.25	8.25
1.1	7.5
1.01	7.05
1.001	7.005
1.0001	7.0005
1.00001	7.00005

Podemos concluir que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a 1 por la derecha, es 7, y lo representaremos mediante el símbolo:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

Analizando el numerador de la función $f(x) = \frac{5x^2-3x-2}{x-1}$ es factorizable de la siguiente manera:

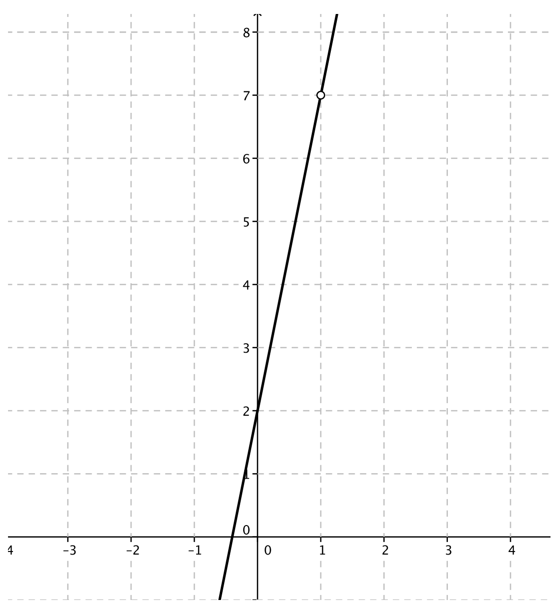
$$f(x) = \frac{(5x+2)(x-1)}{x-1}$$

reduciendo tenemos:

$$f(x) = 5x + 2$$

Así :

$$\lim_{x \to 1} 5\text{x} + 2 = 7$$



Observa que se puede obtener el resultado del límite sustituyendo directamente en la función y haciendo las operaciones indicadas, siempre y cuando esté definido el resultado, esto es que no quede un resultado indeterminado.

2.2. Teoremas de límites

Los límites se pueden encontrar de manera directa para lo cual usaremos los siguientes teoremas.

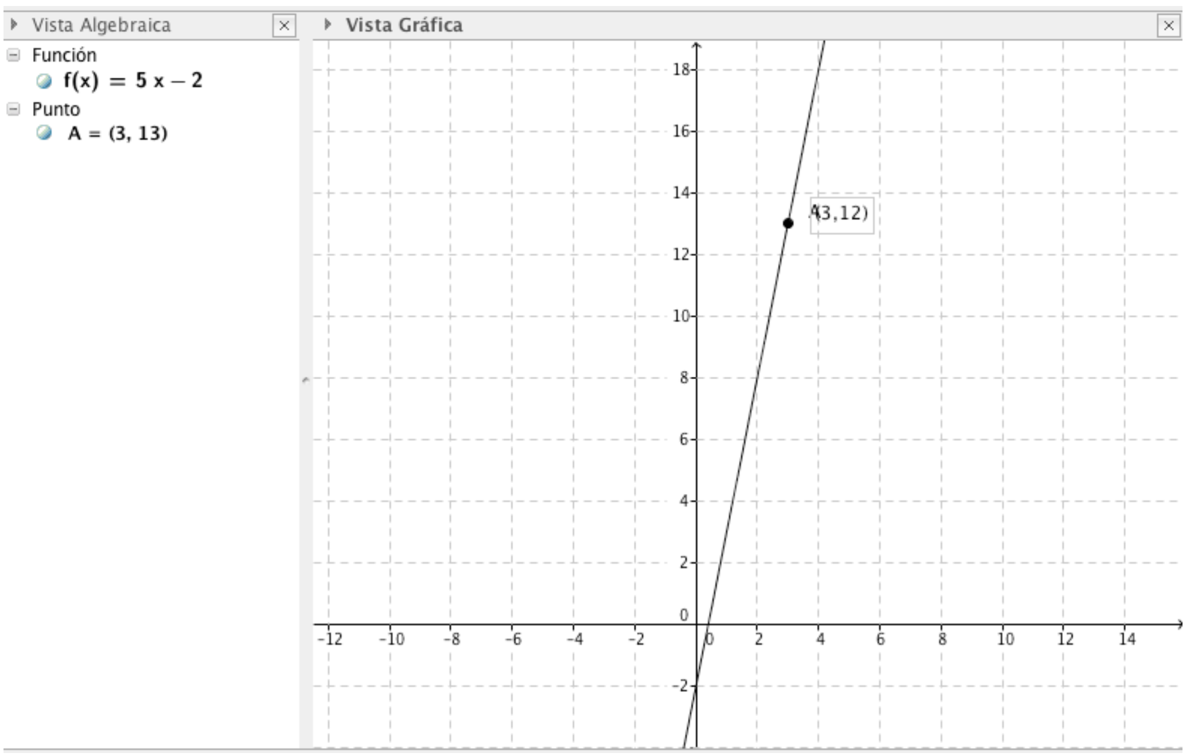
Teorema 1: Si m y b son dos contantes cualquiera,

$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$

Ejemplo:

Calcular el límite cuando x tiende a 3 de la función $f(x) = 5x - 2$, esto se denota de la siguiente manera

$\lim_{x \to 3}(5x - 2) = 5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$



Teorema 2: Si c es una constante, entonces para cualquier número a,

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplo:

Calcular el límite cuando x tiende a 5 de la función $f(x) = 6$, esto se denota de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 5} 6 = 6$$

Teorema 3: $\lim_{x \to a} x = a$

Ejemplo:

Calcular el límite cuando x tiende a 8 de la función $f(x) = x$, esto se denota de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 8} x = 8$$

Teorema 4: Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

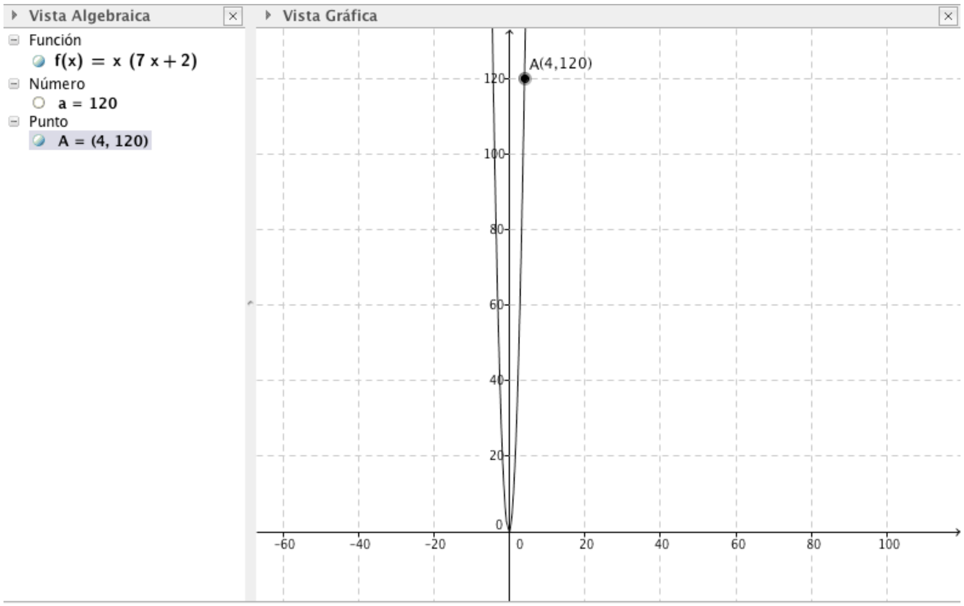
$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Teorema 5: Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = LM$$

Ejemplo:

Calcular $\lim_{x\to 4} x(7x+2) = \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4}(7x+2) = 4 \cdot 30 = 120$



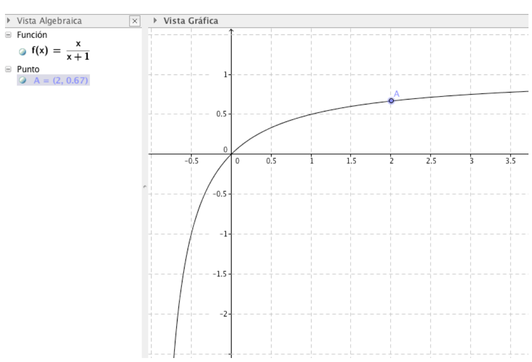
Teorema 6: Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo, entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$

Ejemplo:

Calcular $\lim_{x\to -1}(4x+9)^2 = [4(-1)+9]^2 = [-4+9]^2 = [5]^2 = 25$

Teorema 7: Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x}{\lim_{x\to 2} x+1} = \frac{2}{3}$



Teorema 8: Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Ejemplo:

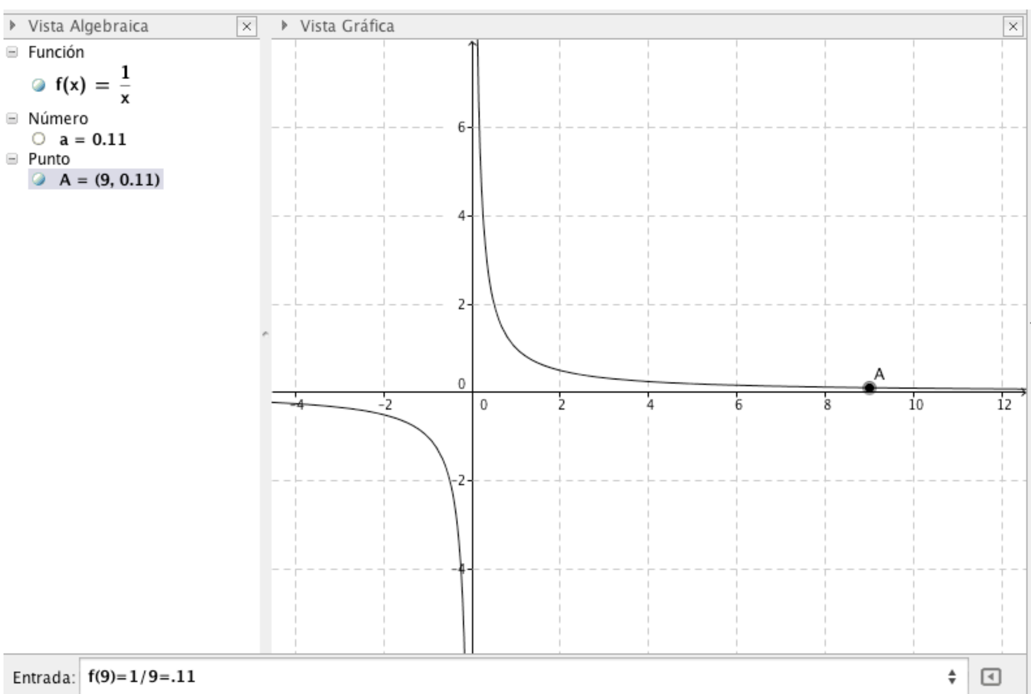
Calcular $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}} = \sqrt{\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x+1}} = \sqrt{\frac{\lim_{x\to 3} x^2+1}{\lim_{x\to 3} x+1}} = \frac{\lim_{x\to 3} x^2+\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} x+\lim_{x\to 3} 1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Teorema 9: Si a es cualquier número, excepto 0

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Ejemplo:

Calcular $\lim_{x\to 9} \frac{1}{x} = \frac{1}{9}$



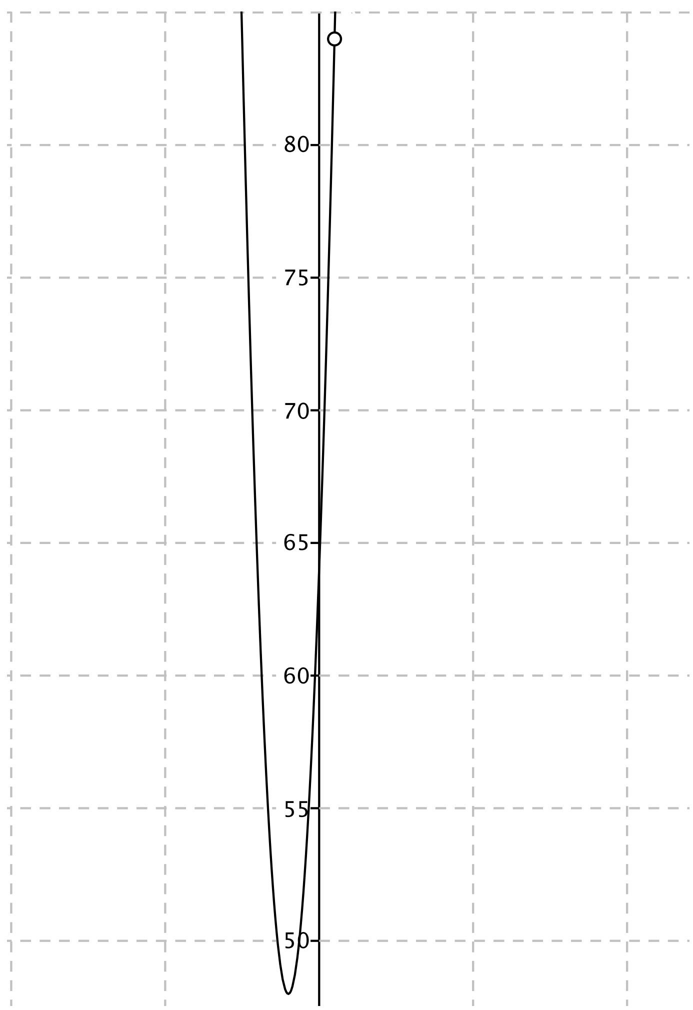
2.3. Límites de funciones determinados e indeterminados

Calculemos $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

Si sustituimos el valor x=2 tendremos una indeterminación $\frac{0}{0}$

Pero si Factorizamos el numerador para quitar la indeterminación, tendremos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+8x+64)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2+8x+64=84$$



Calcular:

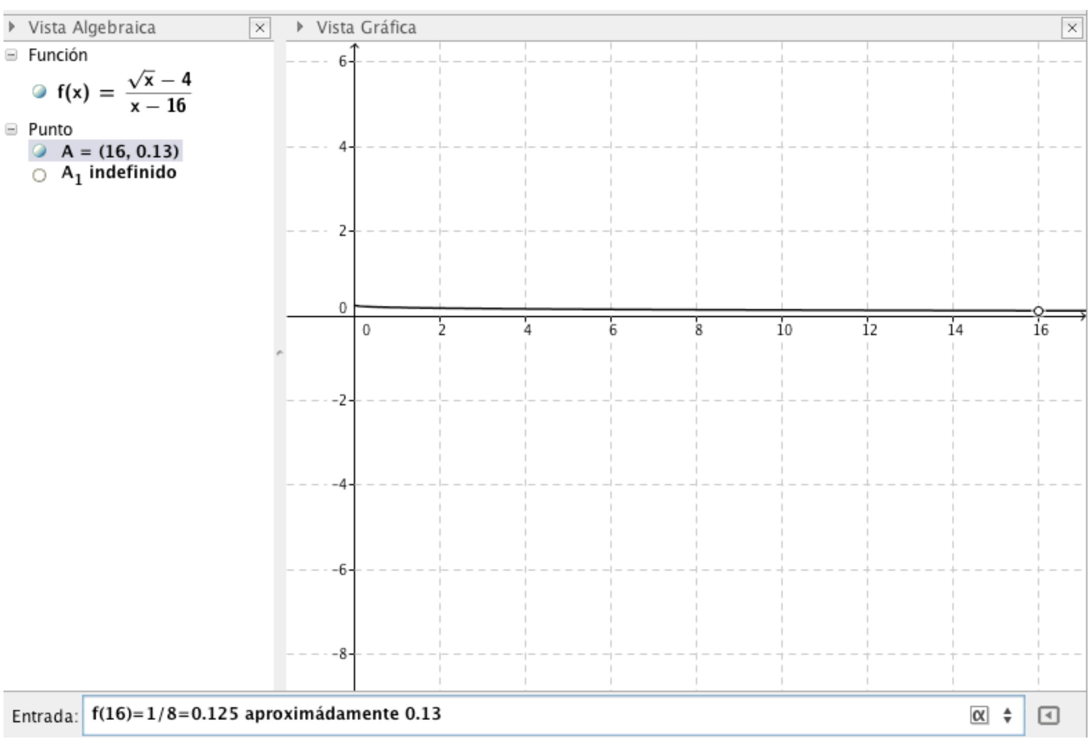
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

Sustituyendo x por el valor 16, tendremos :

$$\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{4-4}{0}=\frac{0}{0}\ \ forma\ indeterminada$$

cuando esto sucede tratamos de quitar la indeterminación, multiplicando por el conjugado, así:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$



Calcular:

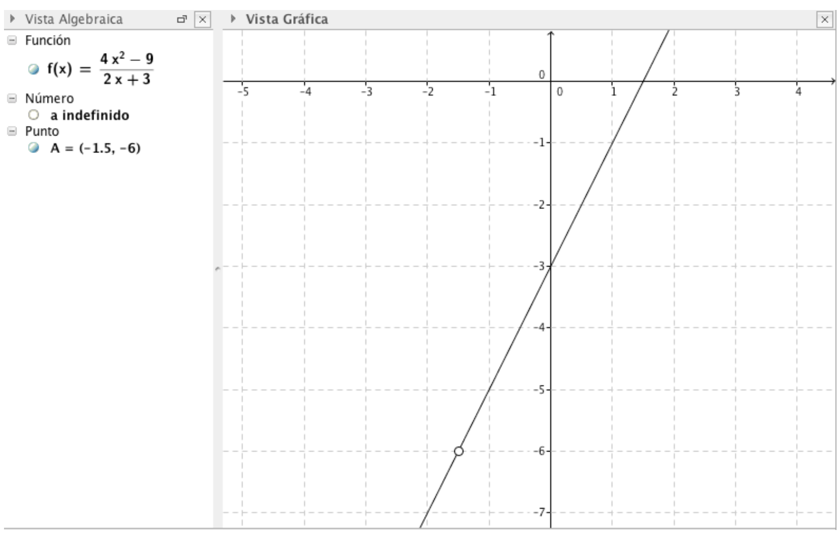
$$\lim_{x\to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3}$$

Al sustituir el valor de x por del de $-\frac{3}{2}$, obtenemos una indeterminación

$\frac{0}{0} = forma\ indeterminada$

Por lo tanto buscamos quitar la indeterminación, Factorizamos el numerado de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to -3/2} \frac{(2x+3)(2x-3)}{2x+3} = \lim_{x\to -3/2} (2x-3) = -6$$



Calcular:

$$\lim_{z\to 1/3} \frac{3z-1}{9z^2-1}$$

Al sustituir el valor de z por $\frac{1}{3}$ tenemos una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo tanto intentaremos quitar la indeterminación, Factorizamos el denominador y tendremos:

$$\lim_{z \to 1/3} \frac{3z-1}{(3z-1)(3z+1)} = \lim_{z \to 1/3} \frac{1}{3z+1} = \frac{1}{2}$$

Calcular:

$$\lim_{x \to 10} (x^2+2x-1)^2 = ((10)^2+2(10)-1)^2 = (119)^2 = 14{,}161$$

Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

Al sustituir el valor de x por 0 tenemos $\frac{0}{0}$ $forma\ indeterminada$

Multiplicamos por el conjugado para intentar quitar la indeterminación

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} \times \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+9)-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{6}$$

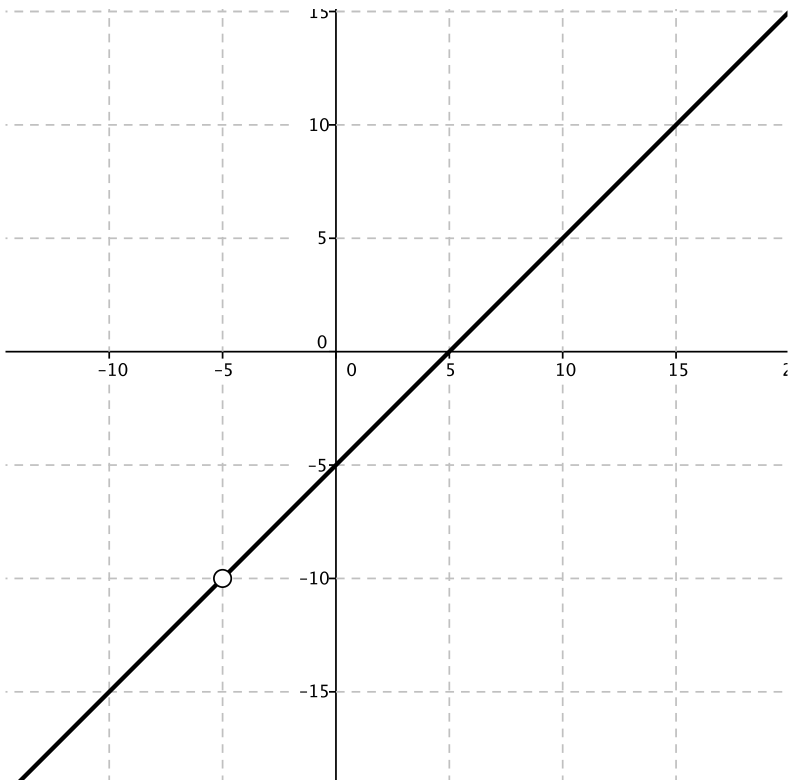
Calcular:

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$$

Al sustituir x por -5 obtenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$

Para quitar la indeterminación factorizamos y reducimos como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}=\lim_{x\to -5}(x-5)=-10$$



Calcular:

$$\lim_{x\to 3}(x^3-2x+1)$$

Sustituimos y tenemos:

$$\lim_{x\to 3}(x^3-2x+1)=(3)^3-2(3)+1=27-6+1=22$$

Calcular:

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x+4}{4x+1}=\frac{5(3)+4}{4(3)+1}=\frac{15+4}{12+1}=\frac{19}{13}$$

Calcular:

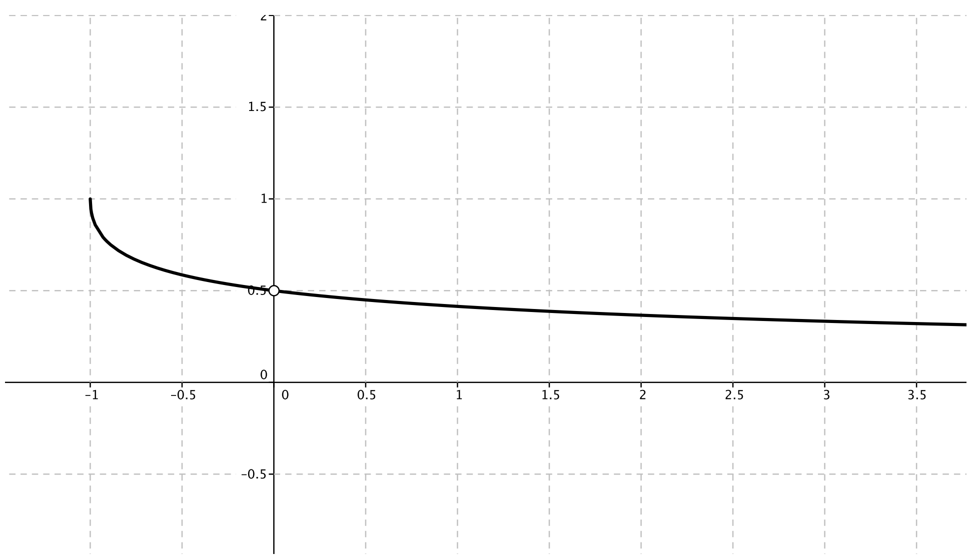
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Al sustituir queda una indeterminación por lo que multiplicamos por el conjugado de $\sqrt{x+1}-1$ que es $\sqrt{x+1}+1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2}$$

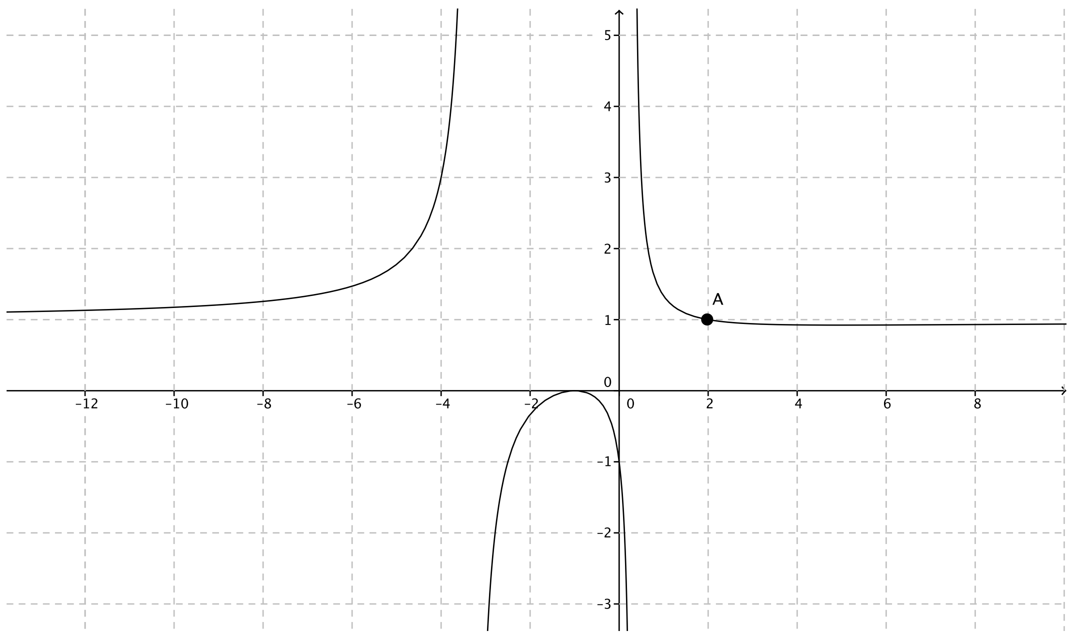


Calcular:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x-1}$$

Sustituimos el valor de la variable x por 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x-1}=\frac{(2)^2+2(2)+1}{(2)^2+3(2)-1}=\frac{9}{9}=1$$



2.4. Límites unilaterales

Definición: Sea f una función definida en todos los números de algún intervalo abierto[2] (a,c). Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a por la derecha es **L**, y se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Definición: Sea f una función definida en todos los números de algún intervalo abierto[3] (d, a). Entonces, el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a por la izquierda es **L**, y se escribe:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Por ejemplo, sea $f(x)$ definida por

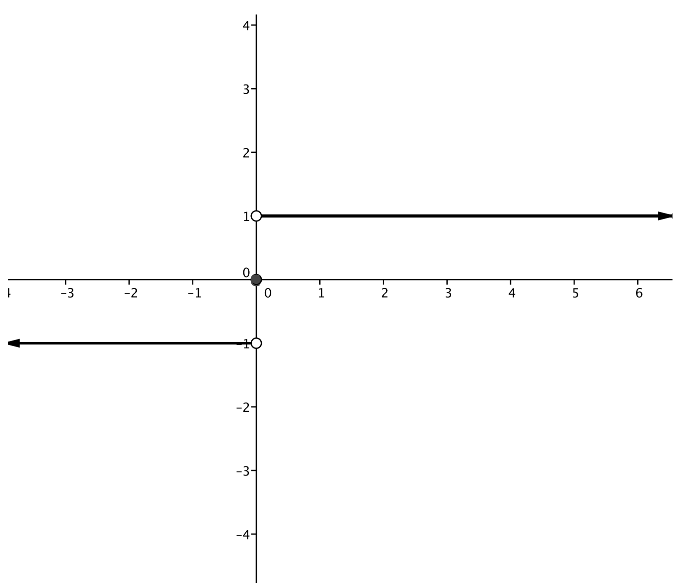
$$f(x) = \begin{cases} 1 \; si \;\; 0 < x \\ 0 \; si \; x = 0 \\ -1 \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Comencemos por trazar la gráfica:

Tenemos $f(x) = 1$ si $x > 0$ tenemos una semirrecta horizontal $y = 1$ para $x > 0$

El punto $f(x) = 0$ representa un punto de coordenadas (0,0)

Y la semirrecta $f(x) = -1 \; si \; x < 0 \, , y = -1 \; para \; x < 0$ que representa una semirrecta horizontal.



De la gráfica podemos observar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$ y que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, de esto podemos concluir que como:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\therefore$ el límite lateral $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\textit{no existe}$

esto se concluye ya que el limite por la izquierda y el límite por la derecha son diferentes el límite lateral no existe.

Teorema: El $\lim_{x\to a} f(x) = L\ y\ \exists\leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)\ y\ existen$

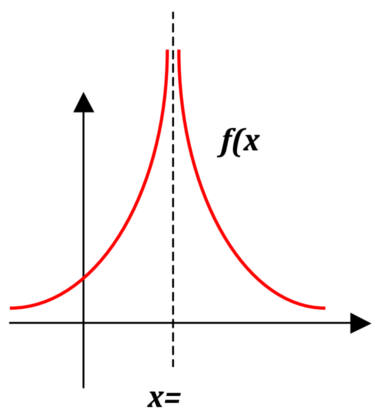
2.5. Límites al infinito

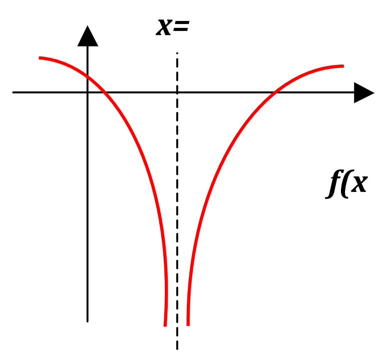
Cuando una función crece o decrece sin medida, a medida que la función se aproxima a un determinado valor, decimos que su límite es infinito, esto es:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (El límite crece)

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (El límite decrece)

Gráficamente podemos observar el comportamiento de una función f que tiende al infinito cuando x tiende a un valor $\boldsymbol{a}$. La recta $x = \boldsymbol{a}$ representa una asíntota vertical de la gráfica de dicha función.





Por ejemplo calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Vemos que la función crece cuando x tiende a cero por la derecha

x	0.000001	0.00001	0.001	0.01	0.1
f(x)	1000000	100000	1000	100	10

y decrece cuando tiende a cero por la izquierda

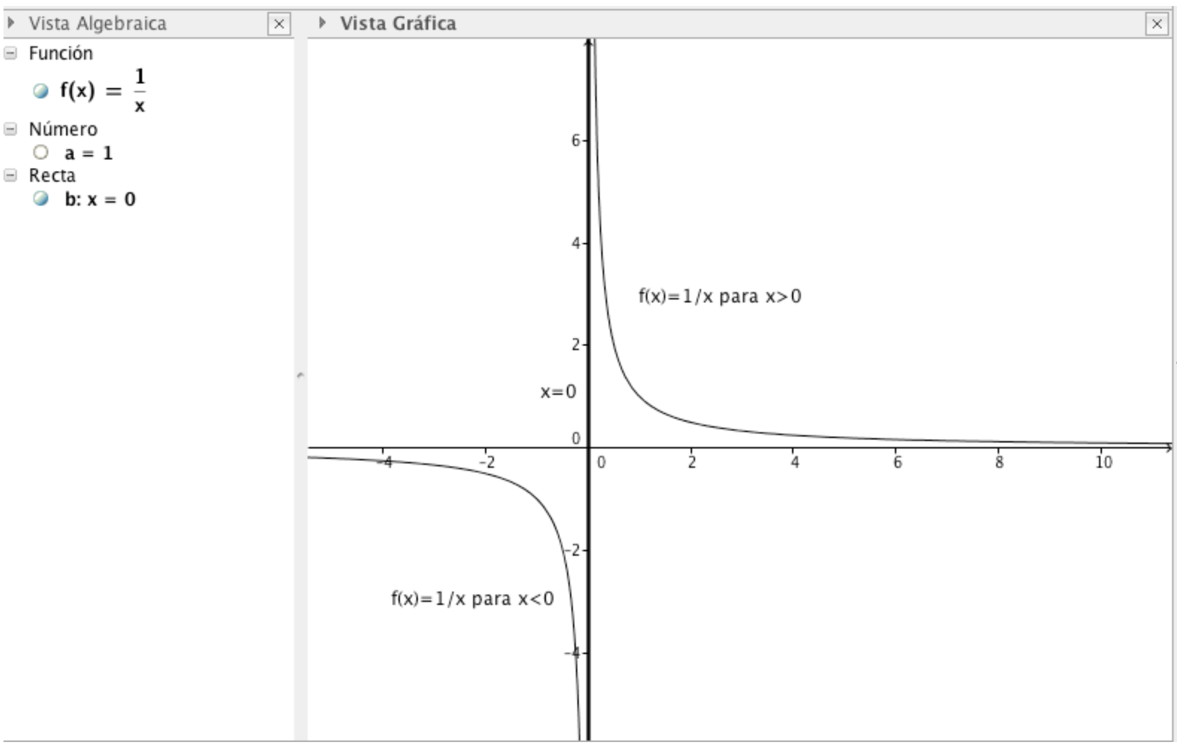
x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.00001	-0.000001
f(x)	-10	-100	-1000	-100000	-1000000

Por lo que podemos escribir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

La ecuación $x = 0$ representa la asíntota vertical, la cual coincide con el eje Y. como se ve en la siguiente gráfica:



Concluimos que el límite: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Un límite al infinito, es aquel en el cual una función se aproxima a un valor A, cuando la variable independiente tiende al infinito positiva o negativamente[4].

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

Se lee el límite de una función *f(x)* cuando x tiende al infinito es igual a *A*.

La recta $y = A$ representa una asíntota horizontal de la gráfica de dicha función.

De la gráfica anterior ($f(x) = \frac{1}{x}$) se puede observar que cuando $x \to \infty$ la función *f(x)* tiende al valor 0, lo cual se puede escribir como:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Y cuando la variable $\boldsymbol{x}$ tiende hacia menos infinito $x \to -\infty$ la función *f(x)* también tiende al valor de 0. Es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

El eje horizontal, eje X, representa una asíntota horizontal.

En conclusión, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ o si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ se dice que $y = k$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

Cuando $x \to \infty$, una manera de calcular el límite de una función es dividiendo cada término entre la base de mayor exponente[5] y aplicar $\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0$

Por ejemplo calcular:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 8x + 2}{4x^2 + x + 1}$$

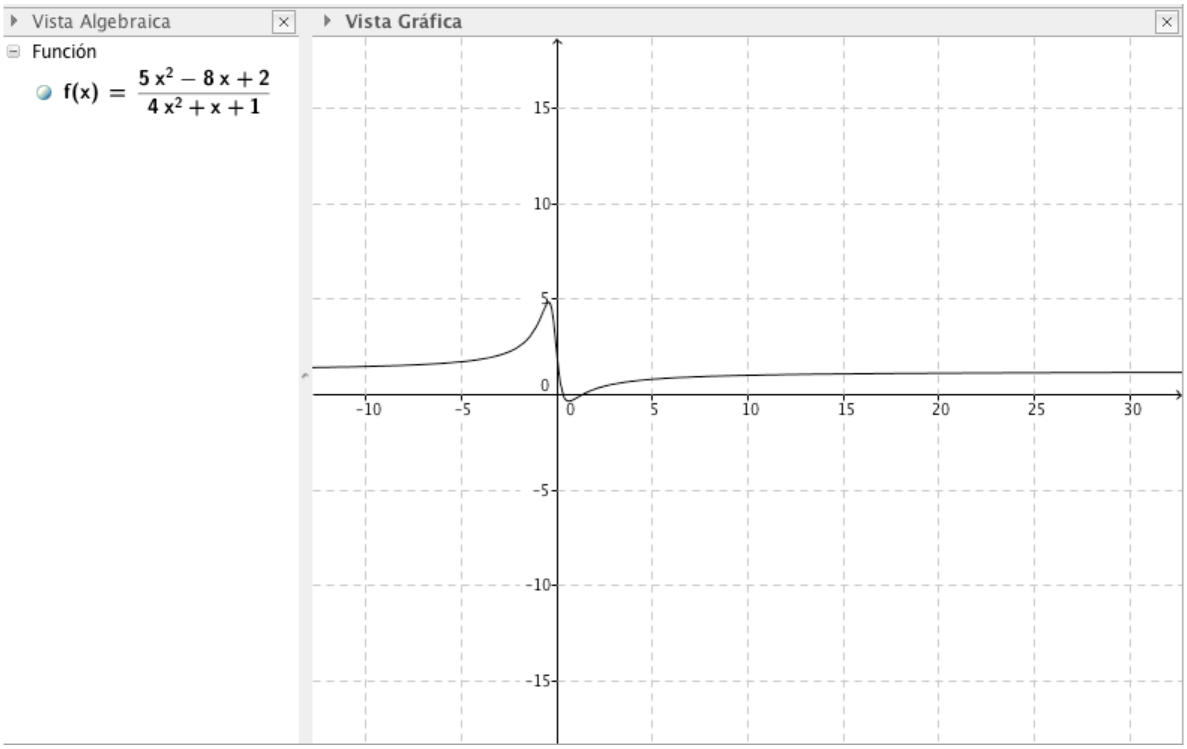
Dividimos cada término del numerador y del denominador entre la variable de mayor exponente

Dividamos entre x^2 para evitar la indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 8x + 2}{4x^2 + x + 1} = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-8x+2}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x+1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} (5 - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2})}{\lim_{x\to\infty} (4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{5 + 0 - 0}{4 + 0 + 0} = \frac{5}{4}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 8x + 2}{4x^2 + x + 1} = \frac{5}{4}$$



Calcular:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^4-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^4-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x}{x^4}-\frac{5}{x^4})}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^4}{x^4}-\frac{1}{x^4})}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3}{x^4}-\frac{5}{x^4})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^4})}=\frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

Calcular:

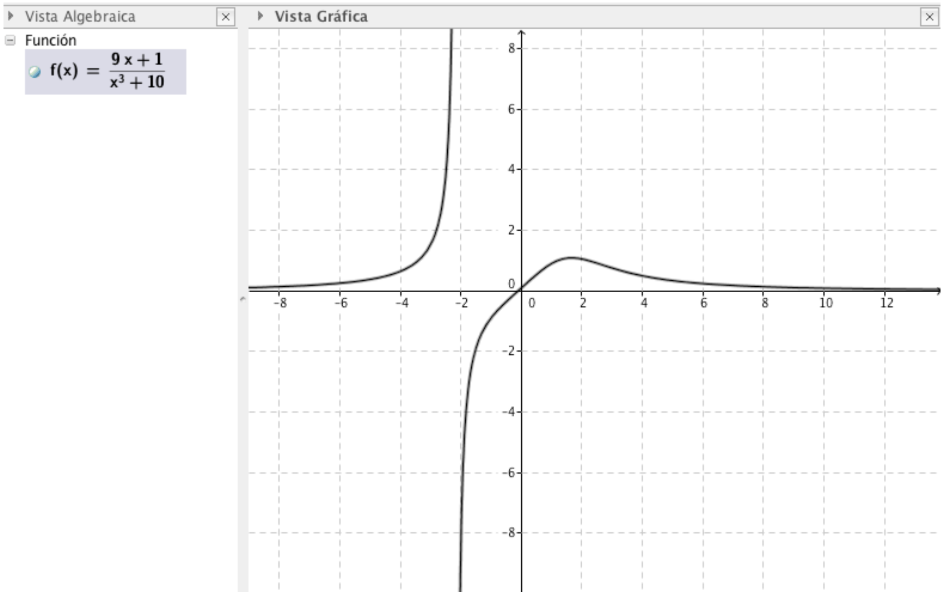
$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{x^3+10}$$

El mayor exponente es x^3, así que dividimos cada término entre él:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{x^3+10}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{9x}{x^3}+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^3}{x^3}+\frac{10}{x^3})}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{10}{x^3})}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x+1}{x^3+10}=0$$



Los siguientes resultados son muy útiles al aplicar el límite

Si x tiende a 0

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{c} = 0$ $\frac{0}{c} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{c}{x} = \infty$ $\frac{c}{0} = \infty$ (no existe el límite)

Si x tiende a ∞

$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0$ $\frac{c}{\infty} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{c} = \infty$ $\frac{\infty}{c} = \infty \nexists$

$\lim_{x \to \infty} c + x = 0$ $c + \infty = \infty \nexists$

$\lim_{x \to \infty} cx = \infty$ $c \cdot \infty = \infty \nexists$

Es importante recordar que ∞ no es un número, nos indica que la cantidad crece $(+\infty)$ o decrece $(-\infty)$ haciéndose cada vez más grande o más pequeña respectivamente.

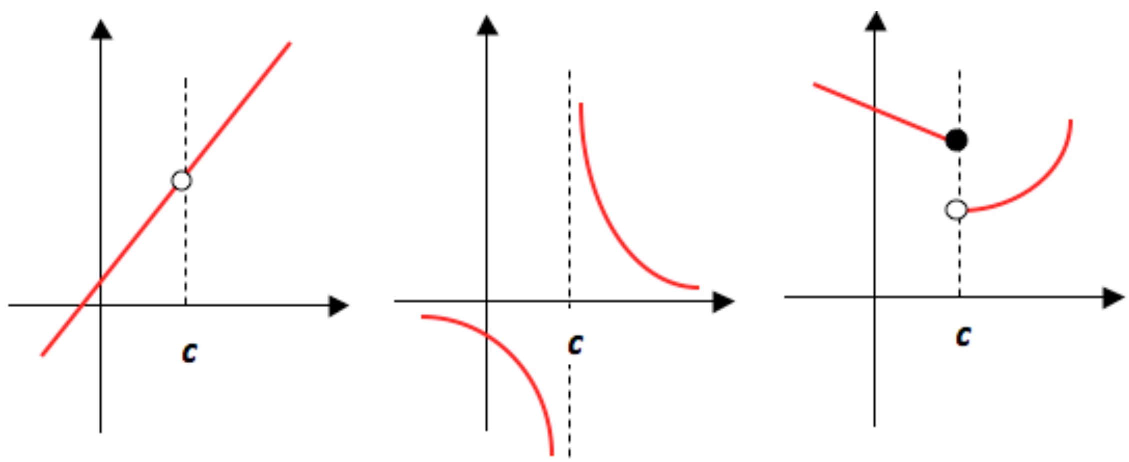
2.6. Continuidad de una función

La continuidad de una función se refiere a que su gráfica no sufra algún brinco o rompimiento, es decir, que pueda ser dibujada sin tener que despegar el lápiz del papel. La continuidad de una función se puede analizar en un punto o en un intervalo.

Continuidad en un punto

Se dice que una función es continua en un punto $x = c$, si su gráfica no se interrumpe en dicho punto.

Se muestran algunas gráficas que nos muestran la discontinuidad:



La continuidad puntual de una función queda definida cuando $x = c$ al cumplir las tres condiciones siguientes[1]

1. $f(c)\ est\acute{a}\ finida$
2. $\lim_{x \to c} f(x)\ s\acute{\imath}\ existe$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Si una de ella no existe, entonces se considera discontinua la función en c.

Dicho de otra forma, una función $f(x)$, se dice continua en un punto $x = a$, si el límite de la función en el punto a es igual al valor de la función en ese mismo punto, es decir, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Veamos el siguiente ejemplo de una función continua.

Determinaremos si la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es continua en $x = 1$.

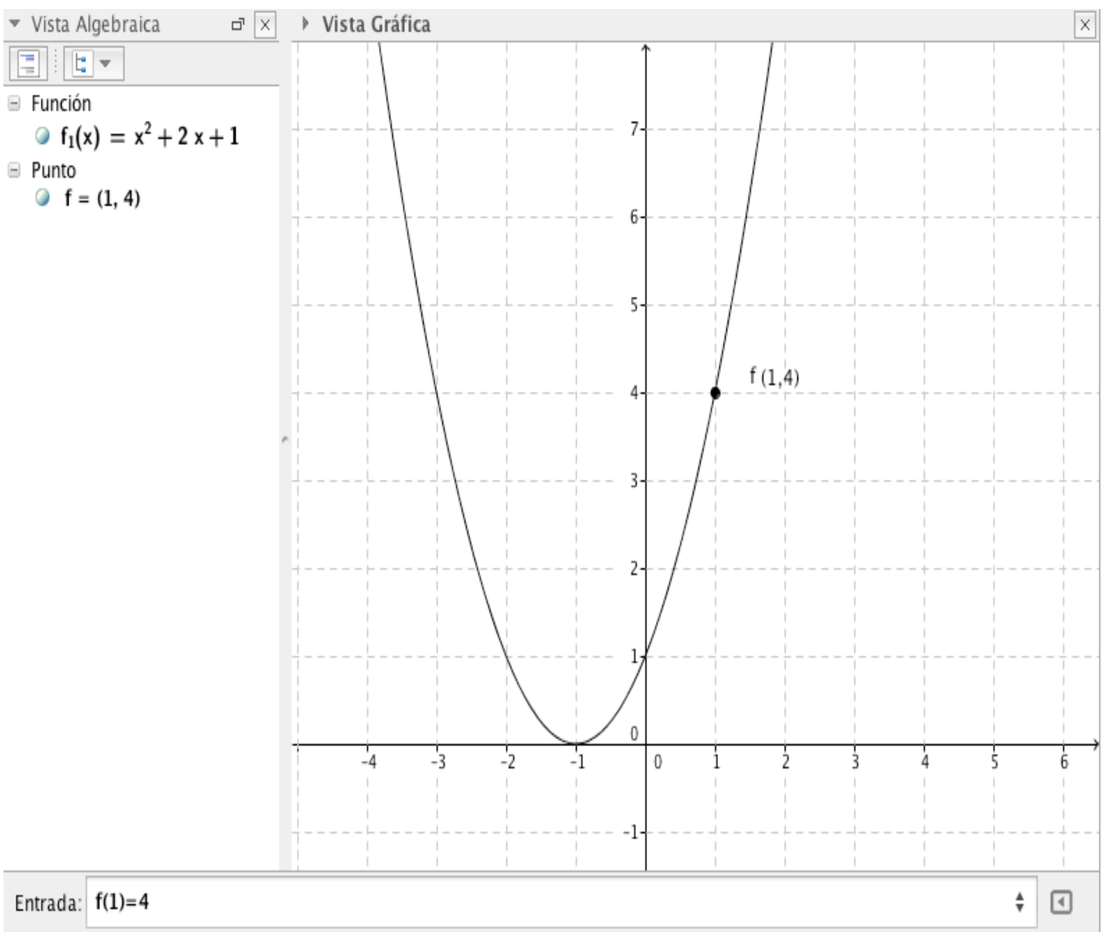
Aplicamos las tres condiciones para decidir si es continua dicha función:

1. $f(1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2x + 1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$

3. $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

Observamos que las tres condiciones se cumplen, por lo que la función si es continua en $x = 1$.

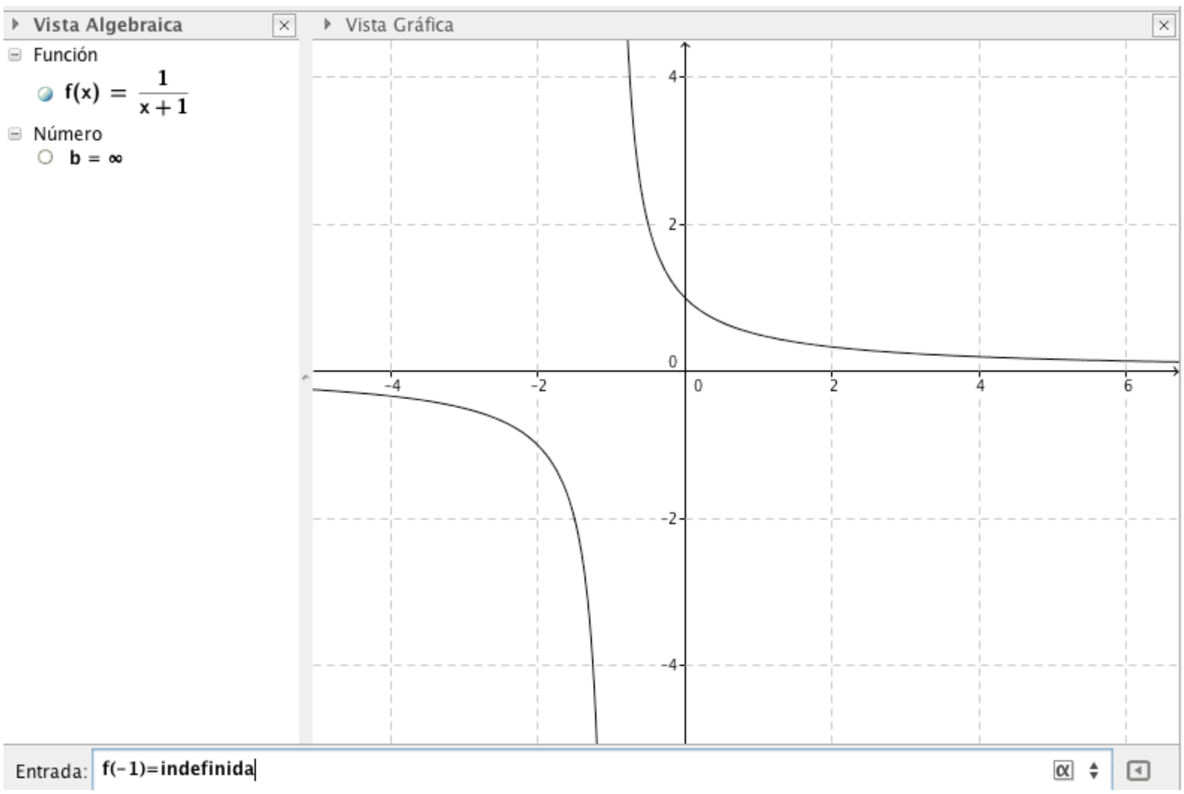


Ahora determinaremos si la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ es continua en $x = -1$.

$$f(-1) = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$$

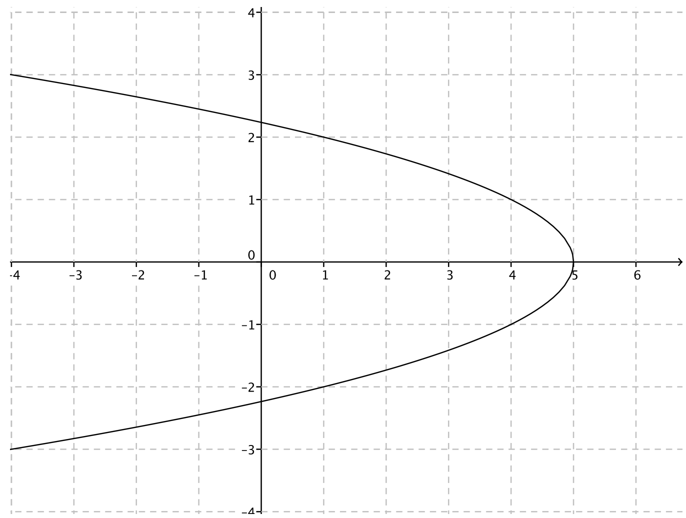
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$$

Observe que no se cumple la condición uno y dos, por lo que la función es discontinua en $x = -1$.



Si $f(x)=\sqrt{5-x}$, calcularemos $\lim_{x\to 5} f(x)$

La gráfica de $f(x)$ es la siguiente:



$\therefore \lim_{x\to 5^-} f(x)=0$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x)=\nexists$ de donde se deduce que

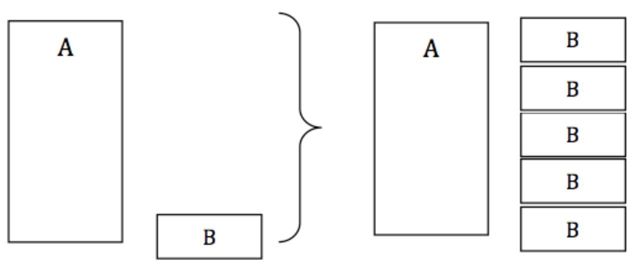
$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\nexists$

2.7. Razones de cambio

En la vida cotidiana es común la resolución de problemas a través de la comparación entre dos cantidades, con la finalidad de saber cuántas veces una cantidad contiene a la otra.

Desde el punto de vista matemático se dice que una **razón** es la comparación por cociente que se establece entre dos cantidades.[6]

Por ejemplo si un cuerpo A tiene una masa de 30 kilogramos y un cuerpo B tiene una masa de 6 kilogramos, se dice que la razón de sus masas es 30/6 (se lee "30 es a 6"). En otras palabras el cuerpo A contiene 5 veces la masa de B.

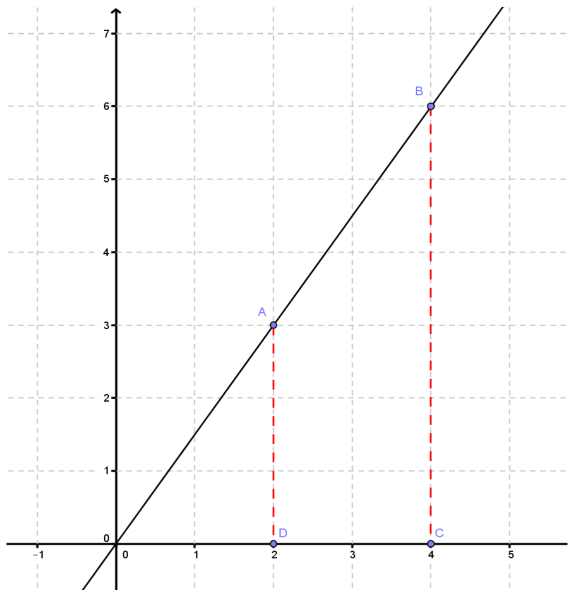


La razón de cambio entre dos cantidades es un valor que representa el cambio o variación de una cantidad respecto a la unidad de cambio de la otra. También se conoce como ***tasa de cambio*** o ***tasa de variación***.

Por ejemplo, la pendiente de una recta no vertical, se determina mediante la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Aquí la pendiente ***m*** representa la razón de cambio o variación de la variable ***y*** respecto a la variación de la variable ***x***. si m=3/2, esto nos indica que la ***y*** cambia **3** unidades en dirección vertical por cada ***2*** unidades que cambia ***x*** en dirección horizontal.

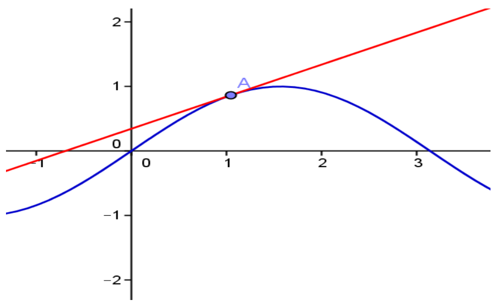


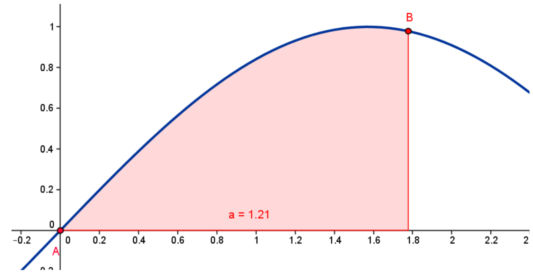
El objetivo principal del cálculo diferencial se enfoca a determinar con precisión la razón de cambio de una función respecto a su variable independiente.

El desarrollo del cálculo se remontan a la antigua Grecia, donde personajes como Leucipo, Demócrito y Antifón plantearon los siguientes problemas, determinar:[7]

- La recta tangente a una curva así como la pendiente a dicha recta.
- La velocidad instantánea de un cuerpo.
- El área bajo una curva.
- Los máximos y mínimos de una función.

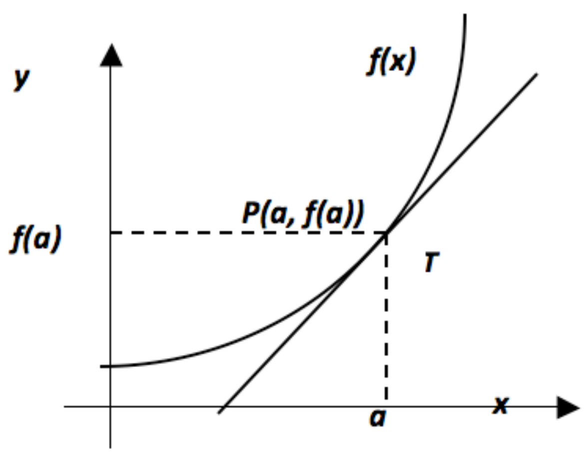
El problema de la recta tangente es objeto de estudio en el cálculo diferencial y el problema del área bajo una curva al cálculo integral.





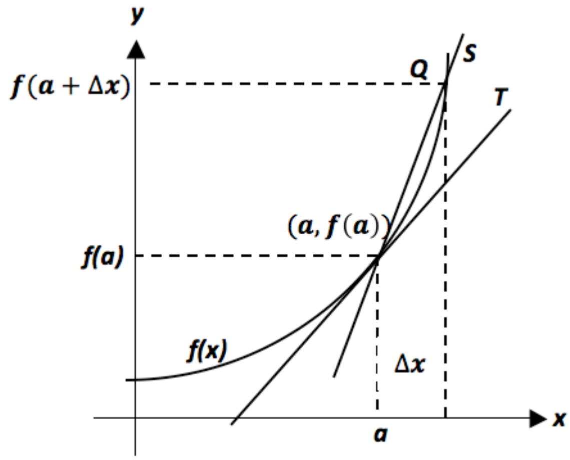
La recta tangente a una curva

Suponga que se tiene la curva de una función continua $y = f(x)$ y la recta tangente T en un punto P cuyas coordenadas son $(a, f(a))$. Para definir la ecuación de dicha recta se requiere conocer un punto y su pendiente. Las coordenadas de un punto están explícitas en el punto de tangencia por lo que solo se requiere determinar la pendiente de dicha recta.

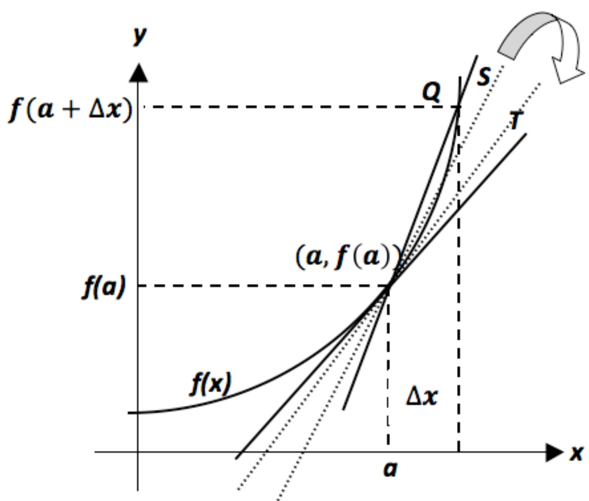


Para ello, se parte de una recta secante que pasa por los puntos P y otro punto cualquier Q de la gráfica cuyas coordenadas son $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, entonces la pendiente de la secante S, será:

$$m_{sec} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Si ahora el punto Q se acerca cada vez más hacia el punto P, haciendo que el incremento de la variable independiente, Δx , sea cada vez más pequeño, entonces la pendiente de la recta secante S, se aproxima a la pendiente de la recta tangente T.



Por tanto, se dice que la pendiente de la recta tangente a una curva de la función *f*, en el punto $P\ (a, f(a))$ es:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

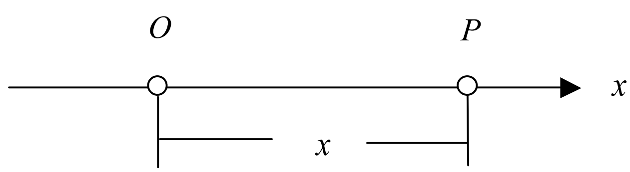
También conocida como *razón de cambio inst*antánea.

La velocidad instantánea, como razón de cambio

Otro caso que motivó la aparición del concepto de derivada está relacionado con el movimiento rectilíneo de partículas.

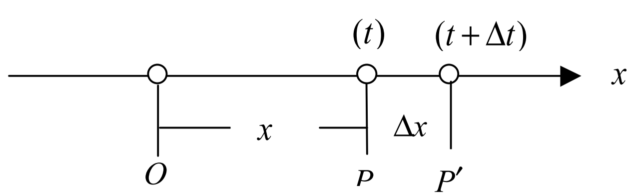
Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, ocupará una cierta posición en cualquier instante t.

La posición de la partícula P está definida partiendo de un origen fijo O sobre la línea recta y una dirección positiva a lo largo de la línea. Se mide la distancia x de O a P, la cual define completamente la posición de la partícula llamada coordenada de posición[8].



Cuando se conoce la coordenada de posición x de la partícula en todo valor del tiempo t, decimos que se conoce el movimiento de la partícula.

A partir de la posición P de la partícula en el tiempo t y la coordenada x tenemos una nueva posición P' en un tiempo $t+\Delta t$; la coordenada de la posición P' resulta de agregar un incremento Δx a la coordenada x de la posición P, por tanto, la velocidad promedio de la partícula en el intervalo de tiempo Δt queda definido como el cociente del desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt.



$$v_{promedio} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea v de la partícula en el instante t, resulta de la velocidad promedio a partir de intervalos de tiempo Δt y desplazamientos Δx cada vez más pequeños.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

El problema de la recta tangente y la velocidad instantánea tienen un mismo límite como solución y expresa una razón de cambio instantánea.

2.8. Derivada

La derivada de una función se define como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente, cuando dicho incremento tiende a cero.[9]

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A partir de esta definición podemos obtener la derivada (o razón de cambio instantánea) de una función considerando lo que se conoce como ***la regla de los cuatro pasos***.

- Obtener la función incrementada.
- Obtener el incremento de la función.
- Obtener la razón de incrementos
- Obtener el límite cuando Δx tiende a cero.

De manera simbólica se tiene:

1. $f(x) \quad y \quad f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x * \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4. $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Formas de representar una derivada

Existen diferentes símbolos para representar la derivada de una función, los más comunes que se pueden encontrar en los textos son:

$$\boldsymbol{f'(x)},\quad \boldsymbol{\frac{dy}{dx}},\quad \boldsymbol{y'},\quad \boldsymbol{\dot{y}},\quad \boldsymbol{D_x y},\quad \boldsymbol{Dy}$$

Veamos los siguientes ejemplos para visualizar el procedimiento derivativo mediante estos cuatro pasos.

Ejemplo 1. Encontrar la derivada de $y = 2x^2$.

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 2x^2$$

$$\Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 2x^2$$

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2\Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4x$$

Ejemplo 2. Encontrar la derivada de $y = 2x + 5x^2$.

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x) + 5(x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x) + 5(x + \Delta x)^2 - 2x - 5x^2$$

$$\Delta y = 2x + 2\Delta x + 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 2x - 5x^2$$

$$\Delta y = 2\Delta x + 10x\Delta x + 5\Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\Delta x+10x\Delta x+5\Delta x^{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+10x+5\Delta x$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2+10x+5\Delta x\right)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=2+10x$$

Ejemplo 3. Obtener la derivada de $y=\sqrt{5x}$.

$$y+\Delta y=\sqrt{5}\left(x+\Delta x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta y=\sqrt{5}\left(x+\Delta x\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{5}\sqrt{x}$$

$$\Delta y=\sqrt{5}\left(\left(x+\Delta x\right)^{\frac{1}{2}}-(x)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Delta y=\sqrt{5}\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x+\Delta x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x+\Delta x^{\frac{1}{2}}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\Delta x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{5}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\Delta x^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 4. Hallar la derivada de $y = x^3 + 3x$.

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^{3}+3(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{3}+3(x+\Delta x)-x^{3}-3x$$

$$\Delta y=(x^{3}+3x^{2}\Delta x+3x\Delta x^{2}+\Delta x^{3})+3(x+\Delta x)-x^{3}-3x$$

$$\Delta y=x^{3}+3x^{2}\Delta x+3x\Delta x^{2}+\Delta x^{3}+3x+3\Delta x-x^{3}-3x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3+3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2+3$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2+3\right)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=3x^2+3$$

Ejemplo 5. Hallar la derivada de y = sen x.

$$y+\Delta y=sen\left(x+\Delta x\right)$$

$$\Delta y=sen\left(x+\Delta x\right)-sen\,x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{sen\left(x+\Delta x\right)-sen\,x}{\Delta x}$$

Aplicando una relación trigonométrica para la suma de ángulos tenemos:

$$sen\left(x+\Delta x\right)=sen\,x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot sen\,\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{sen\,x\cdot\cos\Delta x+\cos x\cdot sen\,\Delta x-sen\,x}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x\to 0$ y recordando:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{sen\,\Delta x}{\Delta x}\right)=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{sen\,x\cdot\cos\Delta x}{\Delta x}+\frac{\cos x\cdot sen\,\Delta x}{\Delta x}-\frac{sen\,x}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\infty+\cos x\left(1\right)-\infty$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cos x$$

Este procedimiento tiene la desventaja de ser algo laborioso por lo que se han desarrollado fórmulas que nos permiten obtener la derivada de manera más práctica.

Estas formulas se clasifican, de acuerdo al tipo de funciones a derivar, en dos grandes categorías: para funciones algebraicas y para funciones trascendentes.

Fórmulas para derivar funciones algebraicas

Se recomienda memorizar las fórmulas, así como poder enunciarlas verbalmente. La demostración de estas fórmulas se deja como reto para el estudiante.

Para estas fórmulas, se considera a $u, v\ y\ w$ como funciones derivables de x, mientras que c como una constante.[4]

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}cv = c\,\frac{dv}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

5a. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

6. $\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

7a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx},\ \ siendo\ y\ función\ de\ v.$

A continuación se enuncian cada una de estas fórmulas.[4]

1. La derivada de una constante es cero. $\frac{d}{dx}c = 0$

Ejemplo 6. Determinar la derivada de $y = 8$.

$y' = 0$

Ejemplo 7. Determinar la derivada de $y = e$.

$y' = 0$

Ejemplo 8. Determinar la derivada de $y = \sqrt{5}$.

$y' = 0$

2. La derivada de una variable respecto a sí misma es uno.

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Ejemplo 9. Determinar la derivada de $y = s$.

$$y' = \frac{ds}{ds} = 1$$

Ejemplo 10. Determinar la derivada de $y = \theta$.

$$y' = \frac{d\theta}{d\theta} = 1$$

Ejemplo 11. Determinar la derivada de $y = t$.

$$y' = \frac{dt}{dt} = 1$$

3. La derivada de una suma de un número finito de n funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Ejemplo 12. Determinar la derivada de $y = x + 2$.

$$y' = \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}2 = 1 + 0 = 1$$

Ejemplo 13. Determinar la derivada de $y = 10 - x$.

$$y' = \frac{d}{dx}10 - \frac{d}{dx}x = 0 - 1 = -1$$

4. La derivada del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}cv = c\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 14. Determinar la derivada de $y = 20x$.

$$y' = 20\frac{d}{dx}x = 20(1) = 20$$

Ejemplo 15. Determinar la derivada de $y = -35x + 7$.

$$y' = \frac{d}{dx}(-35x) + \frac{d}{dx}7 = -35\frac{d}{dx}x + 0 = -35(1) = -35$$

5. La derivada de una potencia de exponente constante, es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Si $v = x$ entonces la fórmula se simplifica de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Ejemplo 16. Determinar la derivada de $y = x^{10}$.

$y' = 10x^{10-1} = 10x^9$

Ejemplo 17. Determinar la derivada de $y = -5x^6$.

$$y' = -5\frac{d}{dx}x^6 = -5(6x^{6-1}) = -30x^5$$

Ejemplo 18. Determinar la derivada de $y = x^{\frac{2}{3}}$.

$$y' = \left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} = \left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

Ejemplo 19. Determinar la derivada de $y = \sqrt{x}$.

Primeramente escribir el radical en forma de exponente fraccionario, esto es:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Ahora aplicando la fórmula

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 20. Determinar la derivada de $y = (10x - 2)^6$.

Sea $v = 10x - 2 \quad y \;\; n = 6$

$$y' = 6(10x-2)^{6-1}\frac{d}{dx}(10x-2) = 6(10x-2)^5(10-0) = 60(10x-2)^5$$

Ejemplo 21. Determinar la derivada de $y = (x^3 - 15x + 1)^2$.

Sea $v = x^3 - 15x + 1 \quad y \;\; n = 2$

$$y' = 2(x^3 - 15x + 1)^{2-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 - 15x + 1) = 2(x^3 - 15x + 1)(3x^2 - 15 + 0) =$$

$$y' = 2(x^3 - 15x + 1)(3x^2 - 15)$$

factorizando

$$y' = 2(x^3 - 15x + 1)3(x^2 - 5)$$

$$y' = 6(x^3 - 15x + 1)(x^2 - 5)$$

6. La derivada de un producto de dos funciones, es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}uv = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 22. Determinar la derivada de $y = \left(\sqrt{x}\right)(x^2+3)$.

Aplicando la fórmula con $u = \sqrt{x}$ y $v = (x^2+3)$

$$y' = \sqrt{x}\frac{d}{dx}(x^2+3) + (x^2+3)\frac{d}{dx}x^{1/2}$$

$$y' = \sqrt{x}(2x) + (x^2+3)(1/2)x^{-1/2}$$

$$y' = 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2+3)}{2x^{1/2}}$$

$$y' = 2x\sqrt{x} + \frac{(x^2+3)}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 23. Determinar la derivada de $y = \left(\sqrt{3x-1}\right)(\sqrt[3]{x})$.

Aplicando la fórmula con $u = \sqrt{3x-1}$ y $v = \sqrt[3]{x}$ tenemos que

$$y' = \sqrt{3x-1}\frac{d}{dx}x^{1/3} + \sqrt[3]{x}\frac{d}{dx}(3x-1)^{1/2}$$

$$y' = (\sqrt{3x-1})\left(\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{2}\right)(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x-1)$$

$$y' = \frac{\sqrt{3x-1}}{3x^{2/3}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2(3x-1)^{1/2}} \cdot (3)$$

$$y' = \frac{\sqrt{3x-1}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{3x-1}}$$

7. La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Cuando $v = c$ la fórmula se simplifica como sigue:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{c \cdot \frac{du}{dx} - u\frac{dc}{dx}}{c^2} = \frac{c \cdot \frac{du}{dx}}{c^2} = \frac{\frac{du}{dx}}{c} = \frac{1}{c}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 24. Determinar la derivada de $y = (3x + 1)/(x + 5)$.

Aplicaremos la fórmula considerando $u = 3x + 1 \;\; y \;\; v = x + 5$

$$y' = \frac{(x+5) \cdot \frac{d}{dx}(3x+1) - (3x+1) \cdot \frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2}$$

$$y' = \frac{(x+5)(3) - (3x+1)(1)}{(x+5)^2}$$

$$y' = \frac{3x + 15 - 3x - 1}{(x+5)^2} = \frac{14}{(x+5)^2}$$

Ejemplo 25. Determinar la derivada de $y = \sqrt{10 + x^2}/6x$.

Considerar $u = \sqrt{10 + x^2} \;\; y \;\; v = 6x$ así que según la fórmula.

$$y' = \frac{(6x)\frac{d}{dx}(10+x^2)^{1/2} - \sqrt{10+x^2}\frac{d}{dx}6x}{(6x)^2}$$

$$y' = \frac{(6x)\left(\frac{1}{2}\right)(10+x^2)^{-1/2} - \sqrt{10+x^2}(6)}{36x^2} = \frac{\frac{6x}{2(10+x^2)^{1/2}} - 6\sqrt{10+x^2}}{36x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{3x}{\sqrt{10+x^2}} - 6\sqrt{10+x^2}}{36x^2} = \frac{\frac{3x-6(10+x^2)}{\sqrt{10+x^2}}}{36x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{3x-60-6x^2}{\sqrt{10+x^2}}}{36x^2} = \frac{3x - 60 - 6x^2}{36x^2\sqrt{10+x^2}}$$

$$y' = \frac{3(x - 20 - 2x^2)}{36x^2\sqrt{10+x^2}} = \frac{x - 20 - 2x^2}{12x^2\sqrt{10+x^2}}$$

Regla de la cadena

Esta regla permite calcular la derivada de una función de función.

Sea y una función que puede ser derivable respecto de u y esta a su vez derivable respecto a **x**, entonces **y** es derivable con respecto a **x**.[10] Esto es:

$$y'(x) = g'(u) \cdot h(x)$$

8. Si $y = g(u)$ y $u = h(x)$, la derivada de y con respecto de x, es igual al producto de la derivada de y con respecto a u, por la derivada de u con respecto a x.

Según la notación de Leibniz,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 26. Determinar la derivada ${}^{dy}/_{dx}$, dadas las funciones

$y = u^4 \quad u = 5\sqrt{x}.$

Determinamos primeramente las derivadas,

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}u^4 = 4u^3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}5\sqrt{x} = 5\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Finalmente aplicamos la fórmula de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4u^3)\left(\frac{5}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{10u^3}{\sqrt{x}}$$

Ejemplo 27. Determinar la derivada ${}^{dy}/_{dx}$, dadas las funciones

$y = 2u^2 \quad u = (5x^2 - 3x).$

Determinamos primeramente las derivadas,

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(2u^2) = 4u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^2 - 3x) = 10x - 3$$

Por la tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4u)(10x - 3)$$

Derivadas de funciones implícitas

Para obtener la derivada de una función implícita, se procede a derivar término a término, considerando a y como una función de x y luego despejar de la ecuación obtenida el término ${dy}/{dx}$.[1]

Ejemplo 28. Hallar la derivada de la siguiente función: $3x^4 + 5x^3y + xy^5 = 0$.

Procedemos a derivar término a término

$$\frac{d}{dx}(3x^4) + \frac{d}{dx}(5x^3y) + \frac{d}{dx}(xy^5) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$12x^3 + 5\left[x^3\frac{dy}{dx} + y(3x^2)\right] + \left[x\left(5y^4\frac{dy}{dx}\right) + y^5\right] = 0$$

$$12x^3 + 5x^3\frac{dy}{dx} + 15x^2y + 5xy^4\frac{dy}{dx} + y^5 = 0$$

Factorizamos el término de la derivada,

$$\frac{dy}{dx}(5x^3 + 5xy^4) + 12b^3 + 15x^2y + y^5 = 0$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx}(5x^3 + 5xy^4) = -12b^3 - 15x^2y - y^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{= -12b^3 - 15x^2y - y^5}{5x^3 + 5xy^4}$$

Se hace notar que el resultado de la derivada obtenida, queda en términos tanto de x como de y.

Ejemplo 29. Hallar la derivada de la siguiente función de la circunferencia con centro en el origen: $x^2 + y^2 = r^2$.

Derivando término a término

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}r^2$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando el término de la derivada

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 30. Hallar la derivada de la siguiente función $4x^2 + xy - x = 2y^2$.

Derivando término a término

$$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(2y^2)$$

$$4(2x) + \left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right] - 1 = 2\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$8x + x\frac{dy}{dx} + y - 1 = 4y\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} = 1 - 8x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 4y) = 1 - 8x - y$$

Finalmente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 8x - y}{x - 4y}$$

Fórmulas para derivar funciones trascendentes

Ahora se verá otra lista de fórmulas para derivar funciones trascendentes, tales como las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.[4]

9. $\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$

10. $\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log v}{v}\frac{dv}{dx}$

11. $\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$

13. $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}(sen\ v) = \cos v \frac{dv}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}(\cos v) = -sen\ v \frac{dv}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}(\tan v) = sec^2 v \frac{dv}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}(ctg\ v) = -csc^2 v \frac{dv}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \cdot \tan v \frac{dv}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cdot \mathrm{ctg}\, v \frac{dv}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}(arc\ sen\ v) = \frac{dv/dx}{\sqrt{1-v^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(arc\ cos\ v) = -\frac{dv/dx}{\sqrt{1-v^2}}$

22. $\frac{d}{dx}(arc \tan v) = \frac{dv/dx}{1+v^2}$

23. $\frac{d}{dx}(arc\, \mathrm{ctg}\, v) = -\frac{dv/dx}{1+v^2}$

24. $\frac{d}{dx}(arc \sec v) = \frac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}}$

25. $\frac{d}{dx}(arc \csc v) = -\frac{dv/dx}{v\sqrt{v^2-1}}$

Recordemos que, el logaritmo de un número **N**, en una base dada **b**, es el exponente **x**, al cual se eleva la base para obtener dicho número[1].

$\log_b N = x$; es decir, $b^x = N$

Los logaritmos naturales tienen como base el número e: $\ln N$

Los logaritmos vulgares tienen como base el número 10: $\log N$

El logaritmo de base 10 de un número, se obtiene del producto de su logaritmo natural por la constante $\log e$, es decir:

$\log N = \log e \cdot \ln N$

9. La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función.

$$\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

Dado que $\log v = \log e \cdot \ln v$

10. La derivada del logaritmo decimal de una función, es igual a la derivada de la función multiplicada por el cociente del logaritmo decimal de e entre la función.

$$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 31. Derivar $y = \ln 2x$.

Considerando como $v = 2x$ aplicamos la fórmula

$$y' = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 31. Derivar $y = \ln 2x$.

Considerando como $v = 2x$ aplicamos la fórmula

$$y' = \frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

Ejemplo 32. Derivar $y = \ln x^4$.

Considerando como $v = x^4$ aplicamos la fórmula

$$y' = \frac{1}{x^4}\frac{d}{dx}(x^4) = \frac{1}{x^4}(4x^3) = \frac{4}{x}$$

Ejemplo 33. Derivar $y = \ln(5x^3 - 10x + 5)$.

Para aplicar directamente la fórmula considerar $v = 5x^3 - 10x + 5$

$$y' = \frac{1}{(5x^3 - 10x + 5)}\frac{d}{dx}(5x^3 - 10x + 5)$$

$$y' = \frac{1}{(5x^3 - 10x + 5)} \cdot (15x^2 - 10)$$

$$y' = \frac{15x^2 - 10}{5x^3 - 10x + 5} = \frac{5(3x^2 - 2)}{5(x^3 - 2x + 1)}$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 1}$$

Ejemplo 34. Derivar $y = \log\ (x + 1)$.

Considerando $v = x + 1$ aplicamos la fórmula 10

$$y' = \frac{\log e}{x+1} \cdot \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$y' = \frac{\log e}{x+1} \cdot (1+0)$$

$$y' = \frac{\log e}{x+1}$$

En ocasiones, cuando se derivan funciones logarítmicas es muy útil hacer uso de las leyes de los logaritmos, antes de aplicar directamente las fórmulas.

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln a^n = n \ln a$

$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$ en general $log_a\, a = 1$

Ejemplo 35. Derivar $y = \ln \sqrt{x - x^3}$.

Se puede expresar la función en forma exponencial

$y = \ln(x - x^3)^{1/2}$

Y aplicar leyes de los logaritmos

$$y = \frac{1}{2}\ln(x - x^3)$$

Aplicamos la fórmula de derivación

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x - x^3)} \cdot \frac{d}{dx}(x - x^3)$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x - x^3)} \cdot (1 - 3x^2)$$

$$y' = \frac{1-3x^2}{2(x-x^3)}$$

Ejemplo 36. Derivar $y = \ln\frac{3x+1}{x-1}$.

Dado que la función es un cociente

$$y = \ln\frac{3x+1}{x-1}$$

Aplicamos leyes de los logaritmos

$$y = \ln(3x+1) - \ln(x-1)$$

Y procedemos a derivar

$$y' = \frac{1}{3x+1}\cdot\frac{d}{dx}(3x+1) - \frac{1}{x-1}\cdot\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$y' = \frac{1}{3x+1}\cdot(3) - \frac{1}{x-1}\cdot(1)$$

$$y' = \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x-1}$$

11 y 12. La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto del logaritmo natural de la constante por la constante elevada al exponente variable por la derivada del exponente.

$$\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a\frac{dv}{dx}$$

En caso de que $a = e$ resulta que al aplicar logaritmos $\ln a = \ln e$ y recordando que $\ln e = 1$, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 37. Derivar $y = a^{2x}$.

Para aplicar la fórmula considerar $v = 2x$

$y' = a^{2x} \ln a \dfrac{d}{dx}(2x)$

$y' = a^{2x} \ln a \ (2)$

$y' = 2\, a^{2x} \ln a$

Ejemplo 38. Derivar $y = 3^x$.

Considerando $v = x$

$y' = 3^x \ln 3 \dfrac{d}{dx} x$

$y' = 3^x \cdot \ln 3$

Ejemplo 39. Derivar $y = e^x$.

Para aplicar la fórmula considerar $v = x$

$y' = e^x \dfrac{d}{dx} x$

$y' = e^x$

Esta función tiene la particularidad de que su derivada es igual a la función misma.

Ejemplo 40. Derivar $y = e^{6x}$.

En este caso $v = 6x$

$y' = e^{6x} \dfrac{d}{dx}(6x)$

$y' = e^{6x}(6)$

$y' = 6\, e^{6x}$

13. La derivada de una función con un exponente variable, es igual a la suma de los dos resultados que se obtienen derivando en primer lugar según fórmula 5, considerando el exponente como constante, y después derivar según fórmula 11, considerando la función constante.

$$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 41. Derivar $y = x^{2x}$.

Aplicando la fórmula, considerar $u = x \;\; y \;\; v = 2x$

$$y' = 2x \cdot x^{2x-1} \cdot \frac{d}{dx}x + \ln x \cdot x^{2x} \cdot \frac{d}{dx}2x$$

$$y' = 2x \cdot x^{2x-1} + \ln x \cdot x^{2x} \cdot (2)$$

$$y' = 2x \cdot x^{2x} \cdot x^{-1} + 2\ln x \cdot x^{2x}$$

$$y' = 2x^{2x} + 2x^{2x} \cdot \ln x$$

Factorizando

$$y' = 2x^{2x}(1 + \ln x)$$

Otra alternativa de solución es a través de logaritmos.

Aplicamos logaritmos naturales en ambos miembros de la función

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

Bajamos el exponente

$$\ln y = 2x \ln x$$

Derivamos en forma implícita

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(2x \ln x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2\left[x\cdot\frac{d}{dx}\ln x+\ln x\cdot\frac{d}{dx}x\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=2y\left[x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\right]=2y(1+\ln x)$$

Como $y=x^{2x}$

$$y'=2x^{2x}(1+\ln x)$$

Mismo resultado que se obtuvo con la aplicación directa de la fórmula 13

Ejemplo 42. Derivar la función $y=x^{\sqrt{2x}}$.

Aplicando la fórmula 13: $\frac{d}{dx}(u^v)=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+\ln u\cdot u^v\frac{dv}{dx}$

Se debe considerar$u=x \quad v=\sqrt{2x}$

$$y'=\sqrt{2x}\left(x^{\sqrt{2x}-1}\right)\frac{d}{dx}x+\ln x\cdot x^{\sqrt{2x}}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{2x}$$

$$y'=\sqrt{2x}\cdot x^{\sqrt{2x}}\cdot x^{-1}+x^{\sqrt{2x}}\cdot\ln x\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)$$

$$y'=\frac{\sqrt{2x}}{x}\cdot x^{\sqrt{2x}}+x^{\sqrt{2x}}\cdot\frac{\ln x}{\sqrt{2x}}$$

$$y'=x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}+\frac{\ln x}{\sqrt{2x}}\right)$$

Este resultado puede simplificarse llevando a cabo algunas operaciones algebraicas

$$y'=x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{2x+x\ln x}{x\sqrt{2x}}\right)=x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{x(2+\ln x)}{x\sqrt{2x}}\right)=x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{2+\ln x}{\sqrt{2x}}\right)$$

$$y'=x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{2+\ln x}{\sqrt{2x}}\right)$$

Solución alterna:

Como en el ejemplo anterior, podemos utilizar logaritmos antes de derivar.

$y = x^{\sqrt{2x}}$

$\ln y = \ln x^{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} \cdot \ln x$

Derivando ambos miembros

$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x} \cdot \ln x\right)$

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{2x}\frac{d}{dx}\ln x + \ln x \frac{d}{dx}\sqrt{2x}$

$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{2x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\sqrt{2x}}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{2x}}\right)$

Como $y = x^{\sqrt{2x}}$

$y' = x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{2x}}\right)$

Como ya se vio, el resultado simplificado es

$y' = x^{\sqrt{2x}}\left(\frac{2 + \ln x}{\sqrt{2x}}\right)$

14. La derivada del seno de una función, es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

$\frac{d}{dx}(sen\ v) = \cos v \frac{dv}{dx}$

Ejemplo 43. Encontrar la derivada de $y = sen\ (10x)$.

Sea $v = 10x$

$y' = \cos(10x)\frac{d}{dx}10x$

$y' = \cos(10x) \cdot 10$

$y' = 10 \cos\ (10x)$

Ejemplo 44. Encontrar la derivada de $y = sen\ (-3x^2)$.

Sea $v = -3x^2$

$$y' = \cos(-3x^2)\frac{d}{dx}(-3x^2)$$

$$y' = \cos(-3x^2)(-6x)$$

$$y' = -6x\cos(-3x^2)$$

Ejemplo 45. Encontrar la derivada de $y = sen\ (e^x)$.

Sea $v = e^x$

$$y' = \cos e^x \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$y' = \cos e^x\ (e^x)$$

$$y' = e^x\cos(e^x)$$

Ejemplo 46. Encontrar la derivada de $y = sen^3(5x)$.

Antes de resolver la derivada, es conveniente aclarar que

$sen^3(5x) \neq sen\ (5x)^3$

Por otro lado,

$sen^3(5x) = [sen\ (5x)]^3$

Por lo que al derivar la función, tenemos que

$$y' = \frac{d}{dx}sen^3(5\square) = \frac{d}{dx}[sen\ (5x)]^3$$

$$y' = 3[sen\ (5x)]^{3-1}\frac{d}{dx}sen\ (5x)$$

$$y' = 3[sen\ (5x)]^2[5\ cos\ (5x)]$$

Finalmente nos queda

$y' = 15\, sen^2(5x)\cos(5x)$

15. La derivada del coseno de una función, es igual a menos seno de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\cos v) = -sen\, v \frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 47. Encontrar la derivada de $y = cos\,(20x^4)$.

Sea $v = 20x^4$

$y' = -sen\,(20x^4)\frac{d}{dx}(20x^4)$

$y' == -sen\,(20x^4)(80x^3)$

$y' = -80x^3\, s\square n\,(20x^4)$

Ejemplo 48. Encontrar la derivada de $y = cos^5(4x)$.

Dado que

$y = cos^5(4x) = [\cos(4x)]^5$

Procedemos a derivar

$y' = \frac{d}{dx}[\cos(4x)]^5$

$y' = 5[\cos(4x)]^{5-1}\frac{d}{dx}[\cos(4x)]$

$y' = 5[\cos(4x)]^4[-4\, sen\,(4x)]$

$y' = -20\, cos^4(4x)(sen(\,4x))$

Ejemplo 49. Encontrar la derivada de $y = \frac{1}{2}cos^2(x)$.

Dado que

$$y = \frac{1}{2}cos^2(x) = \frac{1}{2}[\cos x]^2$$

Derivando

$$y' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\cos x]^2$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \frac{d}{dx}\cos x$$

$$y' = \cos x \cdot (-sen\ x)$$

$$y' = -\cos x\ sen\ x$$

16. La derivada de la tangente de una función, es igual al cuadrado de la secante de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\tan v) = sec^2 v\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 50. Encontrar la derivada de $y = \tan(x^2 - 2)$.

Sea $v = x^2 - 2$

$$y' = sec^2(x^2 - 2)\frac{d}{dx}(x^2 - 2)$$

$$y' = sec^2(x^2 - 2)(2x)$$

$$y' = 2x\ sec^2(x^2 - 2)$$

Ejemplo 51. Encontrar la derivada de $y = \tan(\ln x)$.

Sea $v = \ln x$

$$y' = sec^2(\ln x)\frac{d}{dx}\ln x$$

$$y' = sec^2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \frac{\ln x \cdot sec^2(\ln x)}{x}$$

17. La derivada de la cotangente de una función, es igual a menos el cuadrado de la cosecante de la función por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(\cot v) = -csc^2 v\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 52. Encontrar la derivada de $y = \cot\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = -\csc x^3 \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$y' = -\csc x^3\ (3x^2)$$

$$y' = -3x^2 \csc x^3$$

18. La derivada de la secante de una función, es igual al producto de la secante de la función por la tangente de la función y por la función misma.

$$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \cdot \tan v\frac{dv}{dx}$$

Ejemplo 53. Encontrar la derivada de $y = \sec e^{2x}$.

Sea $v = e^{2x}$

$y' = \sec e^{2x} \cdot \tan e^{2x} \cdot \dfrac{d}{dx} e^{2x}$

$y' = \sec e^{2x} \cdot \tan e^{2x}\, (e^{2x})(2)$

$y' = 2\, e^{2x} \sec e^{2x} \tan e^{2x}$

19. La derivada de la cosecante de una función, es igual al producto de menos cosecante de la función por la tangente de la función y por la función misma.

$\dfrac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \cdot \text{ctg}\, v \dfrac{dv}{dx}$

Ejemplo 54. Encontrar la derivada de $y = \csc e^{2x}$.

Sea $v = e^{2x}$

$y' = -\csc e^{2x} \cdot \cot e^{2x} \cdot \dfrac{d}{dx} e^{2x}$

$y' = -\csc e^{2x} \cdot \cot e^{2x}\, (e^{2x})(2)$

$y' = -2\, e^{2x} \csc e^{2x} \cot e^{2x}$

20. La **derivada del arco seno** de una función es igual al cociente de la derivada de la función entre la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de la función.

$\dfrac{d}{dx}(arc\ sen\ v) = \dfrac{dv/dx}{\sqrt{1 - v^2}}$

Ejemplo 55. Hallar la derivada de $y = arc\ sen\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(9x)}{\sqrt{1-(9x)^2}}$$

$$y' = \frac{9}{\sqrt{1-81x^2}}$$

Ejemplo 56. Hallar la derivada de $y = arc\ sen\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$

$$y' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

21. La **derivada del arco coseno** de una función, es igual al cociente negativo de la derivada de la función entre la raíz cuadrada de uno menos el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}(arc\ cos\ v) = -\frac{dv/dx}{\sqrt{1-v^2}}$$

Ejemplo 57. Hallar la derivada de $y = arc\ cos\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(9x)}{\sqrt{1-(9x)^2}}$$

$$y' = -\frac{9}{\sqrt{1-81x^2}}$$

Ejemplo 58**.** Hallar la derivada de $y = arc\ cos\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$

$$y' = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

22. La **derivada del arco tangente** de una función, es igual al cociente de la derivada de la función entre uno más el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}(arc\tan v) = \frac{{dv}/{dx}}{1+v^2}$$

Ejemplo 59. Hallar la derivada de $y = arc\ tan\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(9x)}{1+(9x)^2}$$

$$y' = \frac{9}{1+81x^2}$$

Ejemplo 60. Hallar la derivada de $y = arc\ tan\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{1+(x^3)^2}$$

$$y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

23. La **derivada del arco cotangente** de una función, es igual al cociente negativo de la derivada de la función entre uno más el cuadrado de la función.

$$\frac{d}{dx}(arc\,\mathrm{ctg}\,v) = -\frac{dv/_{dx}}{1+v^2}$$

Ejemplo 61. Hallar la derivada de $y = arc\ cot\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(9x)}{1+(9x)^2}$$

$$y' = -\frac{9}{1+81x^2}$$

Ejemplo 62. Hallar la derivada de $y = arc\ cot\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{1+(x^3)^2}$$

$$y' = -\frac{3x^2}{1+x^6}$$

24. La **derivada del arco secante** de una función, es igual al cociente de la derivada de la función entre el producto de la función, multiplicada por la raíz cuadrada del cuadrado de la función menos uno.

$$\frac{d}{dx}(arc\,\sec v) = \frac{dv/_{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}$$

Ejemplo 63. Hallar la derivada de $y = arc\ sec\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(9x)}{9x\sqrt{(9x)^2 - 1}}$$

$$y' = \frac{9}{9x\sqrt{81x^2 - 1}}$$

Ejemplo 64. Hallar la derivada de $y = arc\ sec\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{x^3\sqrt{(x^3)^2 - 1}}$$

$$y' = \frac{3x^2}{x^3\sqrt{x^6 - 1}}$$

25. La **derivada del arco cosecante** de una función, es igual al cociente negativo de la derivada de la función entre el producto de la función multiplicada por la raíz cuadrada del cuadrado de la función menos uno.

$$\frac{d}{dx}(arc \csc v) = -\frac{dv/dx}{v\sqrt{v^2 - 1}}$$

Ejemplo 65. Hallar la derivada de $y = arc\ csc\ (9x)$.

Sea $v = 9x$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(9x)}{9x\sqrt{(9x)^2 - 1}}$$

$$y' = -\frac{9}{9x\sqrt{81x^2 - 1}}$$

Ejemplo 66. Hallar la derivada de $y = arc\ csc\ (x^3)$.

Sea $v = x^3$

$$y' = -\frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\square^3\sqrt{(x^3)^2 - 1}}$$

$$y' = -\frac{3x^2}{x^3\sqrt{x^6 - 1}}$$

Derivadas sucesivas

Son derivadas que se obtienen de otra derivada. A las derivadas obtenidas se les conocen como derivadas de orden superior[11].

Se llama primera derivada, a la derivada de una función, la cual se denota como

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

La segunda derivada de una función, es decir, la derivada de la derivada se denota como

$$f''(x) = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

La tercera derivada se denota como

$$f'''(\square) = y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

La n-ésima derivada se denota como

$$f^n(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Ejemplo 67. Obtener hasta la tercera derivada de la siguiente función $y = 2x^5$.

$y' = 10x^4$

$y'' = 40x^3$

$y''' = 120x^2$

Ejemplo 68. Obtener hasta la quinta derivada de la siguiente función $y = sen\ 2x$.

$y' = 2\cos 2x$

$y'' = -4\ sen\ 2x$

$y''' = -8\cos 2x$

$y^{IV} = 16\ sen\ 2x$

$y^{V} = 32\cos 2x$

Ejemplo 69. Obtener la segunda derivada de la función $y = \frac{7x^2+10}{x-1}$.

$$y' = \frac{(x-1)\frac{d}{dx}(7x^2+10) - (7x^2+10)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{(x-1)(14x) - (7x^2+10)(1)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{14x^2 - 14x - 7x^2 - 10}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{7x^2 - 14x - 10}{(x-1)^2}$$

Ahora obtengamos la segunda derivada

$$y'' = \frac{(x-1)^2\frac{d}{dx}(7x^2-14x-10) - (7x^2-14x-10)\frac{d}{dx}(x-1)^2}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{(x-1)^2(14x-14)-(7x^2-14x-10)(2)(x-1)(1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2-2x+1)(14x-14)-(7x^2-14x-10)(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{(14x^3-14x^2-28x^2+28x+14x-14)-(14x^3-14x^2-28x^2+28x-20x+20)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{14x^3-14x^2-28x^2+28x+14x-14-14x^3+14x^2+28x^2-28x+20x-20}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{34x-34}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{34(x-1)}{(x-1)^4}$$

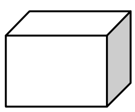
$$y'' = \frac{34}{(x-1)^3}$$

2.9. Aplicaciones

Razón de cambio

Recuerde que una razón en matemáticas significa que se comparan dos cantidades en forma de cociente.[12]

La razón de cambio de una variable que depende de otra, es una medida de cuánto cambia la primera respecto a un cambio de la segunda.



La fórmula para calcular el volumen de un recipiente cúbico es $V = l^3$, donde l representa la longitud de las aristas del cubo.

Supóngase una longitud inicial de $l = 2\ m$. Esto implica un volumen inicial de $V_i = (2\ m)^3 = 8\ m^3$

Si la longitud de la arista sufre un pequeño incremento Δl, el volumen final será $V_f = (2 + \Delta l)^3$.

El cambio de volumen que sufre el recipiente es $\Delta V = V_f - V_i = (2 + \Delta l)^3 - 8\ m^3$

A través de una razón de cambio podemos comparar el cambio de volumen que se generó cuando la arista se incrementó de $2\ m$ a $(2\ m + \Delta l)\ m$. La razón de cambio correspondiente se expresa como

$$\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

Por otro lado, si el incremento de longitud Δl de la arista es muy pequeño y se aproxima a cero, es decir,

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta l}$$

Al resultado de este límite se le conoce como razón instantánea de cambio.[4] En nuestro caso es la razón instantánea de cambio del volumen V con respecto a la arista l.

En el caso que estamos analizando, cuando la arista mide $l = 2\,m$, determinemos la razón instantánea de cambio:

$$\Delta V = (2 + \Delta l)^3 - 2^3$$

$$\Delta V = 2^3 + 3(2^2)(\Delta l) + 3(2)(\Delta l)^2 + (\Delta l)^3 - 2^3$$

$$\Delta V = 12(\Delta l) + 6(\Delta l)^2 + (\Delta l)^3$$

La razón de incrementos es:

$$\frac{\Delta V}{\Delta l} = \frac{12(\Delta l) + 6(\Delta l)^2 + (\Delta l)^3}{\Delta l} = 12 + 6(\Delta l) + (\Delta l)^2$$

Aplicando el límite:

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} [12 + 6(\Delta l) + (\Delta l)^2] = 12$$

Este resultado nos indica que cuando la arista del recipiente cúbico es de 2 m, la razón del cambio del volumen es de 12 veces el cambio de la arista.

Este límite por definición es la derivada.

En este sentido la derivada de una función representa la razón de cambio.

Con el uso del concepto de derivada, el problema del recipiente cúbico puede ser resuelto de la siguiente manera:

Determinar la razón de cambio del volumen de un cubo cuando la longitud de la arista es de 2 m.

$V = l^3$

Derivando la función

$V' = 3l^2$

Evaluando para $l = 2$

$V'(2) = 3(2)^2 = 12\ m^3$

Razones de cambio relacionadas

En la vida cotidiana existen diversas situaciones en la cuales se presentan variables que varían con el tiempo.

Cuando dos de estas cantidades se relacionan por medio de una ecuación y es posible conocer la razón de cambio de una de ellas al derivar la ecuación respecto del tiempo, se puede obtener la razón a la cual cambia la otra cantidad[4]

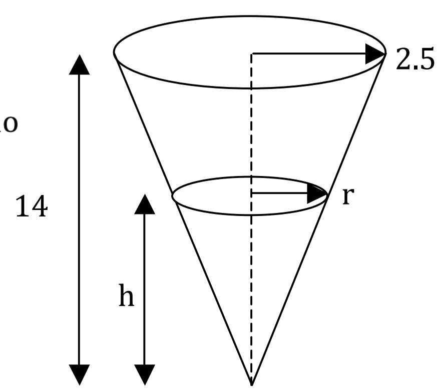
Si s representa una distancia recorrida, la derivada respecto del tiempo $\frac{ds}{dt}$ representa la razón de cambio, la cual se conoce como velocidad.

Si V representa el volumen de agua desalojado de un tinaco en el transcurso del tiempo, entonces $\frac{dV}{dt}$ representa la razón de cambio de dicho volumen en el tiempo.

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 70. En una fábrica se deposita aceite industrial a razón de $3\ m^3/min$ en el interior de un contenedor cuya forma es cónica, con una altura de 14 m y un radio de 2.5 m. Determinar la razón a la cual sube el aceite cuando este se encuentra a una altura de 6 m.

Sean



$\text{t} = \text{minutos transcurridos al comenzar el llenado}$

$\text{r} = \text{radio del aceite en t minutos}$

$\text{h} = \text{altura en m alcanzada a los t minutos}$

$\text{V} = \text{metros cúbicos de aceite a los t minutos}$

Como el llenado es a razón de $3\ m^3/min$ se tiene $\frac{dV}{dt} = 3$

Se quiere determinar $\frac{dh}{dt}$, cuando $h = 6\ m$

La ecuación del volumen nos permite relacionar V y h.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Sin embargo se requiere primero tener **r** en términos de **h**. De la figura se observan los triángulos semejantes, lo que nos permite expresar:

$$\frac{r}{h} = \frac{2.5}{14} \qquad r = \frac{2.5}{14}h$$

Sustituyendo en la ecuación del volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2.5}{14}h\right)^2 h = 0.0333h^3$$

Derivando en ambos miembros de la ecuación

$$\frac{dV}{dt} = 0.0333(3h^2) = 0.1001h^2\frac{dh}{dt}$$

$$3 = 0.1001h^2\frac{dh}{dt}$$

Despejando $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{0.1001h^2}$$

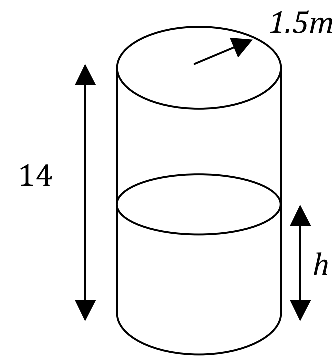
Evaluando esta expresión cuando h=6 m

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{0.1001(6)^2} = \frac{3}{3.6064} = 0.8318$$

Finalmente, el nivel de aceite sube con una razón de 0.8318 m/min cuando el aceite está a una altura de 6 m.

Ejemplo 71. Del ejemplo anterior, supóngase que se deposita el aceite industrial a la misma razón de 3 m^3/min, pero cuya forma es cilíndrica con una altura de 14 m y un radio de 1.5 m. Determinar la razón a la cual sube el aceite cuando éste ha alcanzado una altura de 6 m.

Sean



t = minutos transcurridos al comenzar el llenado

h = altura en m alcanzada a los t minutos

V = metros cúbicos de aceite a los t minutos

Como el llenado es a razón de 3 m^3/min se tiene $\frac{dV}{dt} = 3$

Se quiere determinar $\frac{dh}{dt}$, cuando $h = 6\ m$

La ecuación del volumen nos permite relacionar V y h.

$V = \pi r^2 h$

Derivamos en ambos miembros

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

Despejando

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Sustituyendo datos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi(1.5)^2} = 0.4249$$

Observamos que la razón de cambio es constante y no depende de h. Por lo que a 6 m o cualquier otra altura el nivel de aceite sube a razón de $0.4249\ m/min$.

Ejemplo 72. Dos lanchas parten de un punto P. Una de ellas se mueve hacia el este a razón de 100 km/h, mientras que la otra se mueve hacia el sur a razón de 120 km/h. Determinar la razón de cambio de la distancia que las separa cuando la lancha que va al este se ubica a 20 km y la que va al sur a 30 km, ambas de su punto de partida.

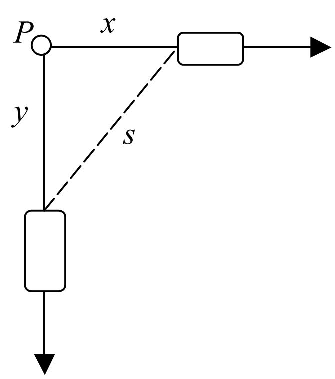
Sea

t = tiempo transcurrido (hrs)

x = distancia en dirección este (km)

y = distancia en dirección norte (km)

s = separación entre las lanchas (km)a las t horas



Tenemos los siguientes datos:

$x = 20\ km$

$\frac{dx}{dt} = 100\ km/h$

$y = 30\ km$

$\frac{dy}{dx} = 120\ km/h$

La rapidez a la cual se separan las lanchas es $\frac{ds}{dt}$

La ecuación que nos permite relacionar las variables, se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras. Según la figura.

$x^2 + y^2 = s^2$

Derivando implícitamente

$$\frac{d}{dt}x^2 + \frac{d}{dt}y^2 = \frac{d}{dt}s^2$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{s}\frac{dy}{dt}$$

Nos falta determinar s

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{400 + 900} = \sqrt{1300} = 36.05\ km$$

Sustituyendo datos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x}{s}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{s}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{20}{36.05}\right)(100) + \left(\frac{30}{36.05}\right)(120)$$

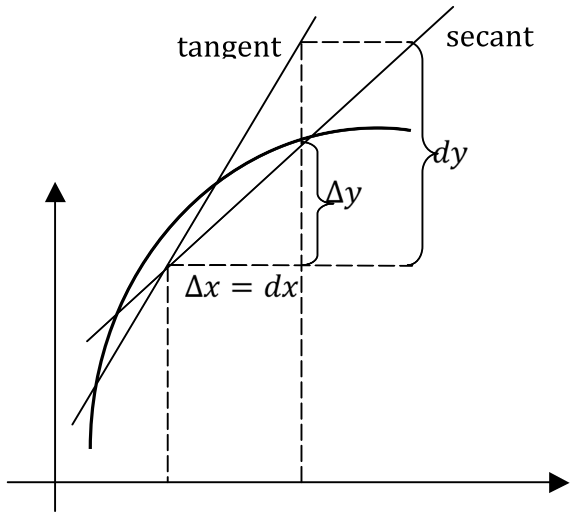
$$\frac{ds}{dt} = 55.47 + 99.86 = 155.33\ km/h$$

Finalmente decimos que las lanchas se alejan a una razón de

$$\frac{ds}{dt} = 155.33\ km/h$$

Diferenciales

La derivada de una función en un punto dado representa, desde el punto de vista geométrico, a la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en dicho punto.[1]



De la figura podemos ver que para pequeños valores del incremento Δx, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente. Es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m_{sec} \approx m_{tan}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

De aquí que

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Se llama diferencial de la variable independiente x al incremento Δx y se representa como dx. Mientras que a la expresión $f'(x)\Delta x$ se le denomina diferencial de la variable dependiente y, la cual se representa como dy.[13]

La diferencial de una función f se obtiene llevando a cabo el producto de su derivada por el diferencial de la variable independiente dx.[4] Se puede expresar como

$dy = f'(x)dx$

Ejemplo 73. Determinar la diferencial de $y = 4x^2 + 2x - 1$.

Primero se obtiene la derivada

$y' = 8x + 2$

Para obtener su diferencial se multiplica por dx

$dy = (8x + 2)dx$

Ejemplo 74. Obtener la diferencial de $y = \sqrt{5x^2 + 6}$.

$y = (5x^2 + 6)^{1/2}$

Se determina primeramente su derivada

$$y' = \frac{1}{2}(5x^2 + 6)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(5x^2 + 6)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 6}}(10x)$$

$$y' = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 6}}$$

Para obtener su diferencial, se multiplica por dx

$$dy = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 6}}dx$$

Ejemplo 75. Determinar la diferencial de $y = 3\cos 2x$.

$$y' = 3\ (-sen\ 2x)\frac{d}{dx}2x$$

$$y' = -3\ sen\ 2x(2)$$

$y' = -6\,sen\,2x$

Así que su diferencial es

$dy = -6\,sen\,2x\,dx$

Los diferenciales son utilizados para obtener aproximaciones de una función incrementada cuando el incremento de x es pequeño ($\Delta x \approx 0$).[5]

Partiendo de

$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

Se tiene la aproximación

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta y$

$f(x + \Delta \square) \approx f(x) + dy$

Ejemplo 76. Mediante diferenciales obtener una aproximación de $\sqrt{36.2}$.

Partimos de que la función es

$f(x) = \sqrt{x}$

Queremos calcular

$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

$x = 36 \quad y \quad \Delta x = dx = 0.2$

Obtengamos el diferencial de la función

$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Por lo tanto

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

$$\sqrt{36 + 0.2} \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.2)$$

$\sqrt{36.2} \approx 6 + 0.01666$

$\sqrt{36.2} \approx 6.01666$

Mediante una calculadora se tiene que $\sqrt{36.2} = 6.01664$

Ejemplo 77. Calcular mediante diferenciales el incremento del área de un cuadrado, cuando sus lados que miden 3 m, sufren un aumento de 3 mm.

La función para determinar el área de un cuadrado cuyo lado mide x es

$A = x^2$

Y se tienen los datos

$x = 3\ m$

$\Delta x = 3\ mm = 0.003\ m$

Obtengamos la diferencial de la función

$dA = 2xdx$

Sustituyendo datos

$dA = 2(3)(0.003) = 0.018\ m^3$

Con un incremento en el lado del cuadrado de 3 mm, el área incrementa aproximadamente $0.018\ m^3$.

Ejemplo 78. A una placa circular con un radio de 5cm se le aplica calor, aumentando su radio en 0.015 cm. Determinar aproximadamente cuanto aumento la superficie de la placa.

La fórmula para determinar el área de un círculo de radio r es

$A = \pi r^2$

$\frac{d}{dr}A = \pi \frac{d}{dr}r^2$

$A' = \pi(2r) = 2\pi r$

Por tanto

$dA = 2\pi r dr$

$dA = 2\pi(5)(0.015)$

$dA = 0.4712\ cm^2$

Con fines comparativos, el resultado con cuatro decimales de precisión es

$A_i = \pi(5)^2 = 78.5398$

$A_f = \pi(5.015)^2 = 79.0117$

$\Delta A = 79.0117 - 78.5368 = 0.4719\ cm^2$

2.10. Problemario

1. Calcular el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} 50$

b) $\lim_{x\to 0} 5x^3$

c) $\lim_{x\to 4} x$

d) $\lim_{x\to -2}(-13x)$

e) $\lim_{x\to 5}(6x^2 - x)$

f) $\lim_{s\to -1}(4s - 6s^3 + 3)$

g) $\lim_{\theta\to \pi}(\theta^2 + 2\theta + \theta)$

h) $\lim_{x\to 1}(2x + 1)(3 + x)$

i) $\lim_{x\to 4} \sqrt{5x + 29}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+1}{x-2}$

k) $\lim_{t\to 0} \left(t - \frac{5}{t-5}\right)$

l) $\lim_{x\to -1} \frac{(x^2+2x+1)}{x^2+1}$

m) $\lim_{x\to 10} \frac{100}{(x-10)^2}$

n) $\lim_{t\to 0} \left(-\frac{5}{t^3} + 1\right)$

ñ) $\lim_{x\to \infty}(5x^2 + x + 7)$

2. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+5x-14)}{x-2}$

c) $\lim_{t\to -3} \left(\frac{9-t^2}{t+3}\right)$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{-20x^5-12x^4}{10x^3}\right)$

e) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{10-\sqrt{x}}{2+5\sqrt{x}}\right)$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{45x^3+9x^2-6x}{23-9x^3}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{12-3x^4}{6x-5}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+6}-6}{x}$

j) $\lim_{s\to\infty} \frac{15s^2-3s+5}{3s^2-s-8}$

3. Determinar si las funciones siguientes son continuas en los puntos indicados para cada caso. Aplicar los criterios de continuidad.

a) $f(x) = 3x^2 - x,\ en\ x = 1\ \ y\ en\ x = 0$

b) $g(x) = \frac{5}{x^3},\ \ en\ x = -2\ \ y\ en\ \ x = 0$

c) $h(t) = \frac{t-2}{t^2-9},\ \ en\ t = -3\ \ y\ \ en\ t = 3$

4. Determinar los puntos de discontinuidad en las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x$

b) $g(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$

5. Determinar si las siguientes funciones son continuas en el intervalo indicado:

a) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-2x-8},\ \ en\ el\ intervalo\ (-2,6)$

b) $f(x) = 2 + 3x - 5x^2\ \ en\ el\ intervalo\ (-3,8)$

c) $f(x) = \frac{3x}{9x^2},\ \ \ en\ el\ intervalo\ (-2,5)$

d) $f(x) = \frac{10x^3+20x^2}{2x},\ \ \ en\ el\ intervalo\ (-1,1)$

6. Encontrar los límites unilaterales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

7. Hallar la derivada de las siguientes funciones usando la regla general de derivación

7.1. y=x^3-2

7.2. $-\frac{2}{5}x^2+9$

8. Mediante el uso de las fórmulas algebraicas, determinar la derivada de las siguientes funciones:

8.1. $y=100$

8.2. $y=-25x$

8.3. $y=\frac{5}{6}x$

8.4. $y=\sqrt{\pi}$

8.5. $y=\sqrt{\pi}x^2+1$

8.6. $y=23x^2+2x^3$

8.7. $y=3x^4-5x^3+x^2-x+7$

8.8. $y=ax^2+bx+c$

8.9. $y=mx+b$

8.10. $y=x^{4/5}+2x^{2/3}-3x^{-2}$

8.11. $y=\sqrt[5]{x^3}$

8.12. $y=(9x+2)(5-x)$

8.13. $y=20(3x^2+x)(2x-1)$

8.14. $y=\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^{-3}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

8.15. $y=(12x^2+5x+3)^3$

8.16. $y=(4-5x^2+\sqrt{x})^{-2}$

8.17. $y=\sqrt{x^2-16}$

8.18. $y=\frac{13x^2}{2x+1}$

8.19. $y=\frac{x^2-16}{\sqrt{x-4}}$

8.20. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

9. Determinar la derivada de las siguientes funciones implícitas:

9.1. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$

9.2. $x^2 + y^2 = 5^2$

9.3. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 1 = 0$

9.4. $x^2 + 6xy + y^2 = 2x + 5$

9.5. $x^3 + \sqrt{xy} + y^3 = k$

10. Mediante el uso de las fórmulas trascendentes, determinar la derivada de las siguientes funciones:

10.1. $y = \ln(mx + b)$

10.2. $y = \ln(mx + b)^2$

10.3. $y = \ln(10x^2)$

10.4. $y = ln^3(2x)$

10.5. $y = \log 2x$

10.6. $y = \log \frac{\square}{x^2}$

10.7. $y = \ln(x + \sqrt{x})$

10.8. $y = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

10.9. $y = e^{-x}$

10.10. $y = e^{kx}$

10.11. $y = 3x \ln x^2$

10.12. $y = 5^{4x}$

10.13. $y = \frac{e^{3x}}{x}$

10.14. $y = x^{3x}$

10.15. $y = (x^2 - 1)^{-x}$

10.16. $y = sen\ (ax^2 + bx + c)$

10.17. $y = sen\ (2x)\cos\ (2x)$

10.18. $y = \frac{sen\ x}{\tan x}$

10.19. $y = e^{3x}\cos(e^{3x})$

10.20. $y = sen\ x \ln(cosx)$

11. Hallar la segunda derivada de las funciones siguientes:

11.1. $y = \frac{\sqrt{sen\ x}}{x}$

11.2. $y = \tan(1 - x^2)$

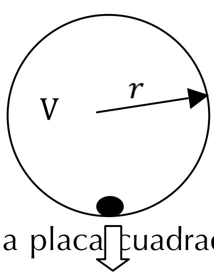
12. Hallar la sexta derivada de las funciones siguientes:

12.1. $y = 5\ sen\ (x)$

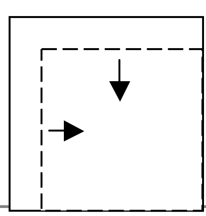
12.2. $y = e^{2x+1}$

13. Resolver los siguientes problemas:

13.1. Un globo aerostático pierde aire a razón de 1.2 m^3/min. ¿Con qué rapidez $\frac{dr}{dt}$ va disminuyendo el valor del radio del globo cuando $r = 3\ m$.



13.2. Una placa cuadrada de acero de 1.5 m de lado, se somete a una contracción térmica durante un proceso de enfriamiento, lo cual origina una disminución en sus lados de 5 mm. Determinar aproximadamente cuanto disminuye el área de la placa dA.



13.3. Obtener una aproximación del resultado de $\sqrt{50}$.

13.4. Encontrar el valor mínimo relativo que puede alcanzar la función: $A(x)=6x^2+10x-3$

13.5. Encontrar el valor máximo y mínimo relativo que tiene la función: $B(x)=3x^3+5x^2+4$

13.6. ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar la función seno?

2.11. Autoevaluación

1. Encuentre el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x}{\sqrt{4}}$$

2. Obtener el valor del límite por la izquierda y por la derecha para comprobar si son iguales y existe.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{2x^2-8}$$

3. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}5^2$

b) $\lim_{x\to 0}3x-2$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-3}{4+x^3}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2-3}{4+x^3}$

e) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^3-5}{x^2-1}$

4. Determinar si las siguientes funcione son continuas en los puntos señalados.

a) $f(x)=x^2$ en $x=0$, $x=2$

b) $f(x)=\sqrt{x-2}$ en $x=2$, $x=-2$

5. Hallar la derivada de las siguientes funciones usando la regla general de derivación.

5.1. $y=4x^3-2x$

5.2. $-\frac{2}{3}x^3+2$

6. Se requiere colocar una cerca de un terreno rectangular que tiene un área de 50

metros cuadrados. Uno de los lados más largos del terreno colinda con un río, por lo que no se requiere cercar ese lado. Expresar la longitud de la cerca en función del lado que colinda con el río y el valor que debe de tener dicho lado para que la longitud de la cerca sea mínima.

7. Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

8. Derivar por fórmulas.

8.1. $y=5x^4-3x^2+6x+8$

8.2. $y=x^2 \text{senx}$

8.3. $y = \sqrt{b^2 - x^2}$

8.4. $y = \frac{x-2}{x^3}$

8.5. $y = \sqrt[3]{5 - 9x}$

8.6. $y = 12x^3 - 10x^2 + 5x - 4$

8.7. $y = x\sqrt{b^2 + x^2}$

8.8. $y = \frac{2-x}{1+2x^2}$

8.9. $f(t) = (2 - 5t)^{\frac{3}{5}}$

8.10. $r = \sqrt{1 - 2t}$

8.11. $y = \frac{b-x}{b+x}$

8.12. $y = 3x^3 + 2x^2 - 4x^4 + 5x^5 - 6$

8.13. $y = (x^2 - x)^3$

8.14. $y = Ln(2x - 1)$

8.15. $y = e^{x^2}$

9. Deriva la siguiente función implícita.

9.1. $5x^5 + x^3y + y^6x = 5$

10. Usando diferenciales calcular:

10.1. $sen\ 50°$

10.2. $\cos 61°$

10.3. $\sqrt[5]{33}$

10.4. $\sqrt[3]{66}$

10.5. $\sqrt{10}$

2.12. Soluciones del problemario

a) 50

b) 0

c) 4

d) 24

e) 145

f) 5

g) $\pi^2 + 3\pi$

h) 12

i) 7

j) $-\frac{1}{2}$

k) 1

l) 0

m) ∞

n) No existe

ñ) ∞

2.

a) $\frac{1}{2}$

b) 9

c) 6

d) 0

e) $-\frac{1}{5}$

f) -5

g) $-\infty$

h) $\frac{1}{2}$

i) No existe

j) 5

3.

a) $x = 1, Sí \quad x = 0, Sí$

b) $x = -2, Sí \quad x = 0, No$

c) $t = -3, No \quad t = 3, No$

4.

a) $Ninguno$

b) $x = \pm 3$

5.

a) No es continua

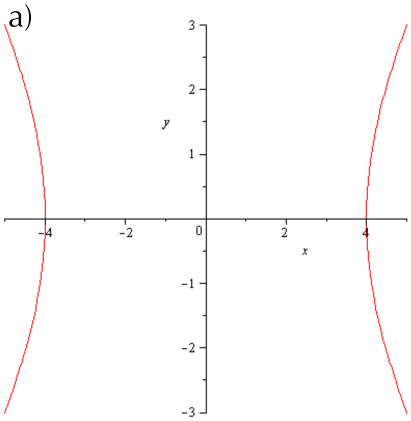
b) Sí es continua

c) No es continua

d) Sí es continua

6.

a)



a) $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to -4^+} f(x) =$ no existe

c) $\lim_{x \to -4} f(x) =$ no existe

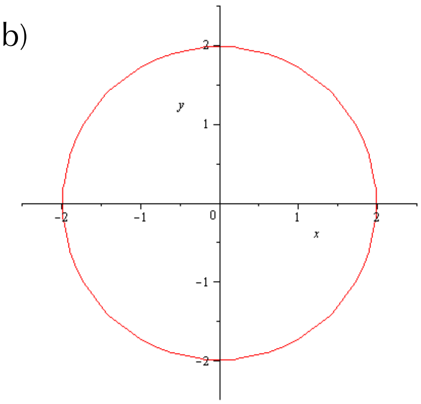
d) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ no existe

e) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \to 4} f(x) =$ no existe

b) $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$ no existe

b)



b) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to -2} f(x) =$ no existe

d) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

e) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ no existe

f) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ no existe

7.1. $3x^2$

7.2. $y' = -\frac{4}{5}x$

8.1. $y' = 0$

8.2. $y' = -25$

8.3. $y' = \frac{5}{6}$

8.4. $y' = 0$

8.5. $y' = 2\sqrt{\pi}x$

8.6. $y' = 46x + 6x^2$

8.7. $y' = 12x^3 - 15x^2 + 2x - 1$

8.8. $y' = 2ax + b$

8.9. $y' = m$

8.10. $y' = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{x^3}$

8.11. $y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

8.12. $y' = 43 - 18x$

8.13. $y' = 360x^2 - 40x - 20$

8.14. $y' = -\frac{10}{x^3} - 18x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

8.15. $y' = 3(24x + 5)(12x^2 + 5x + 3)^2$

8.16. $y' = \frac{20x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{(4-5x^2+\sqrt{x})^3} = \frac{20\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}(4-5x^2+\sqrt{x})^3}$

8.17. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$

8.18. $y' = \frac{26x(x+1)}{(2x+1)^2}$

8.19. $y' = \frac{3x^2-16x+16}{2\sqrt{(x-4)^3}}$

8.20. $y' = -\frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{(x-1)^3}}$

9.1. $y' = -\frac{bx}{ay}$

9.2. $y' = -\frac{x}{y}$

9.3. $y' = \sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

9.4. $y' = \frac{1-x-3y}{3x+y}$

9.5. $y' = -\frac{6\sqrt{x^5y}+y}{6\sqrt{xy^5}+x}$

10.1. $y' = \frac{m}{mx+b}$

10.2. $y' = \frac{2m}{mx+b}$

10.3. $y' = \frac{2}{x}$

10.4. $y' = \frac{3ln^2(2x)}{x}$

10.5. $y' = \frac{\log e}{x}$

10.6. $y' = -\frac{\log e}{2x}$

10.7. $y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+\sqrt{x})}$

10.8. $y' = \frac{1}{x(1+x)}$

10.9. $y' = -\frac{1}{e^x}$

10.10. $y' = ke^{kx}$

10.11. $y' = 3(2+\ln x^2)$

10.12. $y' = 4 \cdot 5^{4x} \cdot \ln 5$

10.13. $y' = \frac{e^{3x}(3x-1)}{x^2}$

10.14. $y' = 3x^{3x}(1 + \ln x)$

10.15. $y' = -(x^2-1)^{-x}\left[\frac{2x^2}{x^2-1} + \ln(x^2-1)\right]$

10.16. $y' = (2ax + b)\cos(ax^2 + bx + c)$

10.17. $y' = 2\cos 4x$

10.18. $y' = -sen\ x$

10.19. $y' = 3e^{3x}[\cos e^{3x} - 3e^{3x} sen\ e^{3x}]$

10.20. $y' = \cos(x) \cdot \ln(\cos x) - sen\ x \cdot \tan x$

11.1. $y'' = -\frac{cos^2 x}{4x\sqrt{sen^3 x}} - \frac{\cos x}{x^2\sqrt{sen\ x}} - \frac{\sqrt{sen\ x}}{2x} + \frac{2\sqrt{sen\ x}}{x^3}$

11.2. $y'' = -2\sec(1-x^2)[\sec(1-x^2) - 4x^2]$

12.1. $y^{VI} = -5\ sen\ (x)$

12.2. $y^{VI} = 64e^{2x+1}$

13.1. $\frac{dr}{dt} = -1.06\ cm/min$

13.2. $dA = -0.015\ m^2 \quad para\ un\ \ \Delta l = -0.005\ m$

13.3. $f(x) + dy = 7 + \frac{1}{14} = 7.07142$

13.4. -.833

13.5. Máximo relativo: 1.11, mínimo relativo: 0

13.6. 1

2.13. Soluciones de la autoevaluación

1. 1

2. $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{2x-4}{2x^2-8}=\dfrac{1}{4}$ $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{2x-4}{2x^2-8}=\dfrac{1}{4}$ son iguales $\therefore$ $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{2x^2-8}$ existe

3.
a) 25
b) -2
c) $\dfrac{-3}{4}$
d) ∞

e) 0

4.
a) $f(0)=0=\lim_{x\to 0}x^2$ $f(2)=4=\lim_{x\to 2}x^2$ $\therefore$ $f(x)=x^2$ sí es continua en $x=0$ y $x=2$

b) $f(2)=0$, $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ no está definido por la izquierda, $f(-2)=$ no está definida. $\therefore$

$f(x)=\sqrt{x-2}$ no es continua en $x=2$ y $x=-2$

5.1. $y'=12x^2-2x$

5.2. $-2x^2$

6. $L(x)=x+\dfrac{100m^2}{x}$ valor mínimo: 10 m.

7. Máximo en x=1 y mínimo en x=3

8.1. $y'=20x^3-6x+6$

8.2. $y'=x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x$

8.3. $y'=-\frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}}$

8.4. $y'=\frac{-2x^3+6x^2}{x^6}$

8.5. $y'=-\frac{3}{(5-9x)^{\frac{2}{3}}}$

8.6. $y'=36x^2-20x+5$

8.7. $y' = \frac{b^2+2x^2}{\sqrt{b^2+x^2}}$

8.8. $y' = \frac{2x^2-8x-1}{(1+2x^2)^2}$

8.9. $f'(t) = -\frac{3}{\sqrt[5]{(2-5t)^2}}$

8.10. $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-2t}}$

8.11. $y' = -\frac{2b}{(b+x)^2}$

8.12. $y' = 9x^2 + 4x - 16x^3 + 25x^4$

8.13. $y' = (6x-3)(x^2-x)^2$

8.14. $y' = \frac{2}{2x-1}$

8.15. $2xe^{x^2}$

9.1. $\frac{dy}{dx} = \frac{25x^4-3x^2y-y^6}{x^3+6xy^5}$

10.1. 7687

10.2. 0.484892

10.3. 2.0125

10.4. 4.04166

10.5. 3.16

2.14. Conclusiones

Este capítulo es la introducción a una nueva forma de ver el mundo a través de las funciones y su comportamiento, ya que mediante ellas podemos describir nuestro entorno y su comportamiento.

Este capítulo te brindó una nueva herramienta algebraica útil en el análisis de funciones y de pequeñas variaciones que ocurren en cantidades continuas, hablamos sobre el concepto de derivada como razón de cambio, pendientes de curvas, valores máximos y mínimos, se vieron aplicaciones de optimización, pero hay muchas otras aplicaciones en el campo de la ingeniería, la física, la economía, la química e inclusive en las ciencias sociales. Lo visto en este capítulo es prerrequisito para tu próximo curso de cálculo integral.

Referencias

[1] Molina Moreno, José Luis & et.al. (2011) Análisis derivativo de funciones. México: CONALEPMICH/CIE
[2] Carreño García,J. Jesús & Ochoa Hernández Silvia.(2014)Representación simbólica y angular del entorno. México: CONALEP/CIE.
[3] Carreño García,J. Jesús & Ochoa Hernández Silvia.(2014)Representación simbólica y angular del entorno. México: CONALEP/CIE.
[4]G. Zill Dennis. (1987). Cálculo con geometría analítica. México. Iberoamericana.

[5]G. Zill Dennis. (1987). Cálculo con geometría analítica. México. Iberoamericana.

[6] Cuellar J. A. (2008). Matemáticas I Álgebra. México. McGraw-Hill.
[7] Cuellar J.A. (2012). Matemáticas V. México. McGraw-Hill.
[8] Ferdinand P. Beer & E. Russell Johnston, Jr.(1990). Mecánica Vectorial para Ingenieros "Dinámica", México. McGraw-Hill. recuperado 5 de agosto 2011

[9] Granville W. A. (1982). Cálculo diferencial e integral. México. Limusa.
[10] Cuellar Juan Antonio. (2007). Matemáticas V: Cálculo diferencial. México. McGraw-Hill

[11] Aguilar Márquez Arturo, et.al. (2010). Cálculo diferencial e integral. México. Pearson

[12] Fuenlabrada de la Vega Samuel. (2008). Cálculo diferencial. México. McGraw-Hill

[13] G. Zill Dennis. (1987). Cálculo con geometría analítica. México. Iberoamericana.