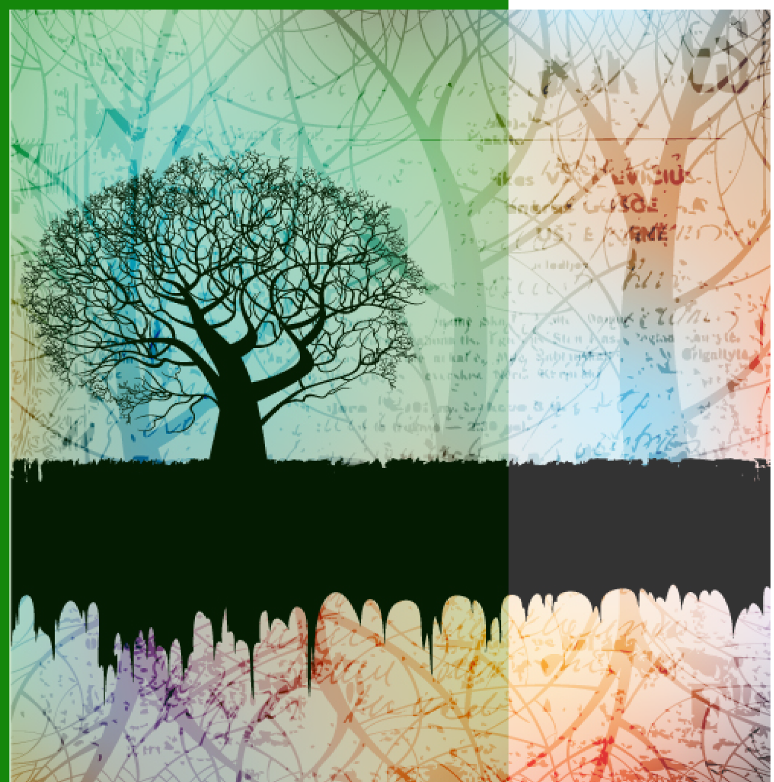
Manejo de espacios y cantidades



Marisol Rodríguez Núñez
Silvia Ochoa Hernández
Rafael Corona Guerra
Francisco Javier González García

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
conalep
Michoacán
Gobierno del Estado
MICHOACÁN

Semestre 1

conalep Michoacán

PRESENTA:

Manejo de espacios y cantidades

Autores:

Marisol Rodríguez Núñez

Silvia Ochoa Hernández

Rafael Corona Guerra

Francisco Javier González García

Título original de la obra:

Registro: **CONALEP-NUMESP -1F**

Programa: Profesor escritor. Desarrollo de la competencia de la producción de información literaria y lectura.

Rodríguez Núñez, M.; et al. (2014) **Manejo de espacios y cantidades.** México: CONALEP/CIE

xi, 230 p.; carta

Registro: **CONALEP-NUMESP -1F** Documentos en línea

Editores:

Ing. Eduardo Ochoa Hernández

Lic. Filho Enrique Borjas García

Editorial: CONALEP Michoacán

Col. Chapultepec norte, Gral. Nicolás Bravo No. 144, Morelia, Michoacán.

http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/

Registro: **CONALEP-NUMESP -1F**

ISBN: En trámite

Impreso en______________________

Impreso en México –Printed in Mexico

DIRECTORIO

Prefacio

Estimado estudiante:

Las palabras que sombrean estas páginas, no son simple ciencia dentro del diálogo como depósitos de datos e información, ni son cuestión de vocabulario o listado de definiciones, son la experiencia generosa de la comunidad CONALEP Michoacán, esa realidad oculta pero necesaria que respaldó las tareas de investigación y composición literaria del discurso que integra este libro. Nos referimos a los profesores, administrativos y sindicatos que hoy convergen en el umbral de la existencia para apoyar a un grupo de profesores escritores que han creado en el sereno libre, arquitecturas de conocimientos como un viaje de aprendizaje que exigirá del estudiante, lo mejor de sí mismo ante la presencia luminosa del texto, ese que pretende enseñarle a caminar con la frente en alto.

Las ideas asociadas en este texto, equivalen a la imaginación lograda en el acto de escribir desde otros textos, al decodificarlas el estudiante, se le exige más vocabulario para enriquecer su habla y hacer ver a sus ojos más allá de la estrechez de la información que inunda a la sociedad moderna. El libro no presenta la superficie de la existencia como cruda observación, procura que su dificultad incite a perforar la realidad hasta reflexiones que renueven los modos inciertos de dar significado al mundo. La ciencia, la literatura y la tecnología no las percibimos como mundos incomunicables, los valores son explícitos caminos que las vinculan en torno al currículo del técnico bachiller. Tienen estos textos organización de premisas, técnicas, justificaciones, normas, criterios y como Usted se dará cuenta, también mostrará nuestros límites para seguir haciendo puentes entre las incesantes creaciones de nuevas fronteras de la investigación científica y técnica. Se pretende que estos libros sean contenido y no un libro de prácticas escolares, sean la herramienta de complementación para enriquecer los discursos de la enseñanza-aprendizaje.

Los profesores de CONALEP enfrentan a diario las carencias visibles de medios tecnológicos, materiales y documentales, sería fácil usar las palabras para señalar hasta el cansancio nuestras apremias, pero se ha decidido mejor producir libros como testimonios vivos y luminosos que renueven el rol social de la academia colegiada sensible a la condición social, susceptible de ir perfeccionándose con la acumulación de esta experiencia literaria, para servir de mejor manera al enriquecimiento de las competencias necesarias para realizar el sueño de éxito de tantos jóvenes Michoacanos.

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Mensaje a la comunidad académica

Con la colaboración docente, administrativa y sindical se realizó el esfuerzo de producir literatura de contenido en apoyo a la formación curricular en CONALEP Michoacán. El libro, esa experiencia de conocimiento se ha democratizado, ya no es un secreto o privilegio de unos cuantos, el texto virtual en la Web resolvió lo que la imprenta de Gutenberg no logró hacer, la auto publicación, la biblioteca virtual móvil, el libro electrónico y el texto digital; esto nos replantea migrar a una pedagogía interactiva con la experiencia del conocimiento. Desde luego que el libro clásico como dice Humberto Eco, nadie puede acabar con su poder en esta sociedad. Promover crear y leer literatura es enriquecer el vocabulario, el desarrollo intelectual, la agudeza de la creatividad y pintar la realidad con lo que nacemos libres: la imaginación.

El docente escritor, dirige el aprendizaje en función de la experiencia de reconstruir el conocimiento contemplado en el currículo. Se realiza el acto de pensar al escribir e investigar los modelos de conocimiento, ensayo, libro, tesis, reseña, síntesis, semblanza, resumen, análisis de texto, definición, argumento, razonamiento, hipótesis, patente, marco teórico, revisión, poema, novela, cuento, … entre otros, resuelven la necesidad de conocer, ser y aprender. El docente escritor escribe y publica su propuesta en el formato de libro, con ello, se abre a la crítica social y expone su calidad como marco ético de revaloración moral frente a su comunidad.

La escritura es más que gramática y semántica, es el acto de estructurar el pensamiento en un modelo de conocimiento, es volver a dar voz al profesor como producción de la libertad de cátedra, acto creativo original en el que encarna la soberanía de la sociedad como expresión cultural particular que habla desde su propio tiempo. Leer para crear es el acto sustantivo del novel. Escribir es una cierta reorganización del conocimiento previo en un acto de creación, donde la teoría literaria, los marcos normativos de estilo, la psicolingüística, la epistemología y la comunicación son los pilares de plataforma del aprendizaje centrado en el acto creativo.

Este libro fue escrito para compartir la felicidad de crear la presencia del docente en el texto. CONALEP desarrolla un programa académico para impulsar su capacidad y compromiso social para generar las ideas curriculares para enriquecer la sensibilidad y la imaginación científica, técnica y humanista de su comunidad.

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

La palabra no solo nos otorga realidad, también tengo la sensación de que tiene vida propia separada de nosotros, y que cuando hablamos o escribimos, especialmente en momentos de intensa emoción, no hacemos más que dejarnos llevar por una sílaba amable o una frase complaciente.

Eric Ormsby. *Fine incisions*

Leer es una tarea de la memoria por medio de la cual las ficciones nos permiten disfrutar de experiencias ajenas y lejanas en el tiempo como si fueran nuestras.

Alberto Manguel. *La ciudad de las palabras*

En toda obra literaria se afirma una realidad independiente de la lengua y del estilo: la escritura considerada como la relación que establece el escritor con la sociedad, el lenguaje literario transformado por su destino social. Esta tercera dimensión de la forma tiene una historia que sigue paso a paso el desgarramiento de la conciencia: de la escritura transparente de los clásicos a la cada vez más perturbadora del siglo XIX, para llegar a la escritura neutra de nuestros días.

Roland Barthes, *El grado cero de la escritura*

Palabra escrita bajo luz

En un mundo cada día con más canales de comunicación, la palabra escrita camina por los muros que denuncian el drama catastrófico sobre el medio ambiente y sobre el control de la vida humana; el combustible de esta desesperanza produce apatía profunda por tener contacto con el mundo de la literatura, esta distorsión moral parece reflejarse entre los que no quieren sentir responsabilidad ni pensar, dejando a otros su indiferencia al ser prisioneros de ligeras razones y tirria justificada en la empresa de sobrevivir.

Especular en un mundo sin libros es exponer al mundo a la ausencia de pensamiento, creatividad y esperanza. Los libros, dedicados a ser arrebatados por el lector, están expuestos a ser poseídos por las bibliotecas vacías y que con el tiempo opacan sus páginas y empolvan la cubierta de lo que alguna vez fue un objeto de inspiración. Resulta difícil transcribir este instante de un peligroso espacio donde ya muy pocas palabras sobreviven dentro de la reflexión y las pocas sobrevivientes han abandonado la unión del sentido de vivir y el sentido del pensar científico. Escribir pasa de ser un placer repentino a ser una necesidad inminente, es el puente entre lo conocido y lo inexplorado. Es un reto de hoy en día inmiscuirse en lo que una vez fue lo cercano y dejar de lado la novedad tecnológica para poder, a través de las barreras que nos ciegan, abrir fronteras literarias. Es un proyecto que conspira a favor de la libertad creativa, de la felicidad lúcida cargada de libros embajadores de nuevas realidades.

Entre un mar de razones dentro del libro escolar en crisis, se percibe la ausencia de esa narrativa del cuerpo del texto, misma que alimenta al lector de una experiencia de conocimiento, su ausencia, es más un mal glosario, de un mal armado viaje literario científico o de ficción. En esos viajes de libros en crisis, nos cansamos de mirar espacios vacíos de talento, emociones y sensibilidad para responder a un entorno adverso; son muchas veces un triunfalismo de autoevaluación y una falsa puerta de una real competencia para actuar en la realidad. Uno no solo vive, escucha la voz interior de un libro, uno es fundado en el manejo del lenguaje que explica, crea, aplica o expande los límites del horizonte de nuestro imaginario actuante en lo real. No vivimos leyendo texto, sino leyendo el paisaje de una realidad, el libro toma la voz del progreso en una siempre reconstrucción lingüística del sujeto que explica, transforma y comunica desde los desafíos de su generación.

La información cruda que tanto rellena los libros grises, oscuros y papel pintado; requiere ser dotada de conceptos que permitan alimentar al sujeto que toma decisiones, que explora con paso lento, que mira por dentro del lenguaje y aplica la información que cobra sentido en la siempre expansión de las ideas.

Escribir un libro es siempre reconstruir un discurso, sus lectores en este discurso son el puente a un texto profundo que demanda esfuerzo en la reconstrucción de los procesos de razonamiento y el entretejido del discurso que involucra información de fondo, esas fuentes que justifican su análisis y poseen significado privilegiado para la comprensión de una realidad.

El lector puede hacer uso del libro con su propia experiencia y con su autoayuda, al precisar términos y conceptos para prolongar su horizonte de interpretación, el libro se hace cargo de la memoria de un plan de estudios, es un discurso de diferentes capas de argumentos, tras este texto se anuncia un orden de experiencia propuesto para su aprendizaje. El libro está conformado para jóvenes con memoria sin dolor para nuevas palabras, aborda el olvido como una deficiencia de interactividad entre el discurso argumentativo y los referentes conceptuales. Esto es el reto en la producción de los libros CONALEP. La propuesta es una reconstrucción de una semántica más profunda, como el principal reto del estudiante técnico bachiller del siglo XXI.

Libro,…

todos te miran,

nosotros te vemos bajo la piel.

Este texto de apoyo es una introducción al manejo de espacios y cantidades que sirven de base para todas las asignaturas de matemáticas y física. Incluye teoría de conjuntos, operaciones en el campo de los números reales, operaciones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado, así como la identificación de relaciones y funciones.

Características del libro de apoyo para el estudiante:

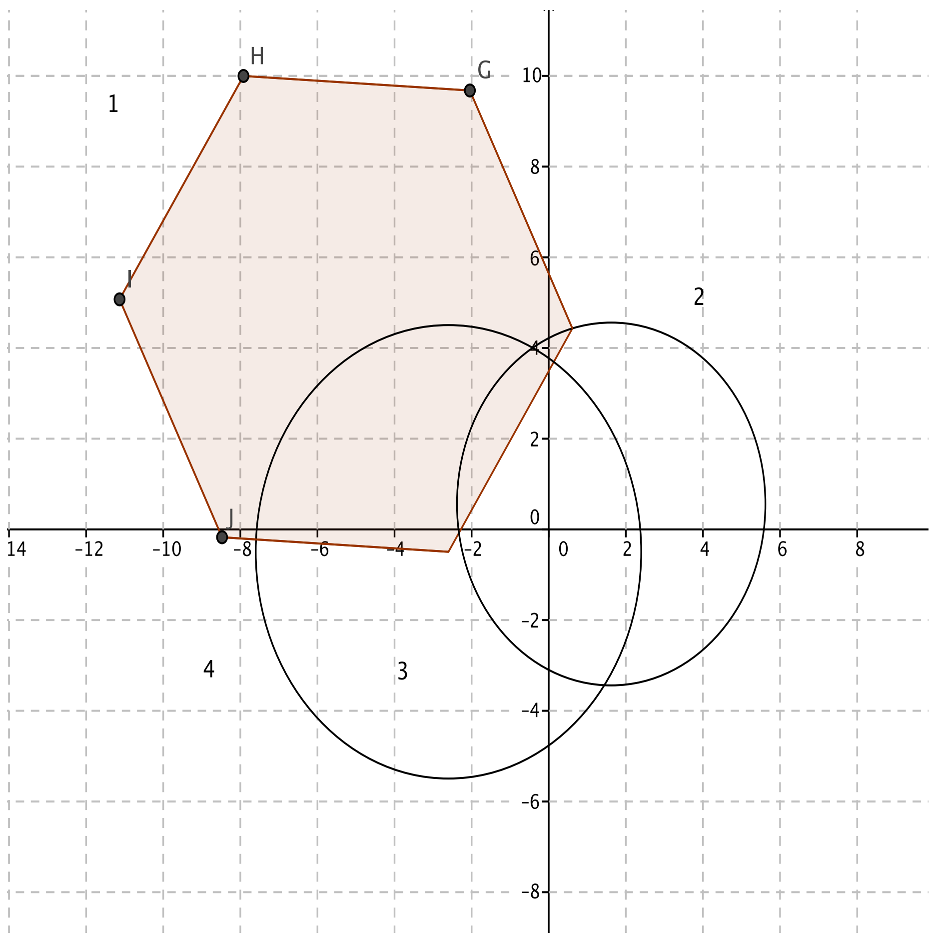
Cada capítulo cuenta con una introducción, que incluye contexto histórico y aplicaciones, definiciones, ejemplos de ejercicios resueltos, datos curiosos, preguntas reto, problemario, autoevaluación, soluciones y conclusiones, que sin ser finales, más bien son una invitación al análisis de otras posibilidades y aplicaciones de este tema.

En su versión digital, las referencias son accesibles siguiendo la liga en la red.

SUMARIO

Capítulo 1: Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades

Capítulo 1. Manejo de campos numéricos y relaciones entre cantidades



1. Introducción

El concepto de conjunto fue introducido a finales del siglo XIX, se dice que en las diferentes épocas los matemáticos analizaron la teoría de conjuntos con diferentes grados de conciencia; la teoría de conjuntos se inicia con Georg Cantor (1845-1918) sus tareas con esta teoría empezaron alrededor de 1870, en concordancia con sus investigaciones sobre series trigonométricas[1].

Por lo tanto, es importante tener plena comprensión y conocimiento de teoría de conjuntos ya que se emplea en diferentes áreas de las matemáticas y desempeña un papel esencial en nuestros días, incluso en algunos de sus aspectos elementales.

1.1. Teoría de conjuntos

Un conjunto es una colección de objetos bien definidos de cierto tipo, que se llaman elementos del conjunto[2]. Por ejemplo:

1. El conjunto de los números naturales mayores que 3 y menores que 10.
2. El conjunto de todos los municipios de Michoacán.
3. El conjunto de todos los meses del año.
4. El conjunto de letras del alfabeto griego.

Cada uno de los anteriores conjuntos se dice que está definido.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas, reservando las minúsculas para los elementos, los cuales van incluidos entre llaves, por ejemplo: A={4,5,6,7,8,9}, B={a,e,i,o,u}, C={azul, negro, gris}

Sin embargo en ocasiones tanto conjuntos como elementos se representan con el mismo tipo de caracteres.

Veamos un ejemplo:

Indicar los elementos del conjunto A formado por los números impares mayores o iguales a 3 y menores o iguales a 21.

A={3,5,7,9,11,13,15,17,19,21}.

Es conveniente señalar que no importa el orden en que se encuentran sus elementos, ya que representan al mismo conjunto, lo que sí es importante mencionar, es que los elementos no se deben repetir así $A=\{x,y,z\}=\{y,z,x\}=\{z,x,y\}$.

Conjunto vacío (ϕ)

El conjunto que carece totalmente de elementos es llamado conjunto vacío[3], se representa con el símbolo {} o ϕ[4]. También se le denomina conjunto nulo[5]. Donde el conjunto vacío es subconjunto propio[6] de todo conjunto (excepto de sí mismo). Así por ejemplo A={personas que han viajado a Venus} ⇒ $A=\phi$ o $A=\{\}$. El conjunto A es vacío, ya que ningún ser humano ha viajado a Venus aún. Observar que no se denota $A=\{\phi\}$, lo apropiado debe ser $A=\{\}$ o $A=\phi$. Otro ejemplo puede ser los números enteros entre 3 y 4, vemos que es el conjunto $B=\{\} \Rightarrow B=\phi$

Por ejemplo los elementos que forman al conjunto *A*, el conjunto de los números impares mayores que 3 y menores que 5 de la misma manera: $A=\phi$

Conjunto universal (U)

Al trabajar con conjuntos[7], es indispensable especificar un conjunto de elementos al cual nos limitamos, para encontrar elementos de otros conjuntos que intervengan en la solución de un problema. A este conjunto se le llama conjunto universal o el universo de referencia que se representa con los símbolos U o **Ω**.

El conjunto universal[8] no siempre es el mismo, ya que dependerá de cada situación definida.

Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de elementos: {Mercurio, Venus, Tierra, Marte}, entonces, podemos decir que su conjunto universal es U = {Planetas del sistema solar}.

Como puede observarse, los elementos de un conjunto pueden estar incluidos a la vez en otros conjuntos universales. En el ejemplo anterior este mismo conjunto universal también puede ser U = {los cuatro planetas más cercanos al Sol}.

Supongamos que también tenemos el siguiente conjunto de elementos: {suma, resta, multiplicación, división}, también podemos decir que su conjunto universal es U={operaciones aritméticas elementales}.

Es necesario dejar claro cuál es el conjunto universal, ya que eso definirá nuestro problema. Resumiendo, si $U \neq \phi$ es cierto conjunto, cuyos subconjuntos están en consideración, se dice que el conjunto dado es un conjunto universal; es decir, el conjunto universal, es el conjunto de todas las cosas sobre las que estemos tratando.

Otros ejemplos de conjuntos de carácter universal: N = El conjunto de los números naturales[9].

Z = El conjunto de los números enteros

Q = El conjunto de los números racionales[10]

R = El conjunto de los números reales[11]

C = El conjunto de los números complejos[12]

I = El conjunto de los números imaginarios[13]

Manejo de la teoría de conjuntos

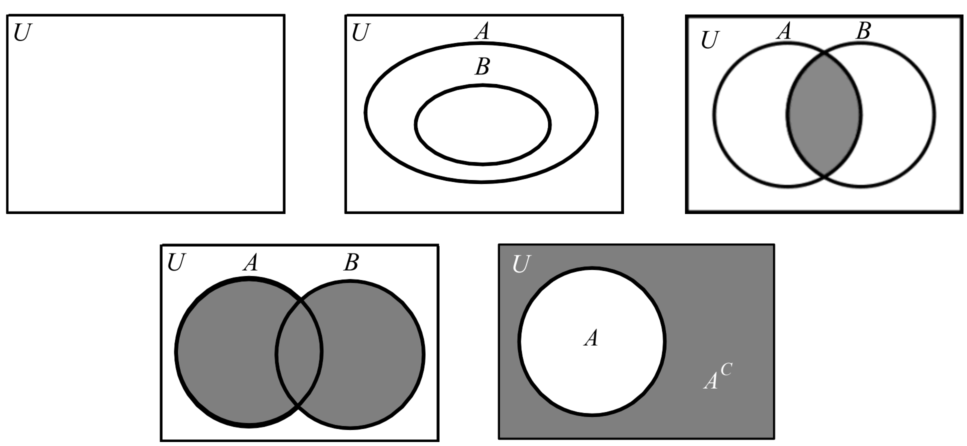
La Teoría de conjuntos es un medio para poder dominar un lenguaje que es muy útil en las diferentes ramas de las matemáticas y en muchos otros campos teóricos o aplicados; por lo que es favorable utilizar su simbología y su terminología. Esta teoría fue desarrollada por Boole y el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) a finales del siglo XIX, la cual ha tenido un gran peso en el auge de las matemáticas del siglo XX[14].

En nuestra vida diaria asociamos continuamente entes de igual naturaleza. Por ejemplo días de la semana, partes de una oración, operaciones aritméticas, partes del cuerpo, colores del arcoíris. En cada uno de los ejemplos tenemos una colección de objetos que se ve como un total. En matemáticas, una colección es un conjunto y los entes u objetos son los elementos[15].

Diagrama de Venn-Euler

Son representaciones gráficas de los conjuntos, los conjuntos no vacíos se representan por curvas, dentro de un conjunto universal *U*.

Ejemplos:



Pertenencia ($\in, \notin$)

La relación de pertenencia es considerada como un concepto primitivo o indefinible, la cual puede describirse intuitivamente como una relación que se establece entre un elemento y el conjunto al que corresponde[16]. Se expresa de manera abreviada con el símbolo $\in$ (introducido por Peano en 1889)[17].

Por ejemplo, si representamos M como el conjunto de los meses del año, con f el mes febrero, entonces $f \in M$ se lee: febrero pertenece al conjunto de los meses del año o febrero es un elemento del conjunto de los meses del año.

Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se utiliza $\notin$.

Por ejemplo $j \notin M$ y se lee: jueves no pertenece al conjunto de los meses del año o jueves no es un elemento del conjunto de los meses del año.

Así, si A es el conjunto formado por las vocales del abecedario, por lo tanto, $e \in A$ y se lee: **e** pertenece al conjunto A o **e** es elemento del conjunto A.
Otro ejemplo es A el conjunto formado por las vocales del abecedario, por lo tanto, $q \notin A$ y se lee: q no pertenece al conjunto A o que no es elemento del conjunto A.

A continuación veremos las formas en que podemos describir un conjunto, por extensión o numeración; como su nombre lo indica debemos indicar quiénes son sus elementos, veamos los siguientes ejemplos:

Expresar por extensión el conjunto formado por los números enteros mayores o iguales que uno y menores o iguales que cuatro.

Enumerando todos y cada uno de sus elementos: $A=\{1,2,3,4\}$.
Obsérvese que se anotan los elementos que lo contienen.

Expresar por extensión el conjunto de los números pares mayores a 0 (cero) e iguales o mayores que 2.

Enumerando todos y cada uno de sus elementos:

$$A=\{2,4,6,\ldots,2n\}$$

Recordemos que los números pares son múltiplos de dos.

También se hace uso de una notación más genérica denominada notación por comprensión o propiedad, donde si todos los elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad que pueda ser expresada por una proposición *p(x),* entonces se puede definir que un conjunto $A = \{x \in U \mid p(x)\}$. Y que se lee: *A* es el conjunto de elementos **x**, que cumplen la propiedad *p(x)*. Veamos algunos ejemplos*:*

Expresar por comprensión el conjunto formado por los números enteros mayores o iguales que uno y menores o iguales que cuatro.

Diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza: $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 4\}$ y se lee: El elemento *n* que pertenece al conjunto de los números naturales tal que *n* sea mayor o igual a 1 pero menor o igual a 4.

Expresar por comprensión el conjunto de los números pares mayores o iguales que 2.

Diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza:

$A = \{x \in \mathrm{N} \mid x = 2\mathrm{N}, \forall\, x \geq 2\}$ y se lee: El elemento *x* que pertenece al conjunto de los números naturales, tal que *x* sea igual al producto 2N para toda *x* que sea mayor o igual a dos.

Inclusión ($\subset$, $\supset$, $\not\subset$)

La relación de inclusión es necesaria para entender la relación de orden, pero además para comprender el concepto de número.

Cuando se establece una relación entre las partes y el todo es inferir que las características o propiedades de un conjunto, o de un todo comprenden a los subconjuntos que lo forman[18].

En consecuencia la relación de inclusión entre dos conjuntos existe cuando todos los elementos de un conjunto están contenidos en el otro y se representa con el símbolo $\subset$. De esta relación resulta el término subconjunto, que se define como; todos los elementos de un conjunto que forman parte de otro.

La relación de inclusión también se puede representar con diagramas de Venn-Euler[19].

Por lo tanto, si los elementos de un conjunto A pertenecen a los elementos de un conjunto B, se señala que $A \subset B$ y se lee: A es un subconjunto propio de B, o A está incluida en B, lo que también se puede escribir como $B \supset A$ y que se lee respectivamente B es superconjunto propio de A o B contiene a A.

Por comprensión, diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza: $n \in \{A \mid n \in B\}$.

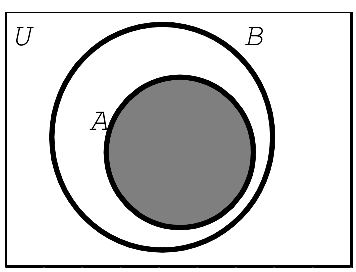


Diagrama de Venn-Euler que muestra A⊂B o B⊃A

Propiedades de la inclusión:

1. $\phi \subset A$
2. $A \subset A$, ya que todo conjunto A es subconjunto propio de sí mismo
3. $A \subset B$; solo si todo elemento de A es elemento de B
4. $A \subset B$ y $B \subset D \Rightarrow A \subset D$

Por ejemplo los conjuntos A = {a,e,i,o,u} y B = {a,b,c,…,x,y,z}, los cuales se indican como A⊂B (A es un subconjunto propio de B, o bien; A está incluida en B).

También es común denotarlo de la siguiente forma B⊃A (B es superconjunto propio de A, o bien; B contiene a A).

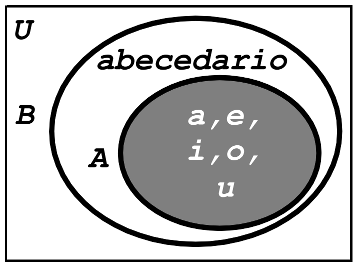


Diagrama de Venn-Euler que muestra A⊂B o B⊃A

Por ejemplo los conjuntos U={Vehículos}, A={Vehículos terrestres} y B={carreta, automóvil, ferrocarril}, los cuales se indican como B⊂A (B es un subconjunto propio de A, o bien; B está incluida en A).
También es común denotarlo de la siguiente forma A⊃B (A es superconjunto propio de B, o bien; A contiene a B).

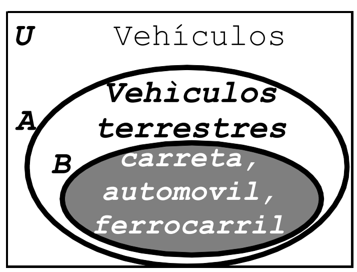


Diagrama de Venn-Euler que muestra B⊂A o A⊃B

Veamos otro ejemplo; si tenemos los siguientes conjuntos: *C*={cuadriláteros} y *R*={rombo, rectángulo}.

Puesto que cada elemento del conjunto *R* es también un elemento del conjunto *C*, entonces R⊂C se lee: R es subconjunto propio de C o R está incluido en C.

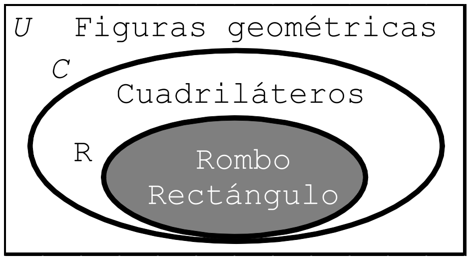


Diagrama de Venn-Euler que muestra R⊂C

Si un conjunto no es subconjunto de otro, se utiliza el símbolo $\not\subset$.

Veamos un ejemplo más;

Sean los siguientes conjuntos:

I = {instrumentos musicales}

V = {instrumentos musicales de viento}

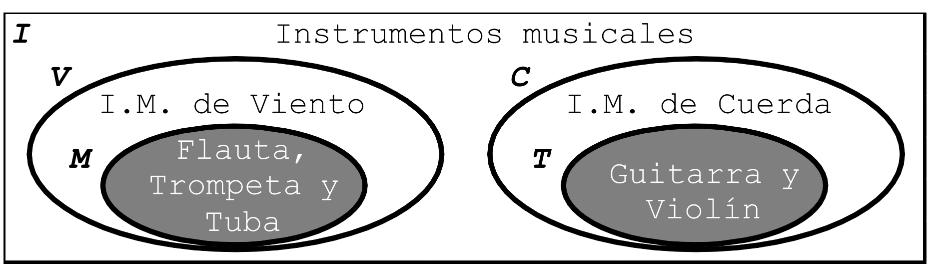
C = {instrumentos musicales de cuerda}

M = {flauta, trompeta, tuba}

T = {guitarra, violín}

Podemos expresar que $V \subset I$ y $C \subset I$, también podemos decir que

$M \subset V$ y $M \subset I$; pero $M \not\subset C$ y que $T \subset C$ y $T \subset I$, pero $T \not\subset V$.



El conjunto integrado por todos los subconjuntos de uno dado A, se llama partes de *A*, y se indica p(*A*). Por tanto, la correlación $B \subset A$ es similar a decir $B \in$ p(A).

Veamos el siguiente ejemplo:

1).- Si A={a,b} entonces p(A)={ϕ,{a},{b},A}.

2).- Si a∈A entonces {a}∈p{A}.

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos *A* y *B* se dicen iguales, y se denota *A* = *B*, si paralelamente *A*⊂*B* y *B*⊂*A*; esto semeja a decir que tienen idénticos elementos (o bien la misma cualidad característica). Esto es, si y solo sí todo elemento de *A* está también incluido en *B* y todo elemento de *B* está incluido en *A*. En símbolos: $\forall x,\ x\in A \Leftrightarrow x\in B$.

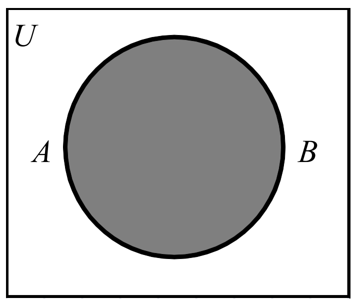


Diagrama de Venn-Euler que muestra *A* =*B*

También se pueden representar como A=B[20] y cabe señalar que no es relevante el orden en que se encuentran los elementos de cada conjunto.

Otro ejemplo de esto es:

Si *M* = {10,11,12,13,14,15}

N = {14,11,15,12,10,13}

Entonces *M* = *N*

Cabe señalar que no todos los conjuntos equivalentes son iguales, pero todos los conjuntos iguales son equivalentes.

Número de subconjuntos de un conjunto

Un conjunto *P* {*a,b*} tiene los subconjuntos ϕ, {*a*},{*b*} y él mismo {*a,b*}, pero para estimar el número de subconjuntos de un conjunto dado, recordaremos que el conjunto vacío es subconjunto propio de todo conjunto (excepto de sí mismo), esto es $\phi \subset A$ y además los conjuntos de un conjunto *A* que sean diferentes a *A* se llaman subconjuntos impropios.

Teniendo presente el anterior señalamiento, la expresión para deducir el número de subconjuntos impropios de un conjunto es:

Número de subconjuntos impropios de un conjunto = $2^n - 1$

Donde **n** es el número de elementos del conjunto.

Determinaremos el número de conjuntos impropios que se pueden formar a partir del conjunto dado A={amarillo, blanco, café}.

El número de subconjuntos impropios de un conjunto = $2^n - 1$

Donde n = 3 (*amarillo*,*blanco*,*café*)

$\therefore$ Número de subconjuntos impropios de un conjunto = $2^3 - 1 = 7$

Esto es: ϕ, {*amarillo*}, {*blanco*}, {*café*}, {*amarillo*, *blanco*},

{*amarillo*, *café*}, {*blanco*, *café*}

Prestar atención que $A \subset A$ (*A* es subconjunto propio de sí mismo). Los subconjuntos excepto {*amarillo, blanco, café*} se denominan subconjuntos impropios.

Operaciones con conjuntos

Unión ($\cup$)

Se llama unión de dos conjuntos dados A y B, al nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B. Si lo anterior se expresa por comprensión, queda de la siguiente manera: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

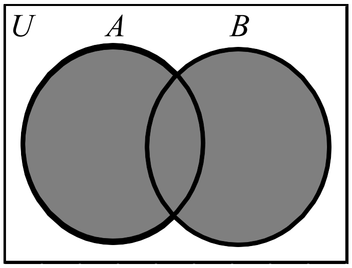


Diagrama de Venn-Euler que ilustra $A \cup B$

Propiedades de la unión[21] Si el

a) Identidad $A \cup \phi = A$

b) Idempotencia $A \cup A = A$

c) Conmutatividad $A \cup B = B \cup A$

d) Asociatividad $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

e) Distributividad $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

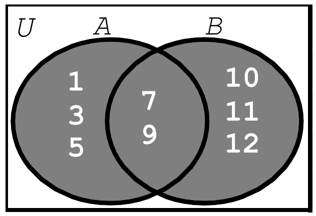
f) Absorción $A \cup (A \cap B) = A$

g) Complementariedad $A \cup A^c = U$

Sean los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{7,9,10,11,12\}$, definir por comprensión y extensión la unión de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

Por comprensión: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ y se lee: el conjunto de los elementos x tal que x pertenece al conjunto A o que pertenece a B.

Por extensión: $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12\}$.



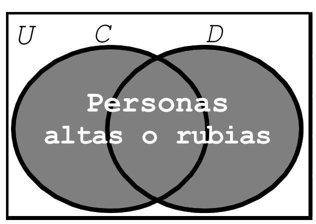
$A \cup B$

Sean los conjuntos C = {personas altas} y

D = {personas rubias}, definir por comprensión y extensión la unión de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn- Euler.

Por comprensión: $C \cup D$={*personas* personas $\in$ *personas altas* $\vee$ *personas* $\in$ *personas rubias*} y se lee el conjunto de pe*rsonas* tal que pe*rsonas* pertenecen al conjunto de *Personas altas* o que *Personas* pertenecen al conjunto de *personas rubias*.

Por extensión: $C \cup D$ ={personas altas o rubias}.



$C \cup D$

Intersección ($\cap$)

Se llama intersección al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B de forma simultánea. Si lo anterior lo definimos por comprensión, queda de la siguiente manera: $A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

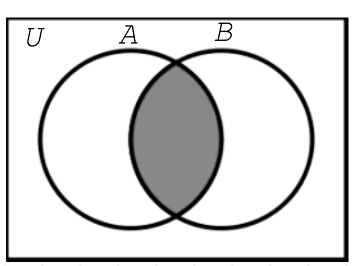


Diagrama de Venn-Euler que ilustra $A \cap B$

Si dos conjuntos no tienen elementos similares, se llaman *disjuntos* y su intersección es el conjunto vacío.

Propiedades de la intersección[22]

a) Identidad $A \cap U = A$

b) Idempotencia $A \cap A = A$

c) Commutatividad $A \cap B = B \cap A$

d) Asociatividad $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

e) Distributividad $(A \cap B) \cup C = (A \cup D) \cap (B \cup C)$

f).Absorción $A \cap (A \cup B) = \mathrm{A}$

g) Complementaridad $A \cap A^c = \phi$

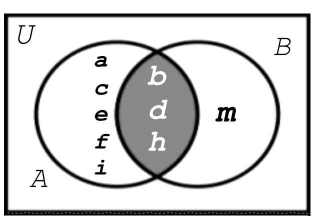
Todo conjunto en el que se hayan definido dos operaciones que tengan las propiedades de la unión e intersección, se le denomina Álgebra de Boole.

Sean $A = \{a, b, c, d, e, f, h, i\}$ y $B = \{b, d, h, m\}$, definir por comprensión y extensión la intersección de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

Los elementos *b, d, h* son comunes a ambos conjuntos.

Por comprensión $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ y se lee: el conjunto de los elementos x tal que x pertenece al conjunto A y que pertenece a B.

Por extensión se representan así: $A \cap B = \{\mathrm{b, d, h}\}$.



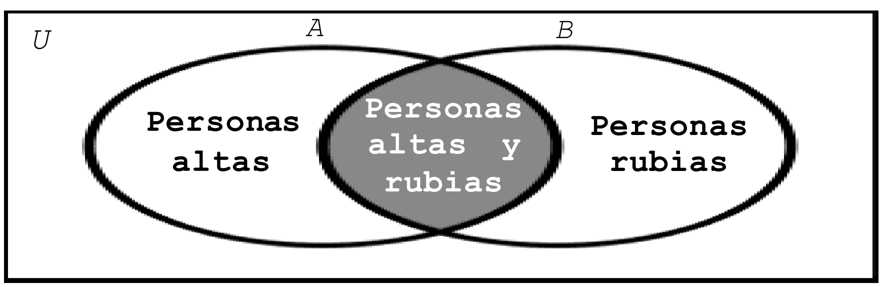
A ∩ B

Sean los conjuntos *A*={personas altas} y *B*={personas rubias}. Definir por comprensión y extensión la intersección de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

Las propiedades altas y rubias deben ser comunes a ambos conjuntos en la intersección.

Por comprensión $A \cap B$ = {*personas* | *Personas* ∈ *personas altas* ∧ *personas* ∈ *personas rubias*} y se lee el conjunto de *personas* tal que *personas* pertenecen al conjunto de *personas altas* y que *personas* pertenecen al conjunto de *personas rubias*.

Por extensión se representan así: $A \cap B$ = {*personas altas* y que sean *rubias*}.



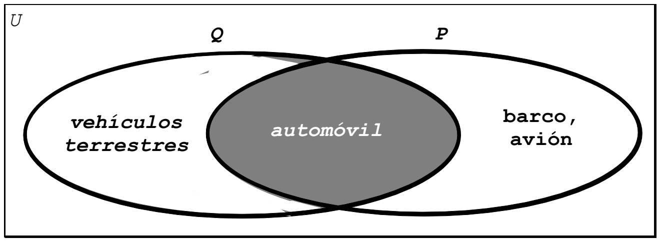
$A \cap B$

Sean Q = {vehículos terrestres} y P = {automóvil, barco, avión}. Definir por comprensión y extensión la intersección de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

La propiedad vehículo del conjunto *Q* debe ser común a alguno de los elementos del conjunto *P* en la intersección.

Por comprensión: $Q \cap P$={*vehículo* | *vehículo* ∈ *Q* ∧ *vehículo* ∈ *P*} y se lee: El conjunto de *vehículos* tal que *Vehículos* pertenecen al conjunto *Q* y *vehículos* pertenecen al conjunto *P*.

Por extensión: $Q \cap P = \{automóvil\}$.



Diferencia (– o \)

Se llama diferencia al conjunto formado por los elementos de un conjunto que no se encuentran en otro conjunto referido. Es decir, los elementos de un conjunto A que no se encuentran en un conjunto B y se representa por $A–B$ o $A \setminus B$.

Si definimos por comprensión lo anterior, queda de la siguiente manera:

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ o bien $x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$.

Una propiedad interesante de la diferencia es que $A \cap B = A - (A–B)$, esto debido a lo siguiente: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge [x \notin (A–B)] \Leftrightarrow x \in A - (A–B)$

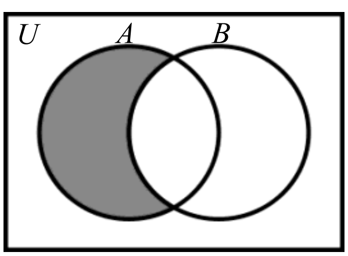


Diagrama de Venn-Euler que muestra $A - B$

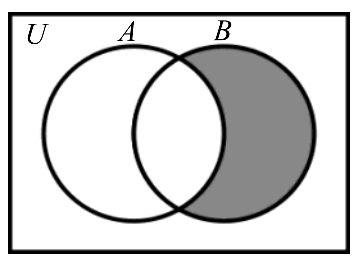


Diagrama de Venn-Euler que muestra $B - A$

Propiedades de la diferencia

a) Identidad: $A - \phi = A$

b) $\phi - A = \phi$

c) Conmutativa: la diferencia de conjuntos no es conmutativa.

d) Asociativa: la diferencia de conjuntos no es asociativa.

e) Distributiva: la diferencia de conjuntos es distributiva respecto a la unión y la intersección y presenta dos casos particulares:

i) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ii) $(A \cup B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

f) Asimetría: $A - B = (A - B) \cup (B - A)$ y $B - A = (B - A) \cup (A\text{-}B)$

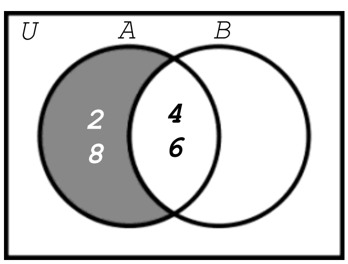
(Para este último, cuando se omiten aquellos elementos que se encuentran en el área de intersección)

Por ejemplo, sea A = {2,4,6,8} y B = {6,4}. Definir por comprensión y extensión la diferencia A-B y representar dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

Los elementos *2 y 8* no están en el conjunto *B*.

Por comprensión $A - B = \{x \,/ x \in A \wedge x \notin B\}$ y se lee: el conjunto de elementos x tal que x pertenecen a A y x no pertenecen a B.

Por extensión: $A–B = \{2,8\}$.



$A - B$

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, e, f, g\}$. Definir por comprensión y extensión la diferencia A-B y B-A. Representar dichas operaciones en un diagrama de Venn-Euler respectivamente.

Para la diferencia *A–B,* el elemento de *A* que no está en *B* es *d*.

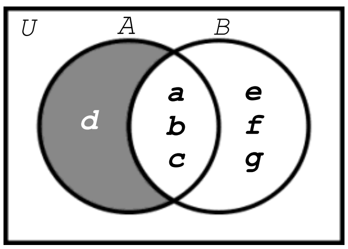
Por comprensión: $A–B=\{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ y se lee: el conjunto de elementos x, tal que x pertenece a **A** y x no pertenecen a **B**.

Por extensión: $A–B=\{d\}$.

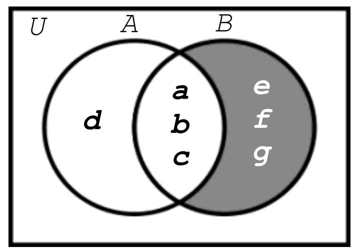
Para la diferencia $B–A$, los elementos de B que no están en A son e, f y g.

Por comprensión: $B–A=\{ x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$ y se lee: el conjunto de elementos x, tal que x pertenece a B y x no pertenece a A.

Por extensión: $B–A=\{e,f,g\}$.



A − B



B − A

Complemento (A^C)

Los elementos de un conjunto dado que no pertenezcan a un conjunto universo, se les denomina conjunto complemento del mismo y se representan por A^C. Lo anterior se define como $A^C = U – A = \{x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$.

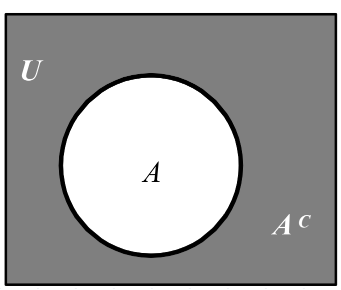


Diagrama de Venn-Euler que muestra un conjunto A contenido en otro conjunto U y su complemento A^C

Una propiedad interesante del complemento es que si $A \subset U$ y $B \subset U$ entonces:

$x \in (A – B) \Leftrightarrow x \in (A \cap B^C)$ de manera que $A – B = A \cap B^C$

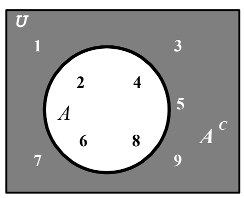
Pero también:

$x \in (A \cap B^C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C \Leftrightarrow x \in B^C \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B^C \wedge x \notin A^C \Leftrightarrow x \in (B^C - A^C)$

De tal forma que $A - B = (B^C - A^C)$.

Sea U={1,2,3,4,5,6,7,8,9} y A={2,4,6,8}. Definir por comprensión y extensión el complemento del conjunto A y representar dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

Los elementos del conjunto universo 1,3,5,7 y 9 no están presentes en el conjunto A.
Por comprensión : $A^C = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$ y se lee: el conjunto de elementos x, tal que x no pertenece a A y x pertenecen a U.
Por extensión: A^C={1,3,5,7,9}.



A^C={1,3,5,7,9}

Producto cartesiano (×)

Un par ordenado está conformado por dos elementos en un orden establecido (x, y). Donde x se define como primer elemento, y y el segundo elemento, se denotan dentro de un paréntesis separados por punto tal y como se exhibe.

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, que se denota por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados formados por los elementos de A que se asocian con los elementos de B. Esto es:

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in \mathrm{B}\} = \{(x, y) - (x, y) \Rightarrow x \in A \wedge y \in B\}$

Donde el orden de los componentes sí importa, ya que el producto cartesiano no es conmutativo, es decir, $A \times B \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

Si A={1,2} y B={x, y, z}, obtén el producto cartesiano de A y B definiéndolo por comprensión y extensión.

El producto cartesiano de estos dos conjuntos definido por comprensión será:

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Por extensión, se define lo anterior como

$A \times B = \{(1, x),(1, y),(1,z),$

$(2, x),(2, y),(2,z)\}$.

Nótese que $A \times B \neq B \times A$ (porque no es conmutativo el producto cartesiano), pues al ser pares ordenados, el par $(1,z)$ es distinto del par $(z,1)$.

Partiendo de los conjuntos E={rosas, claveles, alcatraces} y

C={rojo, amarillo, blanco}. Determinar el producto cartesiano de E y C definiéndolo por comprensión y extensión. Mediante un cuadro representar tal operación.

El producto cartesiano de estos dos conjuntos definido por comprensión será: $E \times C$ $= \{(x, y) \mid x \in E \wedge y \in C\}$.

Por extensión, se define lo anterior como

$E \times C$={(rosas, rojo),(rosas, amarillo),(rosas, blanco),

(claveles, rojo),(claveles, amarillo),(claveles, blanco),

(alcatraces, rojo),(alcatraces, amarillo), (alcatraces, blanco)}.

Y

y_3	**blanco**	(rosas, blanco)	(claveles, blanco)	(alcatraces, blanco)
y_2	**amarillo**	(rosas, amarillo)	(claveles, amarillo)	(alcatraces, amarillo)
y_1	**rojo**	(rosas, rojo)	(claveles, rojo)	(alcatraces; rojos)
C / E		**rosas**	**claveles**	**alcatraces**
		x_1	x_2	x_3

X

En el cuadro se representan pares ordenados, donde el primer elemento componente corresponde a la especie de flor y el segundo elemento componente al color de flor.

Estructuras Numéricas

Una estructura numérica[22] se forma por un conjunto y una o varias operaciones específicas y que además están relacionadas con otro(s) conjunto(s). Las fundamentales son: grupos, anillos y campo.

Grupo

Es un conjunto con una operación binomia[23] o aditiva definida, que cumple con las siguientes propiedades:

a) Ley de la cerradura o de composición interna, donde aplicando la operación binomia el resultado pertenece al conjunto dado.
b) Es asociativa.
c) Existe el elemento neutro y es único[24]
d) Existe elemento inverso con respecto a la operación, por lo que se dice que forma grupo.
e) Si además la operación cumple con la propiedad conmutativa es un grupo conmutativo o abeliano.

Por ejemplo:

a) 4+2=6; 6€Z
b) 3+7+6+4=20 $\Rightarrow$ (3+7)+6+4=20
c) 16+0=16
d) 7; -7
e) 2+7+4=13 $\Rightarrow$ 4+2+7=13

Nota: los N no forman ninguna estructura.

Anillo

Es un conjunto con dos operaciones definidas, la aditiva y la multiplicativa, que cumplen con las siguientes propiedades:

Para la aditiva que debe formar grupo abeliano.

a) Ley de la cerradura o de composición interna.
b) Es asociativa.
c) Existe el elemento neutro y es único.
d) Existe elemento inverso con respecto a la operación aditiva.
e) Es conmutativa.

Así por ejemplo:

a) 18+(-8)=10 donde 18,-8 y 10 € Z
b) 9+(-2)+4=11 ⇒ [9+(-2)]+4=11
c) -8+0=-8
d) 14; -14
e) 7+(-4)+13=16 ⇒ 13+7+(-4)=16

Para la multiplicativa:

a) Ley de la cerradura o de composición interna.
b) Es asociativa
c) Distributiva respecto a la suma por la derecha y por la izquierda.

Si además la operación multiplicativa es conmutativa se llama anillo conmutativo.

Por ejemplo:

a) 4×(-5)=-20 donde 4,-5 y -20 € Z
b) 4×2×5=40 ⇒ (4×2) ×5=40
c) 3(2+5)=3×2+3×5 I ⇒ (2+5)3= 2×3+5×3

   (por la derecha) (por la izquierda)

Las operaciones de adición y de multiplicación con Z tienen estructura de anillo.

Campo

Es el conjunto de los números racionales, que puntualizando las operaciones aditivas y multiplicativas en él, debe cumplir las siguientes propiedades:

Para la aditiva debe formar grupo abeliano.

a) Ley de la cerradura o de composición interna.
b) Es asociativa.
c) Existe el elemento neutro y es único
d) Existe elemento inverso respecto de la suma.
e) Es conmutativa.

Veamos algunos ejemplos:

a) $\frac{3}{4}+\frac{7}{5}=\frac{15+28}{20}=\frac{43}{20}; \frac{43}{20} \in \mathrm{Q}$
b) $\frac{1}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{4}=\frac{8+48+30}{24}=\frac{86}{24} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{2}\right)+\frac{5}{4}=\frac{86}{24}$
c) $\frac{4}{5}+0=\frac{4}{5}$
d) $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}$
e) $\frac{1}{3}+\frac{4}{2}+\frac{5}{4}=\frac{4}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{86}{24}$

Para la multiplicativa

a) Ley de la cerradura o de composición interna.
b) Es asociativa.
c) Existe el elemento neutro y es único[25]
d) Existe elemento inverso con respecto a la propiedad multiplicativa.
e) Es conmutativa.
f) Además, la operación multiplicativa debe ser distributiva por la derecha y por la izquierda, respecto a la aditiva.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{7}\times\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{18}{35}, \ -\frac{18}{35} \in \mathrm{Q}$
b) $\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{20}{126} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}\right)\times\frac{5}{6}=\frac{20}{126}=\frac{10}{63}$
c) $\frac{2}{7}\times 1=\frac{2}{7}$
d) $\frac{4}{5}; \frac{5}{4}$

e) $\frac{4}{3} \times \frac{1}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{20}{126}$

f) $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{5}\right) = \frac{28}{9} + \frac{7}{21} - \frac{14}{15} = \frac{8820+945-2646}{2835} = \frac{7119}{2835} = \frac{113}{45}$

Queda al lector probar por la izquierda.

Otra manera común de resolver el anterior problema, también por la izquierda, es la siguiente:

$$\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{140+15-42}{105}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{113}{105} = \frac{791}{315} = \frac{113}{45}$$

Del análisis de las estructuras numéricas, se puede concluir que

N no forman ninguna estructura numérica.

Z forma grupo abeliano ya que con la multiplicación no forma estructura de grupo pero combinando la suma y la multiplicación tiene estructura de anillo.

Q estos números con la suma y la multiplicación forman grupo abeliano ya que con estas operaciones tienen estructura de campo.

R tienen estructura de campo.

I no cumplen ninguna, solo complementan a los racionales.

1.2. Aplicación del campo de los números reales (ℝ)

Un número es un símbolo que representa una cantidad, con ellos podemos contar, medir, hacer operaciones, pero es muy difícil hacer una definición de manera formal.

Sin embargo[26], se puede decir que un número real es un número positivo o negativo que puede o no tener cifras de decimales finito o infinito y puede representarse mediante un punto en la recta de números reales. En este sentido, el teorema fundamental de la geometría analítica, establece que a cada número real le corresponde un punto en la recta de los números reales y viceversa.

Naturales

Cero

Enteros negativos

Enteros Z y racionales Q

Números Racionales Q

Números Irracionales I

Números Reales R

Números naturales (ℕ)

Como su nombre lo dice, son los que nos sirven para contar de manera natural y están formados por los números enteros positivos[27,28].

Los números naturales forman una serie que no tiene fin porque siempre puede añadirse uno más. Es una serie infinita, la letra ℕ mayúscula se usa para representarlos:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

Cotidianamente los usamos:

- Si tenemos $10 y nos pagan $50, tendremos $60.
- Si estamos pasando mucho calor porque estamos a 32° y aumenta un grado estaremos a 33°.
- Si nos encontramos en la segunda planta de un hotel o en el sexto piso.
- Si nos referimos a la altura del volcán Paricutín, con 3,170 metros sobre el nivel del mar[29].

Si observamos lo anterior, claramente se puede diferenciar de otros números llamados números negativos, que se definen como los números opuestos de los naturales, en el entendido de que opuesto es el número que al sumarlo con él da cero, que es el elemento neutro de la adición.

Por ejemplo el opuesto de 100 (tener 100) es -100 (deber 100), ya que 100+(-100)=0 (si tengo 100 y debo 100 no tengo nada).

De la misma manera, podemos expresar otras situaciones como se muestra a continuación:

-tengo $10 (+$10) o debo $10 (-$10).

-hace mucho calor (40^0) o mucho frío (-40^0).

Desde un punto de vista matemático, nos encontramos con que

1. La suma de dos números naturales es otro número natural (2+3=5), esta es la propiedad de cerradura de la suma de números naturales[30].
2. La multiplicación de dos números naturales es un número natural (2×3=2+2+2=3+3=6), podríamos llamarla suma abreviada, ya que se trata de una suma de sumandos iguales, y por tanto, también podemos decir que el producto es una operación en el conjunto de los números naturales, también llamada propiedad de cerradura para la multiplicación.

Sin embargo, ¿qué resultado nos queda de la operación 20–30?, observe que si el minuendo es mayor que el sustraendo el resultado es un número natural. Pero si el minuendo es menor que el sustraendo el resultado no cae en los naturales, para ello introducimos otro conjunto de números, llamados números negativos, que son los que nos dan la respuesta a la operación 20–30= –10.

Números enteros (Z)

Al conjunto formado por los enteros positivos, los enteros negativos y el cero, se les llama conjunto de los números enteros y se representan con la letra mayúscula Z.

$$Z = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\ldots\}$$

Operaciones con números enteros

Las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con los números enteros son: suma, resta, multiplicación y división, es conveniente que se analicen las propiedades[31] que gozan estas operaciones. La aplicación correcta de las mismas ayuda a un manejo fluido de las operaciones con números reales. Además trataremos de aplicar el lenguaje simbólico de la matemática que se estudió en la unidad anterior.

Suma

La suma de dos números naturales es otro número natural: $a+b=c$, donde a y b se llaman sumandos y c la suma.

a) Para sumar dos enteros del mismo signo[32]. Se suman sus valores absolutos[33] y se pone el mismo signo que tienen los sumandos.
b) Para sumar dos enteros de distinto signo[7]. Se restan sus valores absolutos (el menor del mayor) y se pone el signo que tiene el sumando de mayor valor absoluto.

Resolvamos algunos ejercicios para aclararlo

$(+4)+(+2)= +6 \Rightarrow |+4| + |+2| = 4 + 2 = +6$

$(-3)+(-6) = -9 \Rightarrow |-3| + |-6| = 3 + 6 = -9$

$(+7)+(-2) = +5 \Rightarrow |+7| > |-2| \therefore 7 - 2 = +5$

$(-8)+(+3) = -5 \Rightarrow |-8| > |+3| \therefore 8 - 3 = -5$

La suma cumple con las siguientes propiedades:

- Ley interna

El resultado de sumar dos números reales es otro número real: $a + b \in R$.

Así por ejemplo: $2 + 3 = 5 \in R$

Ley de cierre

Para cada par de números reales a y b existe un único número real llamado suma denotado por a + b: $\forall a \wedge \forall b \in R, \exists c \in R \mid a + b = c$. Por ejemplo: $1 + 2 = 3 \in R$

- Propiedad asociativa

En una adición de tres sumandos es igual sumar los dos primeros y a esto el tercero, que sumar al primero la suma del segundo y del tercero: $\forall a, b, c \in R, (a + b) + c = a + (b + c)$.

En otras palabras, el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado o suma. Por ejemplo:$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$.

Propiedad conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma: $\forall a, b \in R, a + b = b + a$.

En otras palabras, el orden de los sumandos no varía la suma. Por ejemplo:$1 + 2 = 2 + 1$

- Existencia del elemento neutro

Existe un número real llamado cero, tal que sumado a cualquier número **a** da como resultado el mismo número **a**: $\forall a \in R, \exists 0 \in R \mid a + 0 = 0 + a = a$.

En otras palabras, el 0 (cero) es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número. Por ejemplo: $1 + 0 = 1 \in R$ y $2 + 0 = 2 \in R$

- Existencia del inverso

Para cualquier número real **a** existe un número real **–a** llamado inverso aditivo u opuesto, tal que sumado con **a** da como resultado el elemento neutro.

$\forall a \in R, \exists -a \in R \mid a + (-a) = (-a) + a = 0$

También conocido como elemento opuesto, en otras palabras, se entiende que dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero. Por ejemplo: 1 – 1 = 0

Nota: El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número, esto es:

– (– a) = a.

Resta

Para restar dos números enteros hay que sumar al primero el opuesto del segundo. Y está conformada por las siguientes partes: Diferencia (D)= Minuendo (M) – Sustraendo (S).

Por ejemplo:(-9)-(+7)=(-9)+opuesto de (+7) = (-9)+(-7)= -16

Sumas y restas con paréntesis

a) Paréntesis antepuestos del signo (+). Se elimina el signo y el paréntesis, y se dejan los sumandos del interior con su signo.
b) Paréntesis antepuestos del signo (–). Se elimina el signo y el paréntesis, y todos los signos de los sumandos del interior se convierten en su opuesto.

Veamos unos ejemplos:

+(-4+7-5**)**= -4+7-5 = -2

11**+(**-4+7-5**)**= 11-4+7-5 = 9

–**(**-4+7-5**)**= +4-7+5 = 2

11**-(**-4+7-5**)** = 11+4-7+5 = 13

Multiplicación

Para multiplicar dos números enteros:

a) Se multiplican sus valores absolutos.
b) Al resultado le ponemos el signo (+) si ambos números son de igual signo y el signo (–) si son de signos diferentes.

$$\left.\begin{array}{lll} (+)\ (+) & = & (+) \\ (-)\ (-) & = & (+) \\ (+)\ (-) & = & (-) \\ (-)\ (+) & = & (-) \end{array}\right\}$$ Regla de los signos para la multiplicación.

Ejemplos: $(-4)\times(+2)=-8$, $(+4)\times(-2)=-8$, $(-4)\times(-2)=+8$, $(+4)\times(+2)=+8$

El producto de números reales cumple con las siguientes propiedades:

- Ley interna
- Propiedad asociativa
- Propiedad conmutativa
- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma
- Existencia del elemento neutro
- Existencia del inverso
- Sacar factor común

Ley interna

El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real: $a \times b \in R$.

Un ejemplo de lo anterior: $4 \times 2 = 8 \in R$ y $2 \times 3 = 6 \in R$

Propiedad asociativa

El modo de agrupar los factores no afecta el resultado. Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$, ejemplo: $(1\times 2)\times 3 = 1\times(2\times 3)$

Propiedad conmutativa

El orden de los factores no varía el producto: $a \times b = b \times a$. Ejemplo: $5 \times 8 = 8 \times 5$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma[34]

Para multiplicar una suma algebraica por un entero, se multiplica cada uno de los términos por el entero, aplicando la regla de los signos y luego se suman los resultados:

$$\forall\ a, b, c \in R, (a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

En otras palabras, el producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

Ejemplo:

```
(-3)(4-2+1-3)  =   -12 + 6 - 3 + 9
               =  (6 + 9)- (12 +3)
               =  15 - 15
               =  0
```

Existencia del elemento neutro:

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número: $a \times 1 = a$. Ejemplo: $7 \times 1 = 7$

Existencia del inverso

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad: $a \times \frac{1}{a} = 1$. Ejemplo: $7 \times \frac{1}{7} = 1$

Sacar factor común[35]

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva (vista en el tópico 2.4.3.4.). Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

$$a \times b + a \times c = a \times (b + c)$$

por ejemplo: $2 \times 3 + 5 \times 3 = 3 \times (2+5)$

División

La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor[36].

Para calcular el cociente exacto de dos números enteros:

a) Se dividen sus valores absolutos.
b) Al resultado le ponemos el signo (+) si ambos números son de igual signo y el signo (–) si son de signos diferentes.

$$\left.\begin{array}{ccccc} (+) & / & (+) & = & (+) \\ (-) & / & (-) & = & (+) \\ (+) & / & (-) & = & (-) \\ (-) & / & (+) & = & (-) \end{array}\right\} \text{Regla de los signos para la división.}$$

Ejemplo: $\frac{-4}{+2} = -2, \frac{+4}{-2} 0 - 2, \ \frac{-4}{-2} = +2, \frac{+4}{+2} = +2$

La división goza de las mismas propiedades que la multiplicación.

Jerarquía de las operaciones

Las operaciones combinadas de números enteros hay que efectuarlas siguiendo un orden:

a) Se resuelve lo que esté dentro de símbolos de agrupación (corchetes y paréntesis).
b) Se resuelve las expresiones con exponentes[37] y después, se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.
c) Por último, se resuelven las sumas y las restas en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.

Ejemplo:

$$\frac{4[12(9-7)+4]-(5+8)}{3^4+2^3}=\frac{4[12(2)+4]-(13)}{81+8}=\frac{4[24+4]-13}{89}$$

$$=\frac{4[28]-13}{89}=\frac{112-13}{89}=\frac{99}{89}$$

Múltiplos y divisores

Si un número entero **b** se multiplica por otro entero, el producto es un múltiplo de los dos, entonces los múltiplos se obtienen multiplicando por la serie de los números naturales.

Ejemplo : sea **a**=21, entonces **b**=7 es múltiplo de **a**, ya que **a=**3**b**.

Ejemplo:

Número	Múltiplos
2	2,4,6,8,10,…
3	3,6,9,12,15,…
4	4,8,12,16,20,…
10	10,20,30,40,…

Nótese que los múltiplos de un número forman una serie infinita.

Propiedades de los múltiplos

Sabemos que para hallar los múltiplos de un número entero **b,** debemos multiplicar dicho número **b** por 1,2, 3,..., **n**. Esto nos arroja un múltiplo **a** y el número **n** por el que se ha multiplicado es un divisor exacto de **a**.

Las siguientes propiedades nos permiten averiguar si un número es múltiplo de otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar una división por tanteo.

Criterios de divisibilidad

Sabemos que para hallar los divisores de un número **n**, debemos dividir dicho número por 1,2, 3,...,**n**. Si la división es exacta el número por el que se ha dividido es un divisor de **n**. Si el número **n** es grande, hacer una división puede llevarnos mucho tiempo. Además, no nos interesa la división en sí, sino solo saber si es exacta o no[38].

Los siguientes criterios nos permiten averiguar si un número es divisible por otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar una división.

No.	Criterio	Ejemplo
2	El número termina en cifra par.	546: porque "6" es par.
3	La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	474: porque 4+ 7+ 4 = 15 es múltiplo de 3.
4	El número formado por las dos últimas cifras es 00 o múltiplo de 4.	7324: porque 24 es múltiplo de 4.
5	La última cifra es 0 o 5.	125: porque acaba en 5.
6	El número es divisible por 2 y por 3.	36: Ver criterios para 2 y 3.
7	Para números de 3 cifras: al número formado por las dos primeras cifras se le resta la última multiplicada por 2. Si el resultado es múltiplo de 7, el número original también lo es.	266: porque 26 – 6×2=14, que es múltiplo de 7.
	Para números de más de 3 cifras: dividir de izquierda a derecha en grupos de 3 cifras y aplicar el criterio de arriba a cada grupo. Sumar y restar alternativamente el resultado obtenido en cada grupo y comprobar si el resultado final es un múltiplo de 7.	86419746: porque 86,419,746 ⇒ +(86)–(419)+(746) = +(8–6×2)–(41–9×2)+(74–6×2) = +(8–12)–(41–18)+(74–12) = +(–4)–(23)+(62)= –4–23+62=35
8	El número formado por las tres últimas cifras es 000 o múltiplo de 8.	98760: porque 760 es múltiplo de 8.
9	La suma de sus cifras es múltiplo de 9.	11106: porque 1+1+1+0+6= 9 y 9 es múltiplo de sí mismo.
10	La última cifra es 0.	550: La última cifra es 0.
11	Sumando las cifras en posición impar por un lado y las de posición par por otro, siempre de derecha a izquierda. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es cero o un múltiplo de 11, el número es divisible por este.	**1**3**5**7**4**: **1**+**5**+**4**=10 y 3+7=10 ∴ 10–10=0. 85404: 8+4+4=16 y 5+0=5 ∴ 16–5=11 ⇒ 11 es múltiplo de si mismo.
12	El número es divisible por 3 y 4.	168: ver criterios para 3 y 4.

Números primos y compuestos

En los enteros hay números que pueden expresarse como el producto de otros de varias maneras.

Ejemplos:

1. 50=2×25=5×10=50×1
2. 132=2×66=4×33=12×11=6×22=3×44=1×132

Existen otros números cuyo únicos factores son él mismo y la unidad, a estos se les llama primos.

Concluimos que:

a) Un número primo es el que solo tiene dos divisores que son el 1 y él mismo.
b) Un número que no es primo se llama compuesto, es el que tiene más de dos divisores o que se expresa como el producto de dos o más factores primos.

Ejemplo:

$3=3\times1$, $11=11\times1$, $17=17\times1$, $31=31\times1$, $257=257\times1$, $65537=65537\times1$.

Al respecto hay un resultado interesante, todo entero mayor que uno puede descomponerse en productos de números primos en una expresión única[39]

Ejemplos:

Factorizar $252= 2^2\times3^2\times7$

Factorizar $825= 3\times5^2\times11$

Factorizar $46137= 3\times7\times13^3$

Múltiplo común

Si tienes dos o más números y observas entre sus múltiplos, encontrarás el mismo valor en sus listas de múltiplos, esos son los múltiplos comunes a dichos números.

Por ejemplo:

Si escribes los múltiplos de dos números diferentes como el 2 y 3, los múltiplos comunes son los que están en las dos listas.

Múltiplos de 2: 2,4,**6**,8,10,**12**,14,16,**18**,20,22,**24**,26,28,**30**,…

Múltiplos de 3: 3,**6**,9,**12**,15,**18**,21,**24**,27,**30**,33,36,39,42,…

¿Observas que 6,12,18,24 y 30 aparecen en las dos listas? Entonces, los múltiplos comunes de 2 y 3 son: 6,12,18,24 y30.

Mínimo común múltiplo (mcm)

Es el más pequeño de los múltiplos comunes. En el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes es 6, así que el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6.

Por lo que puedes ver, para calcular el mínimo común múltiplo, solo escribe los múltiplos de los números hasta que encuentres uno que coincida.

Por ejemplo: un automóvil, una motocicleta y una bicicleta dan vuelta a una pista elíptica, partiendo de la meta al mismo tiempo. El automóvil recorre la pista en 12 minutos, la motocicleta en 24 y la bicicleta en 36. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que coincidan nuevamente en la meta los tres conductores y cuantas vueltas dará cada uno?

Solución:

Tiempo empleado			**Fact.**
12	**24**	**36**	**2**
6	12	18	**2**
3	6	9	**2**
3	3	9	**3**
1	1	3	**3**
		1	

$2\times2\times2\times3\times3$

$2^3\times3^2$

$\text{mcm}=2^2\times3^3=72$

Los tres vehículos coinciden en la meta después de transcurridos 72 minutos.

Vueltas del automovilista: $\frac{72}{12}=6$

Máximo común divisor (mcd)

El máximo común divisor es el número más grande que divide dos o más números de forma exacta. La forma de calcular el máximo común divisor de un grupo de números, es a través de los siguientes métodos:

1. Producto de factores primos.
2. Algoritmo de Euclides.

Primer método (Producto de factores primos)

Este método consiste en los siguientes pasos:

1. Descomponer los números en sus factores primos.
2. Formar un producto con los factores primos comunes, que estén afectados del menor exponente.

Ejemplo: encontrar el máximo común divisor para los números 25 y 30.

Núm.	**Fact.**
25	5
5	5
1	

5×5

5^2

$25=5^2$

Núm.	**Fact.**
30	2
15	3
5	5
1	

$2\times3\times5$

$2^1\times3^1\times5^1$

$30=2^1\times3^1\times5^1$

El factor primo común de los números y que tiene menor exponente es 5^1.

$\therefore$ mcd = 5^1= 5, es decir, que 5 es el máximo divisor que divide de forma exacta a 25 y 30.

Segundo método (Algoritmo de Euclides)[40]

El método anterior se complica a medida de que se desea optimizar recursos, así que un segundo método es a través del uso del algoritmo de Euclides que enuncia lo siguiente: Dados dos números, si al dividir el mayor entre el menor, la división no es exacta, el mcd de ambos es el mismo que el del menor y el resto de la división.

Esto es, dado dos números M y N, donde M>N; dividimos el mayor M entre el menor N. Obtendremos por consiguiente q_1 y resto R_1. Si dividimos también N entre R_1, obtendremos otro cociente q_2 y resto R_2. Si continuamos dividiendo hasta que el resto sea cero, el último divisor empleado es el mcd.

Ejemplo: encontrar el máximo común divisor de 328 y 1804 mediante el algoritmo de Euclides.

Solución:

$$328 \overset{5}{\overline{\big)\,1804}} \qquad 164 \overset{2}{\overline{\big)\,328}}$$

$$ 164 \qquad\qquad\qquad 0$$

Por lo tanto, mcd = 164.

Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Pensemos si siempre es posible efectuar la división en Z. Observa el siguiente ejemplo: 5÷4= ?,debemos visualizar un número entero tal que al multiplicarlo por 4 de por resultado 5. ¿Cuál sería el número entero que satisfaga esta condición? .

Para poder resolver esta situación vamos a introducir otro conjunto numérico: los números racionales, conocidos también como quebrados o números fraccionarios , que designaremos con la letra $\mathbb{Q}$. Un número racional presenta la forma $\frac{p}{q}$, es decir, el cociente de dos números enteros p y q, donde $q \neq 0$ pues la división por cero no está definida. Su notación es:

$$\mathbb{Q}= \frac{p}{q}= \frac{Numerador}{Denominador}= \frac{Dividendo}{Divisor}$$

En este conjunto, la suma, la resta, la multiplicación y la división son cerradas. Expresando por comprensión el conjunto de los números reales queda de la forma:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}|\ p,\ q\in\ Z \text{ con } q\neq\ 0\}$$

Ejemplo:

1. $\frac{3}{4}$ es racional porque 3 y 4 son enteros

2. $\frac{0}{6}$ es racional porque 0 y 6 son enteros
3. 0.33333 es la expresión decimal[41] del número racional $\frac{1}{3}$

Nótese que los enteros pertenecen a los racionales, es decir, son un subconjunto de ellos ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

Los números racionales pueden indicarse como una expresión decimal exacta, periódica y periódica mixta , tal y como se señala a continuación:

1. $\frac{1}{2} = 0.5$ decimal exacto.
2. $\frac{2}{3} =$ 0.66666… decimal periódico (se dice que tiene periodo uno ya que aparece una vez el número y se repite infinitamente).
3. $\frac{14}{15}$ = 0.93333… = 0.93 periódico mixto.

Todo número racional cuya expresión decimal no es exacta, limitada o periódica constituye un número irracional[42].

La forma de expresar un decimal como una razón de dos números enteros, es la siguiente:

1. Decimal exacto: se multiplica y divide por una potencia de 10 con tantos ceros, como se requiera para convertir el decimal a entero.

Ejemplo:

$$0.5 = \frac{(0.5)\times 10}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2. Decimal periódico: en el numerador se escribe el primer periodo como un número entero, con un denominador formado por tantos nueves como tenga el periodo.

Ejemplo : expresar como la razón de dos enteros la expresión decimal 0.135135…

0.135135… tiene periodo 3 y sea f=fracción buscada.

$\therefore$f=0.135135… (i)

Se multiplica (i) por $10^3 \Rightarrow$ 1000×f=135.135… (ii)

Restando (i) de (ii) $\Rightarrow$1000f=135.135…

-f=-0.135135…

999f = 135

Se despeja f, $f = \frac{135}{999}$ y se simplifica[43] $f = \frac{135}{999} = \frac{45}{333} = \frac{5}{37}$

Ejemplo: expresar como la razón de dos enteros la expresión decimal 2.135135…

Si observa el ejemplo anterior la parte periódica 0.135…=$\frac{5}{37}$, lo único diferente es que tiene una parte entera y la debemos sumar quedando:

$$2 + \frac{5}{17} = \frac{79}{27}$$

3. Decimal periódica mixta: a la parte entera, se le suma la parte decima una vez

Ejemplo: expresar como la razón de dos enteros la cifra decimal 0.8161616…

Se multiplica el número por una potencia de 10 que recorra el punto decimal hasta donde termina el primer periodo, en este caso 1000,y se resta de lo que quede de multiplicar el número por una potencia de 10 que recorra el punto decimal hasta donde termine la parte no periódica, en este caso por 10 y tenemos

816.161616…-8.161616…=1000f-10f

808=990f

$$f = \frac{808}{990} = \frac{404}{495}$$

Ejemplo: expresar como la razón de dos enteros la cifra decimal 3.8161616…

Se procede como en el ejemplo anterior con la parte decimal y al final se suma con la parte entera

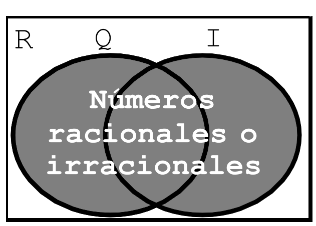
$$3 + \frac{404}{495} = \frac{1889}{495}$$

Números irracionales (I)

También hay números que se expresan en forma decimal pero que no se forma ningún periodo en su cociente, por ejemplo $\sqrt{3}$, un número muy conocido π, entre otros, estos números se llaman irracionales y se les representa con la letra mayúscula I.

El conjunto que resulta de unir los números racionales ($\mathbb{Q}$) con los irracionales se llama reales y se les representa con la letra mayúscula $\mathbb{R}$.

Nótese que I y $\mathbb{Q}$ no tienen elementos en común, así $\mathbb{Q} \cup \mathrm{I} = \mathbb{R}$ y que $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \phi$.



R = Q ∪ I

Nota: todos los números racionales se pueden expresar en forma decimal infinita y periódica, sin embargo, los irracionales se expresan en forma decimal infinita pero no periódica

Fracciones y decimales

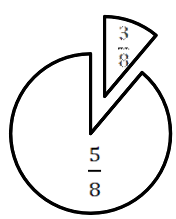
Al referirnos a la división exacta de números enteros, se define que la condición necesaria para tal situación, es que el dividendo sea múltiplo del divisor. En el caso de que se presenten divisiones que no sean exactas como 5÷8, los matemáticos en un intento de solucionarlas crearon una nueva clase de números llamados fraccionarios, que ya habíamos llamado racionales.

Fracción

Una fracción o quebrado es la forma de representar una cantidad dividida por otra ($\frac{p}{q}$).

Pueden ser representadas de forma decimal o gráfica.

a) Representación decimal: $\frac{5}{8} = 0.625$
b) Representación gráfica:



Muchas fracciones pueden tener el mismo valor a las que llamaremos fracciones equivalentes, y el conjunto de todas las fracciones equivalentes es un subconjunto del conjunto del número racional (Fracciones equivalentes$\subset\mathbb{Q}$).

Relación de equivalencia ($\doteq$ o $\equiv$)[44]

Dos fracciones son equivalentes, si se cumple que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda, es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda (producto cruzado).

Ejemplo: $\frac{4}{5} \doteq \frac{16}{20} \Rightarrow 4 \times 20 = 16 \times 5 \Rightarrow 80 = 80$

Entonces, podemos decir que entre fracciones existe una relación de equivalencia. Del mismo modo podemos señalar que cumplen las siguientes propiedades:

a) Reflexiva
b) Simétrica o recíproca
c) Transitiva

Por ejemplo:

a) Reflexiva: $\frac{3}{8} \doteq \frac{3}{8}$
b) Simétrica o recíproca: $\frac{3}{4} \doteq \frac{6}{8} \Leftrightarrow \frac{6}{8} \doteq \frac{3}{4}$
c) Transitiva: $\frac{3}{4} \doteq \frac{6}{8} \wedge \frac{12}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \doteq \frac{12}{16}$

Número decimal

Es la expresión lineal de una fracción ordinaria o decimal que se obtiene al dividir el numerador entre el denominador.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{2} = 0.5$ porque resulta de dividir $1 \div 2$
2. $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$ porque resulta de dividir $1 \div 3$
3. $\frac{1}{4} = 0.25$ porque resulta de dividir $1 \div 4$
4. $\frac{1}{5} = 0.2$ porque resulta de dividir $1 \div 5$

Propiedad fundamental de las fracciones

a) Amplificación de fracciones: si se multiplican o dividen los dos términos de una fracción por un mismo número, la fracción no varía.

Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{20} \Rightarrow \frac{3}{4} \doteq \frac{15}{20}$

Siempre es posible representar una fracción con denominador positivo, pues si llega a ser negativo, es suficiente multiplicar por (–1) ambos términos de la fracción.

Ejemplo: $\frac{3}{-4} = \frac{3}{-4} \times \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{-3}{4}$

b) Simplificación de fracciones: si en una fracción, los dos términos de la misma tienen un divisor común, al dividir por él, la fracción final es equivalente a la inicial.

Ejemplo: $\frac{9}{15} = \frac{9}{15} \div \frac{3}{3} = \frac{\frac{9}{3}}{\frac{15}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{9}{15} \doteq \frac{3}{5}$

Una fracción es irreducible cuando al dividir cada término de la misma por su máximo común divisor, la fracción resultante tenga números primos en cada término de la misma.

Ejemplo: $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ (fracción irreducible)

Método de simplificación de fracciones

Se dividen el numerador y el denominador de la fracción por el máximo común divisor (mcd).

Ejemplo: simplificar la fracción: $\frac{25}{30}$

Se calcula el máximo común divisor.

Numerador	fact. prim.	
25	5	$5 \times 5 = 5^2 =$ **25**
5	5	
1		

Denominador	fact. prim.	
30	2	$2 \times 3 \times 5 = 30$
15	3	
5	5	
1		

El factor primo común de los números y que tiene menor exponente es 5^1.

$\therefore$mcd = 5^1 = 5, es decir, que 5 es el máximo divisor que divide de forma exacta a 25 y 30.

$$\Rightarrow \frac{25}{30} = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{30}{5}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{25}{30} \doteq \frac{5}{6}$$

Reducción de fracciones a común denominador

Para encontrar fracciones equivalentes a otras, donde sus denominadores sean iguales; se calcula el mínimo común denominador[45] para lo cual se efectúan los siguientes pasos:

1. Se multiplican los dos términos de cada fracción por los denominadores de las demás.

Ejemplo: convertirlas siguientes fracciones a denominador común $\frac{5}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 3 \times 6}{2 \times 3 \times 6} = \frac{90}{36}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 6}{3 \times 2 \times 6} = \frac{24}{36}$$
$$\frac{4}{6} = \frac{4 \times 2 \times 3}{6 \times 2 \times 3} = \frac{24}{36}$$

2. Para reducir al mínimo común denominador se calcula el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores obtenidos en el paso anterior y se dividen los dos términos de la fracción por el mínimo común múltiplo (mcm).

Ejemplo: convertir las siguientes fracciones a un mínimo común denominador $\frac{90}{36}, \frac{24}{36}$ y $\frac{24}{36}$

Del paso anterior: $\frac{5}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$

Denominadores			**Fact.**
2	**3**	**6**	**2**
1	3	3	**3**
	1	1	

2×3 mcm= $2\times3=6$

$$\frac{90}{36}=\frac{90}{36}\div\frac{6}{6}=\frac{\frac{90}{6}}{\frac{36}{6}}=\frac{15}{6}$$

$$\frac{24}{36}=\frac{24}{36}\div\frac{6}{6}=\frac{\frac{24}{6}}{\frac{36}{6}}=\frac{4}{6}$$

$$\frac{24}{36}=\frac{24}{36}\div\frac{6}{6}=\frac{\frac{24}{6}}{\frac{36}{6}}=\frac{4}{6}$$

Reducción de fracciones a común numerador

Para encontrar fracciones equivalentes a otras, donde sus numeradores sean iguales; se calcula el máximo común múltiplo (mcm) de los numeradores el cual será el numerador común y se divide por cada uno de los numeradores; el cociente resultante se multiplica por cada término de la fracción correspondiente.

Ejemplo: convertir las siguientes fracciones a un mínimo numerador común $\frac{4}{5}, \frac{6}{11} y \frac{12}{17}$

Numeradores			**Fact.**
4	**6**	**12**	**2**
2	3	6	**2**
1	3	3	**3**
	1	1	

$2\times2\times3$

$2^2\times3$

mcm=$2^2\times3=12$

$$\frac{\mathbf{4}}{5}=\frac{12}{\mathbf{4}}=3\Rightarrow\frac{4}{5}\times\frac{3}{3}=\frac{12}{15}$$

$$\frac{\mathbf{6}}{11}=\frac{12}{\mathbf{6}}=2\Rightarrow\frac{6}{11}\times\frac{2}{2}=\frac{12}{22}$$

$$\frac{\mathbf{12}}{17}=\frac{12}{\mathbf{12}}=1\Rightarrow\frac{12}{17}\times\frac{1}{1}=\frac{12}{17}$$

Operaciones fundamentales con fracciones

Las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con los números racionales son: suma, resta, multiplicación y división, y las propiedades de que gozan estas operaciones son las mismas que se analizaron en las operaciones con números enteros.

Suma

Para la suma de fracciones se presentan los siguientes casos:

a) Denominador común: se suman los numeradores de las fracciones y se coloca el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=\frac{7+4}{3}=\frac{11}{3}$

b) Denominador no común: se deben convertir las fracciones a común denominador y luego se efectúa la suma al igual que el caso anterior.

Ejemplos:

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\longrightarrow$ Reducir ambas fracciones a común denominador.

$\frac{2}{3}\doteq\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$

$\frac{4}{5}\doteq\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}$

$\Rightarrow\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$ otra forma de resolverlo sería:

$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{(2\times5)+(3\times4)}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$

c) Suma mixta (enteros y fracciones): la parte entera de la cifra debe convertirse a una fracción con común denominador igual al de la parte fraccionaria de la cifra y luego se efectúa la suma de acuerdo al primer caso revisado.

Ejemplo: $3+\frac{4}{5}=\frac{\mathbf{3}\times5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{15}{5}+\frac{4}{5}=\frac{15+4}{5}=\frac{19}{5}$

El mecanismo para sumar quebrados de más de dos términos es el siguiente:

a) Se obtiene un denominador común (mcm) multiplicando los denominadores de cada término.

b) Se divide el denominador común (mcm) entre el denominador del primer término y el resultado se multiplica por el numerador del mismo término. El nuevo resultado es el primer término del numerador común.

c) Repetir el paso b tantos términos tenga el quebrado y por último efectuar operaciones en el numerador común de poderse realizar, si no, dejar únicamente indicado. El objetivo es reducir el resultado a su mínima expresión.

Ejemplo:

$$\frac{7}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{\left(\frac{30}{3}\right)\times 7+\left(\frac{30}{5}\right)\times 4+\left(\frac{30}{2}\right)\times 1}{3\times 5\times 2=30}=\frac{(10\times 7)+(6\times 4)+(15\times 1)}{30}=\frac{70+24+15}{30}=\frac{109}{30}$$

Resta

Se presentan los mismos casos que para la suma y su solución es la misma, únicamente se prevé el cambio del signo más (+) por el de menos (–).

Multiplicación

Para la multiplicación de fracciones solo se necesita realizar el producto de numeradores y el producto de denominadores y colocarlos en sus respectivos apartados.

Ejemplo: $4\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{1}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4\times 3\times 2}{1\times 4\times 5}=\frac{24}{20}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

Notas:

1. Siempre que sea posible, conviene simplificar antes de multiplicar.
2. Si hay fracciones negativas, aplicar la regla de los signos para la multiplicación.

División

Para dividir dos fracciones, es suficiente multiplicar la primera por el inverso de la segunda.

Ejemplo: $\left(-\frac{3}{4}\right)\div\frac{2}{5}=\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{2}=-\frac{15}{8}$

1.3. Problemario

1. Sean los conjuntos $A = \{a,c,e,g,i\}$ y $B = \{g,i,j,k,l\}$, definir por comprensión y extensión la unión de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

2. Sean los conjuntos C = {rosas rojas} y D = {rosas blancas}, definir por comprensión y extensión la unión de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

3. Sean Q = {*autos verdes*} y P = {*camionetas*}, definir por comprensión y extensión la unión de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

4. Si $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,6,8,10\}$ y $C = \{10,14,16,26\}$. Definir por comprensión y extensión la unión de los tres conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

5. Si U = estudiantes universitarios y los conjuntos A = {estudiantes de arquitectura que cursan matemáticas I} , B = {estudiantes de medicina que cursan matemáticas I} y C = {Estudiantes de farmacobiología que cursan matemáticas I}. Definir por comprensión y extensión la unión de los tres conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

6. Sean $U = \mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales) y los conjuntos $A = \{2,3,5\}$, $B = \{1,2,6,7,15\}$. Encontrar $A\cup(A\cap B)$ que es la propiedad de absorción de la unión.

7. Sean U = (conjunto de los números impares mayores o igual a 3 y menores o igual a 25) y los conjuntos $A = \{3,5,7,9,11\}$, $B = \{7,9,11,13,15\}$. Encontrar$(A\cup B)^C$ y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

8. Sean los conjuntos $A = \{b,c,d,e\}$, $B = \{d,e,f,g\}$ y $C = \{g,h,b,c\}$. Determinar:

8.1. Los elementos que conforman la unión de los tres conjuntos.

8.2. Expresar por comprensión el resultado.

8.3. Representar dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

9. Determina las flores en común que existe entre dos jardines, donde el primero tiene las siguientes especies: *rosas, claveles, margaritas, azucenas, malvas, violetas, nardos, geranios y alcatraces*. Y el segundo*: malvas, violetas, nardos, geranios, alcatraces, narcisos y dalias*. Define por extensión y comprensión el resultado, y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

10. Sea el conjunto universo $U = \{a,b,c,d\}$, y sean $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b\}$. Diga si es verdadera o falsa la expresión $\{b,c\} \in (B \cap A)$ y ¿por qué?

11. Sean U = (abecedario) y los conjuntos $A = \{b,c,e\}$, $B = \{a,b,f,g,ñ\}$, encontrar:

11.1. $A \cap B$

11.2. $(A \cap B)^C$

Elaborar el respectivo diagrama de Venn-Euler que contenga ambos casos.

12. Si $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,6,8,10\}$ y $C = \{10,14,16,26\}$. Determinar $(A \cap B) \cup C^C$ y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

13. Sean Q={*autos, aviones, trenes, barcos*} y P={*autobuses, submarinos, trenes, aviones*}, definir por comprensión y extensión la intersección de ambos conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

14. Si $A = \{2,4,6,10,14\}$, $B = \{4,6,8,10,14\}$ y $C = \{2,8,10,14,16,26\}$. Determinar los elementos que conforman las siguientes operaciones y representarlas propiamente en un diagrama de Venn-Euler.

14.1. $A \cap B$

14.2. $A \cap C$

14.3. $B \cap C$

14.4. $A \cap B \cap C$

15. Si U = estudiantes universitarios y los conjuntos A = {estudiante de arquitectura que cursan matemáticas I}, B = {estudiante de medicina que cursan matemáticas I} y C = {estudiantes de farmacobiología que cursan matemáticas I}. Definir por comprensión y extensión la intersección de los tres conjuntos y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

16. Sean los siguientes conjuntos $A = \{2,4,6\}$, $B = \{4,6,8,10\}$ y $C = \{10,14,16,26\}$. Efectuar las operaciones Booleanas que se te indican.

16.1. $A \cup (A \cap B)$

16.2. $(A \cap B) \cap C$

16.3. $(A \cap B) \cup C$

16.4. $A \cap (A \cup B)$

17. Existen 2 jardines donde el primero tiene las siguientes especies: *rosas, claveles, margaritas, azucenas, malvas, violetas, nardos, geranios y alcatraces*. Y el segundo: *malvas, violetas, nardos, geranios, alcatraces, narcisos y dalias*. ¿Cuál será la diferencia de especies entre el primero y segundo jardín y viceversa? Define por extensión y comprensión el resultado, y representa dicha operación en un diagrama de Venn-Euler.

18. Sea el conjunto universo $U = \{a,b,c,d\}$, y sean $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b\}$. Diga si son verdaderas o falsas y ¿por qué? las siguientes expresiones

18.1. $\{b,c\} \in (B-A)$

18.2. $\{a,b,c,d\} \notin (B-A)^C$

Elaborar el respectivo diagrama de Venn-Euler.

19. Sean U = (abecedario) y los conjuntos $A = \{b,c,e\}$, $B = \{a,b,f,g,ñ\}$, encontrar:

19.1. A–B

19.2. B–A

19.3. $(A-B)\cup(B-A)$

19.4. $[(A-B)\cup(B-A)]^C$

19.5. $(A\cap B)$

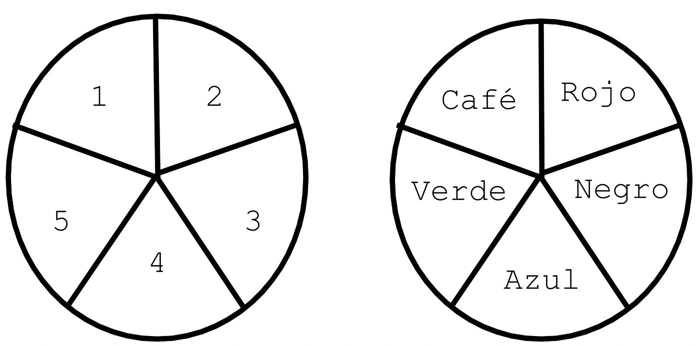
19.6. $[(A-B)\cup(B-A)]^C-(A\cap B)$

Elaborar el respectivo diagrama de Venn-Euler.

20. Si $A = \{2,4,6,8,10,24,26\}$, $B = \{6,8,10,12,14,16,18\}$ y $C = \{10,16,18,20,22,24,26\}$.

Determinar: $(A\cap B\cap C)^C - [(A\cup B)^C \cup (A\cup C)^C \cup (B\cup C)^C]$.

21. En una feria, Felipe participa en las ruletas típicas de la misma y que a continuación se muestran:



Los premios de mayor jerarquía se ubican en el 3 rojo y 1 verde. Si compra un boleto y le proporcionan un dardo para cada ruleta. ¿De cuántas formas puede Felipe atinarle a uno de los dos premios importantes? Determinar el producto cartesiano de

$R1 \times R2$ definiéndolo por comprensión y extensión. Mediante un cuadro representar tal operación.

22. Jesús experimenta lanzando un par de dados: D1 y D2, con el propósito de verificar cuántas eran las formas de obtener una suma de 5 puntos con ambos dados. Determinar el producto cartesiano de $D1 \times D2$ definiéndolo por comprensión y extensión. Mediante un cuadro representar tal operación para que con él mismo, Jesús pueda encontrar la respuesta.

23. Adán y Uriel juegan con un dado: primero lanza Adán y obtiene un cuatro. ¿Crees que al tirar Uriel obtenga un mayor puntaje que Adán? Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

24. Rafael participa en un juego de azar con dos dados. El premio es de $1000.00 si la suma de las caras superiores es de 6 o 7. ¿Cuántas formas crees que tenga Rafael para ganar el premio? Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

25. Gema lanza un dado a la vez que Lupita lo hace con una moneda. ¿Cuántas formas existen de que se obtenga un seis y un águila? Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

26. Una urna contiene 63 esferas numeradas del 1 al 21 y seriadas en tres colores diferentes (verde, blanco y rojo). Elda apuesta a Norma que la primera esfera sale con un número par y en color blanco. ¿Cuántas formas tiene Elda de ganar? Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

27. Christian experimenta lanzando 5 veces un par de dados. En 2 ocasiones obtuvo 6 puntos. Basándose en estos resultados ¿Cuántas formas tiene Christian de volver a obtener 6 puntos en este experimento? Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

28. En una rifa se otorgan los siguientes premios:

a) 5 pases para un partido deportivo de final de temporada.
b) 8 teléfonos celulares.
c) 2 computadoras.
d) 4 becas para estudiar computación.

Cada uno de los premios se señala en una boleta y se colocan dentro de una urna. Alex, que es uno de los 8 participantes, extrae la primera y segunda boleta.

28.1. ¿Cuántas son las formas de que Alex obtenga una computadora y una beca para estudiar computación?

28.2. ¿Cuál será la forma final de la última boleta después de que los ocho participantes hayan sacado su par de boletas?

Justificar respuesta mediante la operación del producto cartesiano definido por comprensión y extensión. Con un cuadro representar tal operación.

29.Con el dinero que tengo y $325.00 más, podría pagar una deuda de $630.00 y me sobrarían $22.00 ¿Cuánto dinero tengo?

30. ¿Cuántos años son 5,110 días? Considerando que un año tiene 365 días.

31. En una alberca caben 49,920 litros de agua ¿En cuántos días se llenará mediante una línea que suministra un flujo de agua a razón de 20 litros por minuto?

32. En una central de autobuses arriba cada 15 minutos una unidad ¿Cuántas unidades arriban a la central al día?

33. En una zona residencial viven 2,400 personas y hay un árbol por cada 40 personas ¿Cuántos arboles hay en la zona residencial? ¿Cuántos arboles habrá que plantar para tener un árbol por cada 10 personas?

34. Resuelve el cuadro mágico de acuerdo a las siguientes instrucciones: los números del cuadro izquierdo deben distribuirse en el cuadro de la derecha, de tal forma, que, sumándolos en cualquier columna, renglón o diagonal, el resultado sea siempre 60.

	12	14	16	18	
	12	14	16	18	
	12	14	16	18	
	12	14	16	18	

60	60	60	60	60	60
60					60
60					60
60					60
60					60
60	60	60	60	60	60

35. En los siguientes ejercicios localiza el divisor exacto aplicando los criterios de divisibilidad.

a) ____divide a 127378 porque ___________________________

b) ____ divide a 283939 porque ___________________________

c) ____ divide a 65610 porque ___________________________

36. Encontrar el mcm de los siguientes grupos de números:

a) 180 y 24

b) 72 y 50

c) 4, 5 y 6

d) 6, 12 y 45

e) 24, 36 y 40

37. Tres patinadores parten de un mismo punto al mismo tiempo, pero cada uno dura 10,12 y 15 minutos respectivamente, en dar una vuelta completa. ¿En qué otro momento volverán a coincidir en el punto de partida?

38. Una persona tiene 200 paletas de caramelo, 56 bombones y 40 chicles, desea saber ¿Cuántos aguinaldos máximo puede hacer si cada uno de ellos debe contener la misma cantidad de dulces, así como qué cantidad de dulces le corresponde a cada uno?, ¿le sobrarán dulces?

39. Expresa como el producto de sus factores a:

a) 162

b) 1029

c) 340

1.4. Autoevaluación

1. Escribe por extensión los siguientes conjuntos dados por comprensión.

   a) $A = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 0\}$.

   b) B = {x | x es una letra de la palabra gato}

2. Expresar los siguientes conjuntos por comprensión:

   a) $C = \{1,4,9,16,...\}$

   b) $D = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\}$

3. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y ¿por qué?:

3.1. $\phi \subset A$

3.2. $0 \in \phi$

3.3. $\phi \in \phi$

3.4. $\phi \subset \phi$

4. Sea el conjunto universo $U = \{1,2,3,4\}$, y sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2\}$. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes expresiones y ¿por qué?

4.1. $B \subset A$

4.2. $2 \in (B \cap A)$

4.3. $A \subset B$

5. Si $A=\{2,4,6\}$, $B=\{4,6,8,10\}$ y $C=\{10,14,16,26\}$.Relaciona las 2 columnas siguientes colocando la literal que corresponda a la respuesta correcta e ilustra la misma con un diagrama de Venn-Euler para cada caso:

a) $A \cup B$	___ 1) ϕ
b) $A \cup C$	___ 2) $\{4,6\}$

c) $A \cap B$ ___ 3) {2,4,6,10,14,16,26}

d) $A \cap C$ ___ 4) {2,4,6,8,10}

6. Si U={A,B,C} donde A = {2,4,6}, B = {4,6,8,10} y C={10,14,16,26}. Relaciona las 2 columnas siguientes colocando la literal que corresponda a la respuesta correcta e ilustra la misma con un diagrama de Venn-Euler para cada caso:

a) $B-A$ ___ 1) {2,4,6,8}

b) $A-B$ ___ 2) {2,14,16,26}

c) C^C ___ 3) {8,10}

d) B^C ___ 4) {2}

7. Sean U = {e,d,u,c,a,t,i,v,o,s}, A = {d,a,t,o}, B = {v,i,t,a,e} y C = {d,i,v,a,s}.

7.1. Distribuya los elementos en un diagrama de Venn-Euler.

7.2. Obtenga por extensión:$(A^C-B^C)^C-C$.

7.3. De acuerdo al diagrama de Venn-Euler obtenido en el inciso a, exprese el conjunto {s,u,c,o} operando A, B y/o C.

8. Sean U = N (conjunto de los números naturales) y los conjuntos A = {2,3,5}, B = {1,2,6,7,15}, encontrar:

8.1. $A \cap B$

8.2. B^C

8.3. $A \cup B$

8.4. $(A \cup B)^C$

8.5. $A-B$

8.6. $(A \cap B)^C$

8.7. $A-B^C$

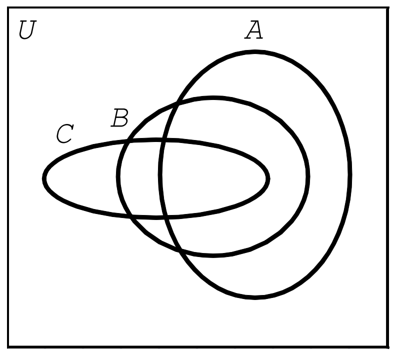
8.8. A^C-B^C

9.Dibujar un diagrama de Venn-Euler para cada ejercicio siguiente:

9.1. $(A \cap B) \cup C^C$

9.2. $(A - C) \cap (B - C)$

10. Sean A, B, C tres conjuntos, U conjunto universal, dados en el siguiente diagrama:



10.1 Sombrear $(B \cap A) - C$

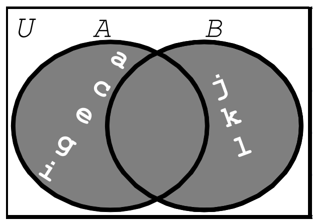
10.2.Sombrear $(A^C \cap B^C) \cup (A \cap C)$

11. Eduardo experimenta lanzando un par de dados: D1 y D2 con el propósito de verificar cuántas veces era posible obtener una suma de 2 o más puntos con ambos dados. Determinar el producto cartesiano de $D1 \times D2$ definiéndolo por comprensión y extensión. Mediante un cuadro representar tal operación para que con el mismo, Eduardo pueda encontrar la respuesta.

1.5. Soluciones del problemario

1. Por comprensión: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ y se lee: el conjunto de los elementos x tal que x pertenece al conjunto A o B.

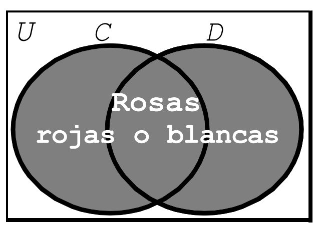
Por extensión: $A \cup B = \{a,b,e,g,i,j,k,l\}$.



A ∪ B

2. Por comprensión: $C \cup D$ ={*flores* | *flores* ∈ *rosas rojas* ∨ *rosas* ∈ *rosas blancas*} y se lee: el conjunto de *flores* tal que *flores* pertenece al conjunto *de rosas rojas* o rosas blancas.

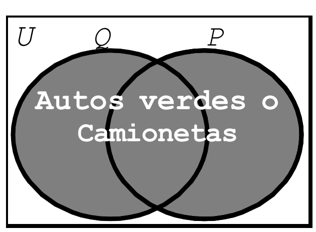
Por extensión: $C \cup D$ = {*rosas rojas o blancas*}.



C ∪ D

3. Por comprensión: $Q \cup P$ ={*vehículo* | *vehículo* ∈ *autos verdes* ∨ *vehículo* ∈ *camionetas*} y se lee: el conjunto de *vehículos* tal que *vehículos* pertenece al conjunto *de autos verdes* o camionetas.

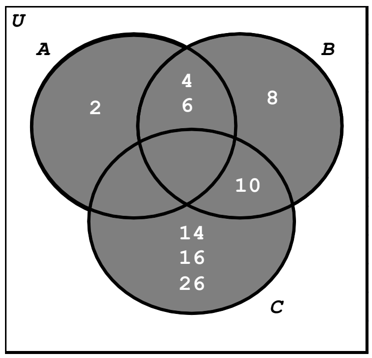
Por extensión: $Q \cup P$ = {*autos verdes* o *camionetas*}



$Q \cup P$

4. Por comprensión: $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in B\}$ y se lee: el conjunto de los elementos **x,** tal que **x** pertenece al conjunto A o B o C.

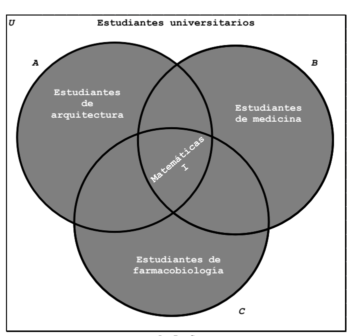
Por extensión: $A \cup B \cup C = \{2,4,6,8,10,14,16,26\}$.



$A \cup B \cup C$

5. Por comprensión: $A \cup B \cup C$={*estudiante* universitario | *estudiante universitario* ∈ *estudiante de arquitectura de matemáticas I* ∨ *estudiante universitario* ∈ *estudiante de medicina de matemáticas I* ∨ *estudiante universitario* ∈ *estudiante de farmacobiología de matemáticas I*} y se lee: el conjunto de los estudiantes universitarios de arquitectura o de medicina o de famacobiología que cursan matemáticas I.

Por extensión: $A \cup B \cup C$ = {estudiantes que cursan matemáticas I, de arquitectura o medicina o farmacobiología}



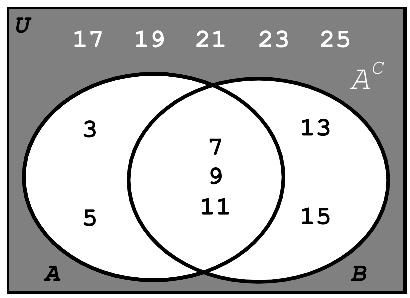
$A \cup B \cup C$

6. $A \cup (A \cap B) = \{2,3,5\}$.

$(A \cap B)=\{2\}$

$A \cup (A \cap B)=\{2,3,5\} \cup \{2\}=\{2,3,5\}$

7.

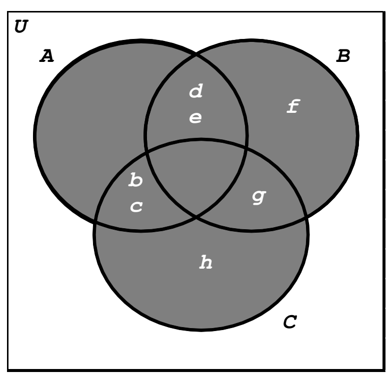


$(A \cup B)^c = \{17,19,21,23,25\}$

8.1. $A \cup B \cup C = \{b,c,d,e,f,g,h,g\}$.

8.2. $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$.

8.3.

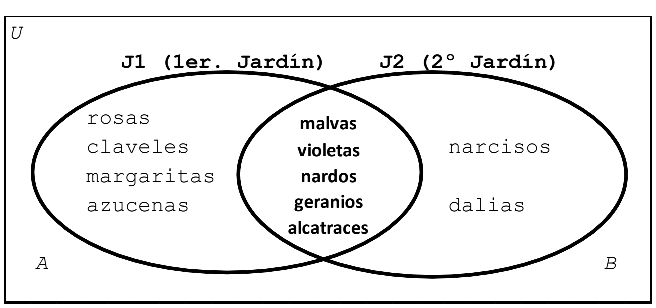


$A \cup B \cup C$

9. Por extensión:

$A \cap B$={malvas, violetas, nardos, geranios, alcatraces}

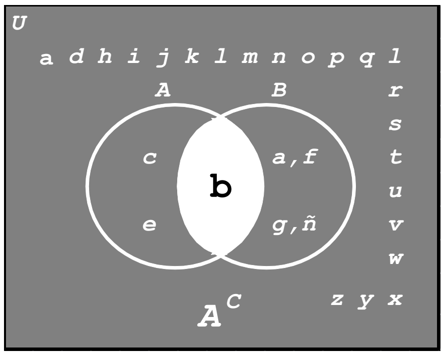
Por comprensión: $A \cap B$={flores | flores $\in$ J1 $\wedge$ flores $\in$ J2}



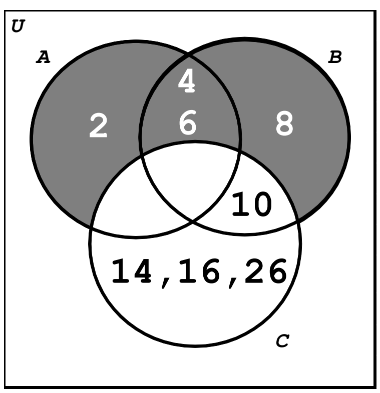
10. Falsa, porque $\{b,c\} \notin (B \cap A) = \{a,b\}$.

11.1. $A \cap B = \{b\}$

11.2. $A \cap B)^C$={a,c,d,e,f,g,h,I,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,z}



12.$A \cap B = \{4,6\}, C^C = \{2,4,6,8\}$ $\therefore$ $(A \cap B) \cup C^C = \{4,6\} \cup \{2,4,6,8\} = \{2,4,6,8\}$

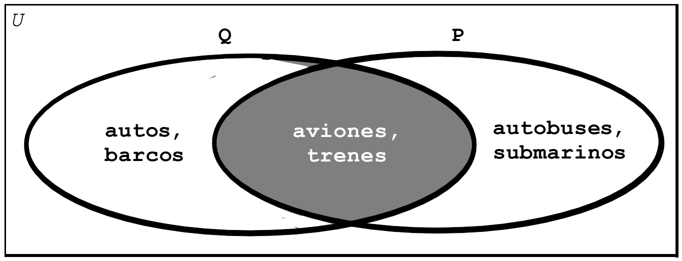


$(A \cap B) \cup C^C = \{2,4,6,8\}$

13. Los elementos *aviones y trenes* son comunes a ambos conjuntos.

Por comprensión $Q \cap P = \{x \mid x \in Q \wedge x \in P\}$ y se lee: el conjunto de los elementos x tal que x pertenece al conjunto Q y que pertenece a P.

Por extensión: $Q \cap P$={aviones, trenes}



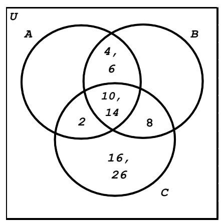
$Q \cap P$

14.1. A∩B ={4,6,10,14}

14.2. A∩C ={2,10,14}

14.3. B∩C ={8,10,14}

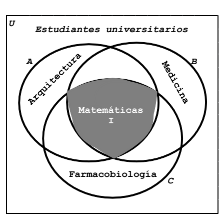
14.4. A∩B∩C ={10,14}



15. La característica común a los tres conjuntos son los alumnos que cursan matemáticas I.

Por comprensión: *A∩B∩C*={*estudiante* universitario | *estudiante universitario* ∈ *estudiante de arquitectura de matemáticas I* ∧ *estudiante universitario* ∈ *estudiante de medicina de matemáticas I* ∧ *estudiante universitario* ∈ *estudiante de* farmacobiología *de matemáticas I*} y se lee: el conjunto de los estudiantes universitarios de arquitectura y de medicina y de famacobiología que cursan matemáticas I.

Por extensión: *A∩B∩C*= {Estudiantes que cursan matemáticas I de arquitectura y de medicina y de farmacobiología}.



$A \cap B \cap C$

16.1. $A \cup (A \cap B) = \{2,4,6\}$

16.2. $(A \cap B) \cap C = \phi$

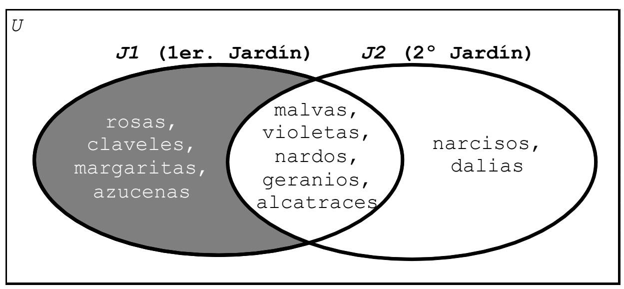
16.3. $(A \cap B) \cup C = \{4,6,10,14,16,26\}$

16.4. $A \cap (A \cup B) = \{4,6\}$

17. Las flores: *rosas, claveles, margaritas y azucenas* no están en el 2º jardín.

Por comprensión $J1 - J2 = \{flor \mid flor \in J1 \wedge flor \notin J2\}$ y se lee: el conjunto de flores que pertenecen al *J1* pero no al *J2*.

Por extensión: *J1–J2* = {rosas, claveles ,margaritas, azucenas}.

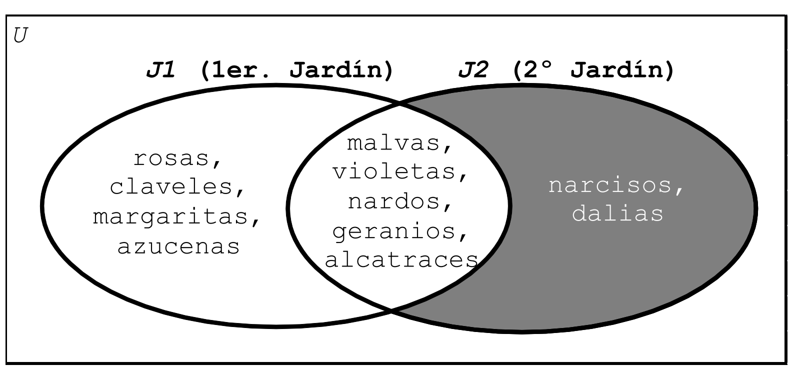


J1–J2

Las flores: *narcisos y dalias* no están en el 1er jardín.

Por comprensión $J2 - J1 = \{flor \mid flor \in J2 \wedge flor \notin J1\}$ y se lee: el conjunto de flores que pertenecen al *J2,* pero no al *J1*.

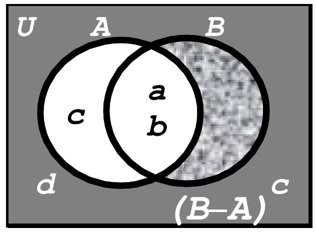
Por extensión: *J2–J1* = {narcisos, dalias}.



J1–J2

18.1. Falsa. $B - A = \phi$

18.2. Falsa. $(B - A)^C = \{a, b, c, d\}$



19.1. A–B={c,e}

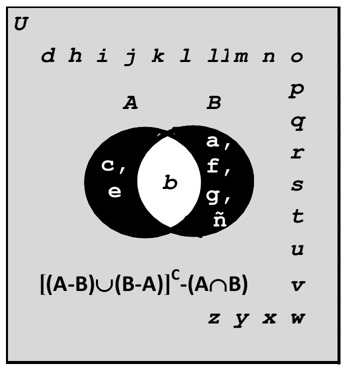
19.2. B–A={a,f,g,ñ}

19.3. (A–B)∪(B–A)={a,c,e,f,g,ñ}

19.4. $[(A–B)\cup(B–A)]^{C}$ ={b,d,h,i,j,k,l,ll,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}

19.5. (A∩B) ={b}

19.6. $[(A–B)\cup(B–A)]^{C}–(A\cap B)$ ={d,h,i,j,k,l,ll,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}



20. $(A\cap B\cap C)^{C} – [(A\cup B)^{C} \cup (A\cup C)^{C} \cup (B\cup C)^{C}]$ = {6,8,16,18,24,26}

21. {números 1 y 3 de la ruleta 1} y {colores rojo y verde de la ruleta 2}

∴ R1={1, 3} y R2={rojo, verde}

Por comprensión:

$R1\times R2=\{(x,y)|x\in R1 \wedge y\in R2\}$.

Por extensión:

$R1\times R2$={(1,rojo),(1;verde),

(3;rojo),(3;verde)}.

(1,verde)y (3,rojo) son las 2 formas de ganar uno de los premios principales,

Y						
y_5	Verde	(1; V)	(2; V)	(3; V)	(4; V)	(5; V)
y_4	Azul	(1; A)	(2; A)	(3; A)	(4; A)	(5; A)
y_3	Negro	(1; N)	(2; N)	(3; N)	(4; N)	(5; N)
y_2	Rojo	(1; R)	(2; R)	(3; R)	(4; R)	(5; R)
y_1	Café	(1; C)	(2; C)	(3; C)	(4; C)	(5; C)
	R2 / R1	1	2	3	4	5
		x_1	x_2	x_2	x_2	x_5

22. {puntos de D1}+{puntos de D2} = 5

∴ D1={1,2,3,4} y D2={1,2,3,4}

Por comprensión:

$D1 \times D2 = \{(x,y) | x \in D1 \wedge y \in D2\}$.

Por extensión

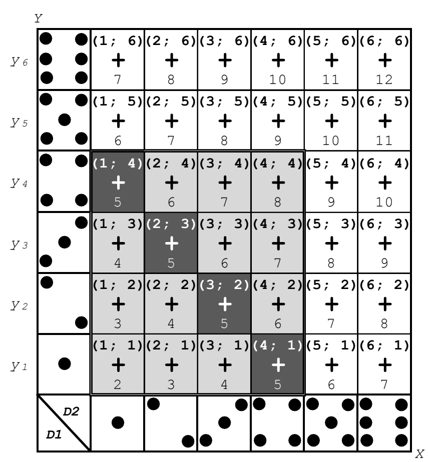
$D1 \times D2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$.

Donde (1,4),(2,3),(3,2),(4,1) son las 4 formas en que los dos dados sumen 5 puntos.



Eduardo tiene 4 posibilidades de que le sumen 5, en un total de 16 lanzamientos de ambos dados.

23. {lanzamiento 2} y {puntos del dado>4}

∴ L{2} y D{5,6}

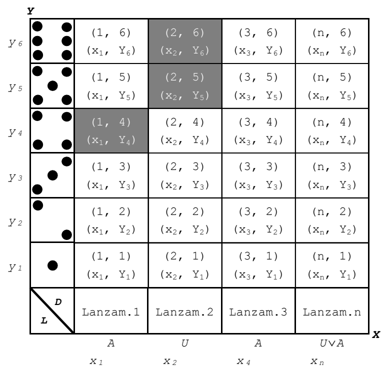
Por comprensión:

$L \times D = \{(x;y) | x \in L \wedge y \in D\}$.

Por extensión:

$L \times D = \{(2;5),(2;6)\}$.

Uriel tiene dos formas de obtener mayor puntaje que Adán.



24. {puntos de D1}+{puntos de D2} = 6 o 7

$\therefore$ D1{1,2,3,4,5,6} y D2{1,2,3,4,5,6}

Por comprensión:

$D1 \times D2 = \{(x,y) | x \in D1 \wedge y \in D2\}$.

Por extensión:

$D1 \times D2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$

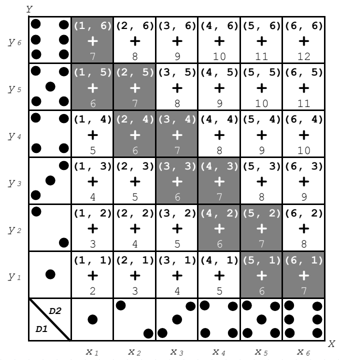
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$

$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

Donde:

(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),

(6,1), son las 11 formas de que la cara superior de ambos dados sume 6 o 7 puntos.



25. {6 puntos en el dado} y {águila en la moneda}

$\therefore$ D={6} y M={águila}

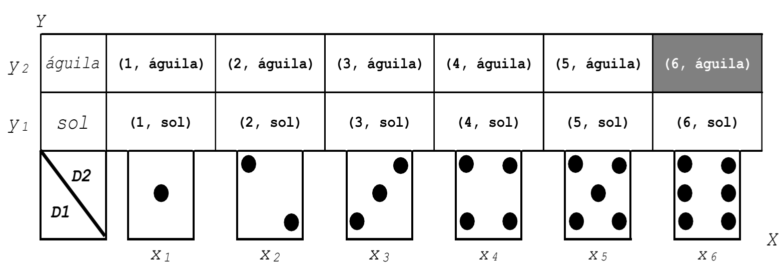
Por comprensión:

$D \times M = \{(x,y) | x \in D \wedge y \in M\}$.

Por extensión

$D \times M$={(6;águila)}.

Por lo tanto existe una sola forma.



26. {esferas con número par entre el 1 y 21} y

{color blanco de esfera}

$\therefore$ NE={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20} y CE={blanco}

Por comprensión:

$NE \times CE = \{(x,y) | x \in (2 \leq 2n \leq 20) \wedge y \in CE\}$.

Por extensión:

$NE \times CE$={(2,B),(4,B),(6,B),(8,b),(10,B),(12,B),(14,B),(16,B),

(18,B),(20,B)}.

Tiene 10 formas diferentes de ganar.

Y																						
y_3	rojo	(1,R)	(2,R)	(3,R)	(4,R)	(5,R)	(6,R)	(7,R)	(8,R)	(9,R)	(10,R)	(11,R)	(12,R)	(13,R)	(14,R)	(15,R)	(16,R)	(17,R)	(18,R)	(19,R)	(20,R)	(21,R)
y_2	blanco	(1,B)	(2,B)	(3,B)	(4,B)	(5,B)	(6,B)	(7,B)	(8,B)	(9,B)	(10,B)	(11,B)	(12,B)	(13,B)	(14,B)	(15,B)	(16,B)	(17,B)	(18,B)	(19,B)	(20,B)	(21,B)
y_1	verde	(1,V)	(2,V)	(3,V)	(4,V)	(5,V)	(6,V)	(7,V)	(8,V)	(9,V)	(10,V)	(11,V)	(12,V)	(13,V)	(14,V)	(15,V)	(16,V)	(17,V)	(18,V)	(19,V)	(20,V)	(21,V)
	Esfera	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}

X

27. {puntos de D1}+{puntos de D2} = 6

$\therefore$ D1={1,2,3,4,5} y D2={1,2,3,4,5}

Por comprensión:

$D1 \times D2 = \{(x,y) | x \in D1 \wedge y \in D2\}$.

Por extensión:

$D1 \times D2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),$

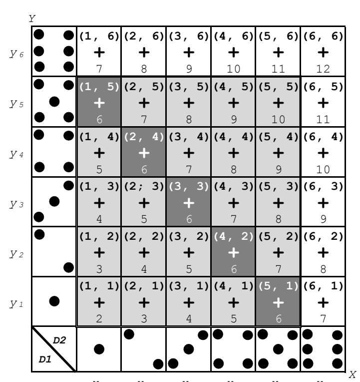
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$.

Donde (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1) son las 5 formas por lanzamiento de que la cara superior de ambos dados sumen 6 puntos.



Como Christian ya lanzó dos veces los dados y obtuvo 6, le restan 3 lanzamientos, de los cuales por cada lanzamiento tiene 5 formas diferentes de obtener seis como suma de los puntos de las caras superiores de ambos dados.

Por lo tanto: formas de que la suma sea seis = (3 lanzamientos pendientes)(5 formas por lanzamiento de que la suma sea seis) = 15 posibilidades de que vuelva a obtener 6.

28.1. {computadora 1 y 2} y

{becas para estudiar computación 1, 2, 3 y 4}

∴ C{C1,C2} y B{B1,B2,B3,B4}

Por comprensión:

$C\times B=\{(x,y)|x\in C \wedge y\in B\}$.

Por extensión:

$C\times B=\{(C1,B1),(C1,B2),(C1,B3),(C1,B4),$

$(C2,B1),(C2,B2),(C2,B3),(C2,B4)\}$.

Tiene 8 formas diferentes de ganar.

Y																				
y_{19}	Beca 4	(P1, B4)	(P2, B4)	(P3, B4)	(P4, B4)	(P5, B4)	(T1, B4)	(T2, B4)	(T3, B4)	(T4, B4)	(T5, B4)	(T6, B4)	(T7, B4)	(T8, B4)	(C1, B4)	(C2, B4)	(B1, B4)	(B2, B4)	(B3, B4)	(B4, B4)
y_{18}	Beca 3	(P1, B3)	(P2, B3)	(P3, B3)	(P4, B3)	(P5, B3)	(T1, B3)	(T2, B3)	(T3, B3)	(T4, B3)	(T5, B3)	(T6, B3)	(T7, B3)	(T8, B3)	(C1, B3)	(C2, B3)	(B1, B3)	(B2, B3)	(B3, B3)	(B4, B3)
y_{17}	Beca 2	(P1, B2)	(P2, B2)	(P3, B2)	(P4, B2)	(P5, B2)	(T1, B2)	(T2, B2)	(T3, B2)	(T4, B2)	(T5, B2)	(T6, B2)	(T7, B2)	(T1, B2)	(C1, B2)	(C2, B2)	(B1, B2)	(B2, B2)	(B3, B2)	(B4, B2)
y_{16}	Beca 1	(P1, B1)	(P2, B1)	(P3, B1)	(P4, B1)	(P5, B1)	(T1, B1)	(T2, B1)	(T3, B1)	(T4, B1)	(T5, B1)	(T6, B1)	(T7, B1)	(T8, B1)	(C1, B1)	(C2, B1)	(B1, B1)	(B2, B1)	(B3, B1)	(B4, B1)
y_{15}	Comp.2	(P1, C2)	(P2, C2)	(P3, C2)	(P4, C2)	(P5, C2)	(T1, C2)	(T2, C2)	(T3, C2)	(T4, C2)	(T5, C2)	(T6, C2)	(T7, C2)	(T8, C2)	(C1, C2)	(C2, C2)	(B1, C2)	(B2, C2)	(B3, C2)	(B4, C2)
y_{14}	Comp.1	(P1, C1)	(P2, C1)	(P3, C1)	(P4, C1)	(P5, C1)	(T1, C1)	(T2, C1)	(T3, C1)	(T4, C1)	(T5, C1)	(T6, C1)	(T7, C1)	(T8, C1)	(C1, C1)	(C2, C1)	(B1, C1)	(B2, C1)	(B3, C1)	(B4, C1)
y_{13}	Tel.8	(P1, T8)	(P2, T8)	(P3, T8)	(P4, T8)	(P5, T8)	(T1, T8)	(T2, T8)	(T3, T8)	(T4, T8)	(T5, T8)	(T6, T8)	(T7, T8)	(T8, T8)	(C1, T8)	(C2, T8)	(B1, T8)	(B2, T8)	(B3, T8)	(B4, T8)
y_{12}	Tel.7	(P1, T7)	(P2, T7)	(P3, T7)	(P4, T7)	(P5, T7)	(T1, T7)	(T2, T7)	(T3, T7)	(T4, T7)	(T5, T7)	(T6, T7)	(T7, T7)	(T8, T7)	(C1, T7)	(C2, T7)	(B1, T7)	(B2, T7)	(B3, T7)	(B4, T7)
y_{11}	Tel.6	(P1, T6)	(P2, T6)	(P3, T6)	(P4, T6)	(P5, T6)	(T1, T6)	(T2, T6)	(T3, T6)	(T4, T6)	(T5, T6)	(T6, T6)	(T7, T6)	(T8, T6)	(C1, T6)	(C2, T6)	(B1, T6)	(B2; T6)	(B3, T6)	(B1, T6)
y_{10}	Tel.5	(P1, T5)	(P2, T5)	(P3, T5)	(P4, T5)	(P5, T5)	(T1, T5)	(T2, T5)	(T3, T5)	(T4, T5)	(T5, T5)	(T6, T5)	(T7, T5)	(T8, T5)	(C1, T5)	(C2, T5)	(B1, T5)	(B2, T5)	(B3, T5)	(B4, T5)
y_{9}	Tel.4	(P1, T4)	(P2, T4)	(P3, T4)	(P4, T4)	(P5, T4)	(T1, T4)	(T2, T4)	(T3, T4)	(T4, T4)	(T5, T4)	(T6, T4)	(T7, T4)	(T8, T4)	(C1, T4)	(C2, T4)	(B1, T4)	(B2, T4)	(B3, T4)	(B4, T4)
y_{8}	Tel.3	(P1, T3)	(P2, T3)	(P3, T3)	(P4, T3)	(P5, T3)	(T1, T3)	(T2, T3)	(T3, T3)	(T4, T3)	(T5, T3)	(T6, T3)	(T7, T3)	(T8, T3)	(C1, T3)	(C2, T3)	(B1, T3)	(B2, T3)	(B3, T3)	(B1, T3)
y_{7}	Tel.2	(P1; T2)	(P2, T2)	(P3, T2)	(P4, T2)	(P5, T2)	(T1, T2)	(T2, T2)	(T3, T2)	(T4, T2)	(T5, T2)	(T6, T2)	(T7, T2)	(T8, T2)	(C1, T2)	(C2, T2)	(B1, T2)	(B2, T2)	(B3, T2)	(B4, T2)
y_{6}	**Tel.1**	(P1, T1)	(P2, T1)	(P3; T1)	(P4, T1)	(P5, T1)	(T1, T1)	(T2, T1)	(T3, T1)	(T4, T1)	(T5; T1)	(T6, T1)	(T7, T1)	(T8, T1)	(C1, T1)	(C2, T1)	(B1, T1)	(B2, T1)	(B3, T1)	(B4, T1)
y_{5}	Pase5	(P1, P5)	(P2, P5)	(P3, P5)	(P4, P5)	(P5, P5)	(T1, P5)	(T2, P5)	(T3, P5)	(T4, P5)	(T5, P5)	(T6, P5)	(T7, P5)	(T8, P5)	(C1, P5)	(C2, P5)	(B1, P5)	(B2, P5)	(B3, P5)	(B4, P5)
y_{4}	Pase4	(P1, P4)	(P2, P4)	(P3, P4)	(P4, P4)	(P5, P4)	(T1, P4)	(T2, P4)	(T3, P4)	(T4, P4)	(T5, P4)	(T6, P4)	(T7, P4)	(T8, P4)	(C1, P4)	(C2, P4)	(B1, P4)	(B2, P4)	(B3, P4)	(B4, P4)
y_{3}	Pase3	(P1, P3)	(P2, P3)	(P3, P3)	(P4, P3)	(P5, P3)	(T1, P3)	(T2, P3)	(T3, P3)	(T4, P3)	(T5, P3)	(T6, P3)	(T7, P3)	(T8, P3)	(C1, P3)	(C2, P3)	(B1, P3)	(B2, P3)	(B3, P3)	(B4, P3)
y_{2}	Pase2	(P1, P2)	(P2, P2)	(P3, P2)	(P4, P2)	(P5, P2)	(T1, P2)	(T2, P2)	(T3, P2)	(T4, P2)	(T5, P2)	(T6, P2)	(T7, P2)	(T8, P2)	(C1, P2)	(C2, P2)	(B1, P2)	(B2, P2)	(B3, P2)	(B4, P2)
y_{1}	Pase1	(P1, P1)	(P2, P1)	(P3, P1)	(P4; P1)	(P5, P1)	(T1, P1)	(T2, P1)	(T3, P1)	(T4, P1)	(T5, P1)	(T6, P1)	(T7, P1)	(T8, P1)	(C1, P1)	(C2, P1)	(B1, P1)	(B2, P1)	(B3, P1)	(B4, P1)
	Premios	P1	P2	P3	P4	P5	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	C1	C2	B1	B2	B3	B4
		x_{1}	x_{2}	x_{3}	x_{4}	x_{5}	x_{6}	x_{7}	x_{8}	x_{9}	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}

X

28.2. P{5 pases, 8 teléfonos, 2 computadoras, 4 beca}.

∴ P{P1, P2, P3, P4, P5, T1, T2 ,T3, T4, T5, T6, T7, T8, C1,C2,B1 B2, B3, B4}.

Por comprensión:

Boletas por extraer = $P\times P = \{(x,y)|x=y \wedge x\in P\}$.

Por extensión:

$P \times P$={(P1,P1),(P2,P2),(P3,P3),(P4,P4),(P5,P5),

(T1,T1),(T2,T2),(T3,T3),(T4,T4),(T5,T5),(T6,T6),(T7,T7),

(T8,T8),(C1;C1),(C2;C2),(B1,B1),(B2,B2),(B3,B3),(B4,B4)}.

Existen 19 formas de boletas residuales.

Y																				
y_{19}	Beca 4	(P1, B4)	(P2, B4)	(P3, B4)	(P4, B4)	(P5, B4)	(T1, B4)	(T2, B4)	(T3, B4)	(T4, B4)	(T5, B4)	(T6, B4)	(T7, B4)	(T8, B4)	**(C1, B4)**	**(C2, B4)**	(B1, B4)	(B2, B4)	(B3, B4)	**(B4, B4)**
y_{18}	Beca 3	(P1, B3)	(P2, B3)	(P3, B3)	(P4, B3)	(P5, B3)	(T1, B3)	(T2, B3)	(T3, B3)	(T4, B3)	(T5, B3)	(T6, B3)	(T7, B3)	(T8, B3)	**(C1, B3)**	**(C2, B3)**	(B1, B3)	(B2, B3)	**(B3, B3)**	(B4, B3)
y_{17}	Beca 2	(P1, B2)	(P2, B2)	(P3, B2)	(P4, B2)	(P5, B2)	(T1, B2)	(T2, B2)	(T3, B2)	(T4, B2)	(T5, B2)	(T6, B2)	(T7, B2)	(T1, B2)	**(C1, B2)**	**(C2, B2)**	(B1, B2)	**(B2, B2)**	(B3, B2)	(B4, B2)
y_{16}	Beca 1	(P1, B1)	(P2, B1)	(P3, B1)	(P4, B1)	(P5, B1)	(T1, B1)	(T2, B1)	(T3, B1)	(T4, B1)	(T5, B1)	(T6, B1)	(T7, B1)	(T8, B1)	**(C1, B1)**	**(C2, B1)**	(B1, B1)	(B2, B1)	(B3, B1)	(B4, B1)
y_{15}	Comp.2	(P1, C2)	(P2, C2)	(P3, C2)	(P4, C2)	(P5, C2)	(T1, C2)	(T2, C2)	(T3, C2)	(T4, C2)	(T5, C2)	(T6, C2)	(T7, C2)	(T8, C2)	(C1, C2)	**(C2, C2)**	(B1, C2)	(B2, C2)	(B3, C2)	(B4, C2)
y_{14}	Comp.1	(P1, C1)	(P2, C1)	(P3, C1)	(P4, C1)	(P5, C1)	(T1, C1)	(T2, C1)	(T3, C1)	(T4, C1)	(T5, C1)	(T6, C1)	(T7, C1)	(T8, C1)	**(C1, C1)**	(C2, C1)	(B1, C1)	(B2, C1)	(B3, C1)	(B4, C1)
y_{13}	Tel.8	(P1, T8)	(P2, T8)	(P3, T8)	(P4, T8)	(P5, T8)	(T1, T8)	(T2, T8)	(T3, T8)	(T4, T8)	(T5, T8)	(T6, T8)	(T7, T8)	**(T8, T8)**	(C1, T8)	(C2, T8)	(B1, T8)	(B2, T8)	(B3, T8)	(B4, T8)
y_{12}	Tel.7	(P1, T7)	(P2, T7)	(P3, T7)	(P4, T7)	(P5, T7)	(T1, T7)	(T2, T7)	(T3, T7)	(T4, T7)	(T5, T7)	(T6, T7)	**(T7, T7)**	(T8, T7)	(C1, T7)	(C2, T7)	(B1, T7)	(B2, T7)	(B3, T7)	(B4, T7)
y_{11}	Tel.6	(P1, T6)	(P2, T6)	(P3, T6)	(P4, T6)	(P5, T6)	(T1, T6)	(T2, T6)	(T3, T6)	(T4, T6)	(T5, T6)	**(T6, T6)**	(T7, T6)	(T8, T6)	(C1, T6)	(C2, T6)	(B1, T6)	(B2; T6)	(B3, T6)	(B1, T6)
y_{10}	Tel.5	(P1, T5)	(P2, T5)	(P3, T5)	(P4, T5)	(P5, T5)	(T1, T5)	(T2, T5)	(T3, T5)	(T4, T5)	**(T5, T5)**	(T6, T5)	(T7, T5)	(T8, T5)	(C1, T5)	(C2, T5)	(B1, T5)	(B2, T5)	(B3, T5)	(B4, T5)
y_9	Tel.4	(P1, T4)	(P2, T4)	(P3, T4)	(P4, T4)	(P5, T4)	(T1, T4)	(T2, T4)	(T3, T4)	**(T4, T4)**	(T5, T4)	(T6, T4)	(T7, T4)	(T8, T4)	(C1, T4)	(C2, T4)	(B1, T4)	(B2, T4)	(B3, T4)	(B4, T4)
y_8	Tel.3	(P1, T3)	(P2, T3)	(P3, T3)	(P4, T3)	(P5, T3)	(T1, T3)	(T2, T3)	**(T3, T3)**	(T4, T3)	(T5, T3)	(T6, T3)	(T7, T3)	(T8, T3)	(C1, T3)	(C2, T3)	(B1, T3)	(B2, T3)	(B3, T3)	(B1, T3)
y_7	Tel.2	(P1; T2)	(P2, T2)	(P3, T2)	(P4, T2)	(P5, T2)	(T1, T2)	**(T2, T2)**	(T3, T2)	(T4, T2)	(T5, T2)	(T6, T2)	(T7, T2)	(T8, T2)	(C1, T2)	(C2, T2)	(B1, T2)	(B2, T2)	(B3, T2)	(B4, T2)
y_6	**Tel.1**	(P1, T1)	(P2, T1)	(P3; T1)	(P4, T1)	(P5, T1)	**(T1, T1)**	(T2, T1)	(T3, T1)	(T4, T1)	(T5; T1)	(T6, T1)	(T7, T1)	(T8, T1)	(C1, T1)	(C2, T1)	(B1, T1)	(B2, T1)	(B3, T1)	(B4, T1)
y_5	Pase5	(P1, P5)	(P2, P5)	(P3, P5)	(P4, P5)	**(P5, P5)**	(T1, P5)	(T2, P5)	(T3, P5)	(T4, P5)	(T5, P5)	(T6, P5)	(T7, P5)	(T8, P5)	(C1, P5)	(C2, P5)	(B1, P5)	(B2, P5)	(B3, P5)	(B4, P5)
y_4	Pase4	(P1, P4)	(P2, P4)	(P3, P4)	**(P4, P4)**	(P5, P4)	(T1, P4)	(T2, P4)	(T3, P4)	(T4, P4)	(T5, P4)	(T6, P4)	(T7, P4)	(T8, P4)	(C1, P4)	(C2, P4)	(B1, P4)	(B2, P4)	(B3, P4)	(B4, P4)
y_3	Pase3	(P1, P3)	(P2, P3)	**(P3, P3)**	(P4, P3)	(P5, P3)	(T1, P3)	(T2, P3)	(T3, P3)	(T4, P3)	(T5, P3)	(T6, P3)	(T7, P3)	(T8, P3)	(C1, P3)	(C2, P3)	(B1, P3)	(B2, P3)	(B3, P3)	(B4, P3)
y_2	Pase2	(P1, P2)	**(P2, P2)**	(P3, P2)	(P4, P2)	(P5, P2)	(T1, P2)	(T2, P2)	(T3, P2)	(T4, P2)	(T5, P2)	(T6, P2)	(T7, P2)	(T8, P2)	(C1, P2)	(C2, P2)	(B1, P2)	(B2, P2)	(B3, P2)	(B4, P2)
y_1	Pase1	**(P1, P1)**	(P2, P1)	(P3, P1)	(P4; P1)	(P5, P1)	(T1, P1)	(T2, P1)	(T3, P1)	(T4, P1)	(T5, P1)	(T6, P1)	(T7, P1)	(T8, P1)	(C1, P1)	(C2, P1)	(B1, P1)	(B2, P1)	(B3, P1)	(B4, P1)
	Premios	P1	P2	P3	P4	P5	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	C1	C2	B1	B2	B3	B4
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19} X

29. $283.00

30. 14 años

31. 26 días

32. 96

33. Hay 60 árboles y se necesita plantar 180 árboles más.

34

15	15	15	15	15
15	8	1	6	15
15	3	5	7	15
15	4	9	2	15
15	15	15	15	15

60	60	60	60	60	60
60	18	12	12	18	60
60	14	16	16	14	60
60	16	14	14	16	60
60	12	18	18	12	60
60	60	60	60	60	60

35.

a) 2 divide a 127378 porque el número termina en cifra par.

b) 1 y 283939 divide a 283939 porque es número primo.

c) 2 y 5 divide a 65610 porque la última cifra es par o cero.

36.

a) mcm=360

b) mcm=1800

c) mcm=60

d) mcm=180

e) mcm=360

37. 120 minutos = 2 horas

38. Si los ciclistas resisten, en 11 horas y 24 minutos.

39.

a) $3^4 \times 2$

b) 3×343

c) $2^2 \times 5 \times 17$

1.6. Soluciones de la autoevaluación

1a: $A = \{0\}$,

1b: Puede ser $B = \{g\}$, $B = \{a\}$, $B = \{t\}$, $B = \{o\}$.

2a: $C = \{x \mid x = n^2, n \in N\}$,

2b: $D = \{x \mid x = \frac{1}{2^{n}}, n \in N\}$

3.1. Verdadera, ya que $\phi \subset A$, $\forall A$.

3.2. Falso, ya que 0 es un elemento y ϕ carece de elementos.

3.3. Falsa, ϕ no tiene elementos. Luego $\phi \notin \phi$.

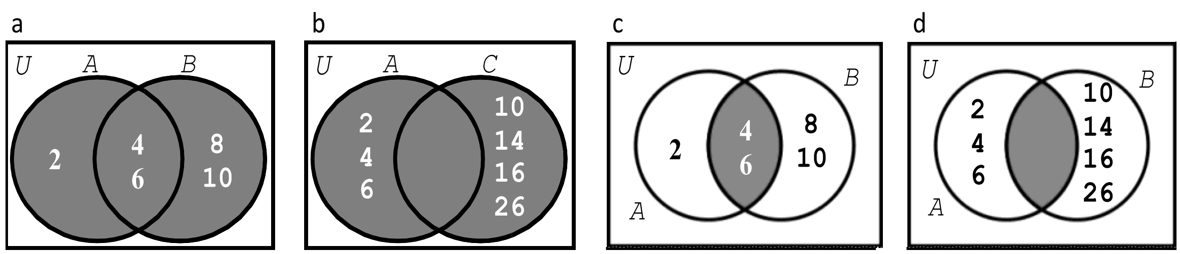
3.4. Falsa, ya que $\phi \not\subset \phi$.

4.1. Verdadero, ya que A tiene los elementos de B.

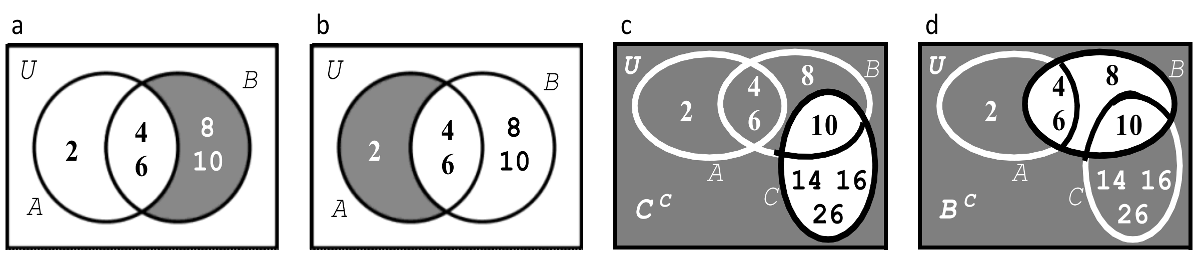
4.2. Verdadero, ya que $B \cap A = \{1,2\}$ y por consiguiente $2 \in (B \cap A)$.

4.3. Falso, porque el elemento 3 no pertenece a B.

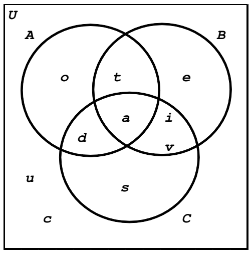
5. a4, b3, c2 y d1.



6. a3, b4, c1 y d2



7.1.



$A \cap B = \{a, t\}$
$A \cap C = \{a, d\}$
$B \cap C = \{a, i, v\}$
$A \cap B \cap C = \{a\}$

7.2. $(A^C - B^C)^C - C = [\{e,i,v,s,u,c\} - \{o,d,s,u,c\}]^C - \{d,i,v,a,s\}$

$= [\{e,i,v\}]^C - \{d,i,v,a,s\}$

$= \{d,u,c,a,t,o,s\} - \{d,i,v,a,s\}$

$= \{c,u,t,o\}$

7.3. Del diagrama de Venn-Euler obtenido en el primer inciso de este problema, se observa que $A \cap C = \{a, d\}$ y $B = \{v, i, t, a, e\}$, por lo tanto, $(A \cap C) \cup B = \{a, d, v, i, t, e\} \Rightarrow [(A \cap C) \cup B]^C = \{s, u, c, o\}$.

8.1. {2}

8.2. {3,4,5,8,9,10,11,12,13,14,16,17…}

8.3. {1,2,3,5,6,7,15}

8.4. {4,8,9,10,11,12,13,14,16,17,…}

8.5. {3,5},

8.6. {1,3,4,5,6,…}

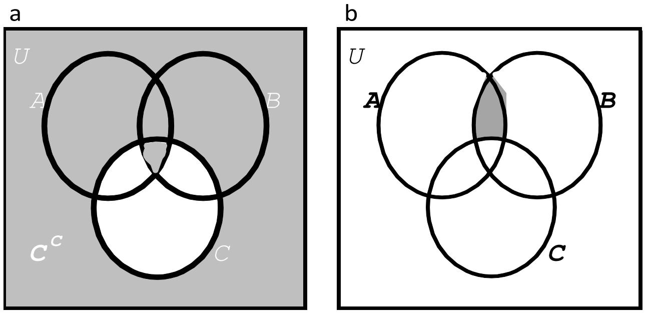
8.7. {2}

8.8. {1,6,7,15}

9.1.

9.2.

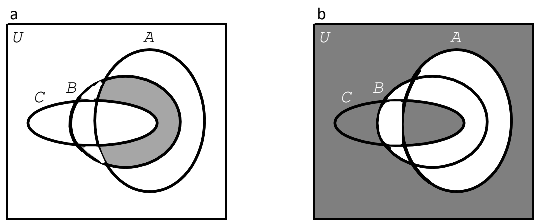
a b



$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C^C) \cap (B \cap C^C)$
$= A \cap C^C \cap B \cap C^C = (A \cap B) \cap C^C$
$= (A \cap B) - C$

10.1.

10.2.



$(A^C \cap B^C) \cup (A \cap C) = (A \cup B)^C \cup (A \cap C)$

11. {puntos de D1}+{puntos de D2} ≥ 2

∴ D1{1,2,3,4,5,6} y D2{1,2,3,4,5,6}

Por comprensión:

$D1 \times D2 = \{(x,y) | x \in D1 \wedge y \in D2\}$.

Por extensión:

$D1 \times D2$={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}.

Donde todos los pares son las caras posibles de los dos dados y de que sumen 2 o más puntos. Por lo tanto las posibilidades son 36.

Y						
y_6	(1, 6) + 7	(2, 6) + 8	(3, 6) + 9	(4, 6) + 10	(5, 6) + 11	(6, 6) + 12
y_5	(1, 5) + 6	(2, 5) + 7	(3, 5) + 8	(4, 5) + 9	(5, 5) + 10	(6, 5) + 11
y_4	(1, 4) + 5	(2, 4) + 6	(3, 4) + 7	(4, 4) + 8	(5, 4) + 9	(6, 4) + 10
y_3	(1, 3) + 4	(2, 3) + 5	(3, 3) + 6	(4, 3) + 7	(5, 3) + 8	(6, 3) + 9
y_2	(1, 2) + 3	(2, 2) + 4	(3, 2) + 5	(4, 2) + 6	(5, 2) + 7	(6, 2) + 8
y_1	(1, 1) + 2	(2, 1) + 3	(3, 1) + 4	(4, 1) + 5	(5, 1) + 6	(6, 1) + 7
D2 \ D1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 X

Eduardo tiene 36 posibilidades de que le sumen 2 o más puntos con ambos dados.

1.7. Conclusiones

Los conjuntos son usados incluso sin saberlo, por ejemplo, en electrónica hay antenas de conjunto enfasado[46] que son un arreglo de antenas que al unirse funcionan como una sola, cuyo ancho de banda se puede cambiar sin necesidad de cambiar cada una de ellas, esto tiene aplicación en el diseño y construcción de radares. En genética se habla de células que contienen conjuntos de información genética, en física podemos mencionar los conjuntos estadísticos, en química cuántica[47] te encontrarás con conjuntos de funciones propios de la materia.

Como ves esta herramienta es muy útil, pero deberás profundizar un poco más, ya que aquí solo se marcan algunas propiedades fundamentales de conjuntos para tu curso.

Referencias

[1] Hugo Barrantes (**2003**) *Introducción a la Matemática*. Costa rica: Libro UNED: Recuperada el 24 de junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=Oq8fk_Ys2iYC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[2]Bruce E. Meserve y Max A.Sobel(**2002**). *Introducción a las Matemáticas*. Reverte. . Recuperada el 24 de junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=Oq8fk_Ys2iYC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[3] Joseph Heinhold, Bruno Reidmuller (**1981**).*Algebra lineal y geometría analítica*: España. Reverte. Recuperada el 27 de junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=aFQ_wWdqQt0C&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[4] José Díaz (**2005**) *Introducción al Algebra*. España: Netbiblo. Recuperada 27 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[5] Wilfredo Caballero Armas (**1981**) *Introducción a la estadística*. San José Costa Rica. IICA: Recuperada 27 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[7] Pineda A. Leticia E. **(2004)** *Probabilidad y estadística*. España: Pearson. Recuperada 28 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[8] Velasco S. Gabriel & Piotr Marian Wisniewski **(2001)**. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Thomson. Recuperada 28 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[9] Consultar números naturales capítulo 2

[10] Consultar números racionales capítulo 2

[11] Consultar números reales capítulo 2

[12] Consultar números complejos capítulo 3

[13] Consultar números imaginarios capítulo 3

[14] Tom M. Apostol, Enrique Linés Escardó (**2006**) *Análisis matemático*. España. Reverte: Recuperada 28 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[15] Knut Sydsaeter, Peter Hammond (**1996**) *Matemáticas para el análisis económico*. Madrid. Pearson: Recuperada 28 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[16] José Díaz (**2005**) *Introducción al Algebra*. Netbiblo: Recuperada 29 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[17] Miguel Ángel Goberna, V. Jornet, R, R. Puente (**2000**) *Algebra Y Fundamentos: Una Introducción*. España. Ariel: Recuperada 29 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[18] Alicia Cofré J Lucila Tapia A (**2003***) Cómo desarrollar el razonamiento lógico y matemático*. Chile. Editorial Universitaria: Recuperada 29 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[19] María Huete De Guevara (**1996**) M*atemática Elemental Volumen 2*.San José Costa Rica. EUNED: Recuperada 29 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[20] Gladys Aponte (**1998**) *Fundamentos De Matemáticas Básicas México*. Pearson Educación: Recuperada 30 de Junio de 2011.
http://books.google.com/books?id=dgn3sKGyhfkC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[22] Enciclopedia temática interactiva Volumen II **(2003)**. *La guía universal del estudiante*. España: Ediciones Credimar.

[23] Operación binomia: si tomamos dos elementos de un conjunto y realizamos una operación el resultado es un solo elemento.

[24] No existe ningún número *a* del conjunto N que sumado a cualquier otro número natural nos dé un numero *b* (cero para la propiedad aditiva).

[25] No existe ningún número *a* del conjunto *N* que multiplicado a cualquier otro número natural nos dé un numero *b* (1 para la propiedad multiplicativa).

[26]Ariana Patricia **(2008)** *Matemáticas discretas*. Archivo de blog. Recuperada 15 de Julio del 2011.
http://matesdiscretas.blogspot.com/2008/05/introduccion.html

[27] algunos autores también consideran al número cero.

[28]Sterling Mary Jane.*Algebra I for dummies***(2010)**. E.U.A.:Wiley Publishing, Inc.

[29]http://www.alertatierra.com/VolParicutin.htm.Recuperado el 24 de junio del 2011.

[30]http://yachay.stormpages.com/02con/co_04.htm.consultado . Recuperado el 24 de junio del 2011.

[31]Vitutor (**2010**) *Operaciones con números reales*. España. Archivo de blog. Recuperada 15 de Julio del 2011. http://www.vitutor.com/di/re/r3.html

[32] (2010) *Números enteros*. Archivo de blog. España. Recuperada 15 de Julio del 2011. http://www.ditutor.com/numeros_enteros/numeros_enteros.html

[33] Cuando del número entero se considera únicamente su valor por sí mismo, independientemente del signo. Para determinar el valor absoluto, se encierra el número entero entre dos barras.

[34] Enciclopedia temática interactiva Volumen II **(2003)**. *La guía universal del estudiante*. España : Ediciones Credimar

[35]*Los números enteros*. Archivo de blog. Recuperada 15 de Julio del 2011.http://www.google.com.mx/#hl=es&source=hp&q=Es+el+proceso+inverso+a+la+propiedad+distributiva.+Si+varios+sumandos+tienen+un+factor+com%C3%BAn%2C+podemos+transformar+la+suma+en+producto+extrayendo+dicho+factor&btnG=Buscar+con+Google&oq=Es+el+proceso+inverso+a+la+propiedad+distributiva.+Si+varios+sumandos+tienen+un+factor+com%C3%BAn%2C+podemos+transformar+la+suma+en+producto+extrayendo+dicho+factor&aq=f&aqi=&aql=&gs_sm=s&gs_upl=5795l30474l0l32534l32l16l0l0l0l0l0l0ll0&bav=on.2,or.r_gc.r_pw.&fp=1&biw=1440&bih=698

[36] Ver tema 2.3 Números racionales de este capítulo.

[37] Ver tema 2.4 Exponenciación de este capítulo.

[38]Manuel María de la Rosa Vasco (**2004**). *Descartes 2d*. © Ministerio de Educación. Recuperada 15 de Julio del 2011. http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/divisibilidad/criterios_div.htm

[39] Teorema fundamental de la aritmética.

[40] Victorino Migueles Pablos **(1978).** *Formulario de matemáticas elementales*. España. Everest

[41] Ver tema 2.3.1.3 Número decimal de este capítulo.

[42] Ver tema 2.3.1 Números irracionales de este capítulo.

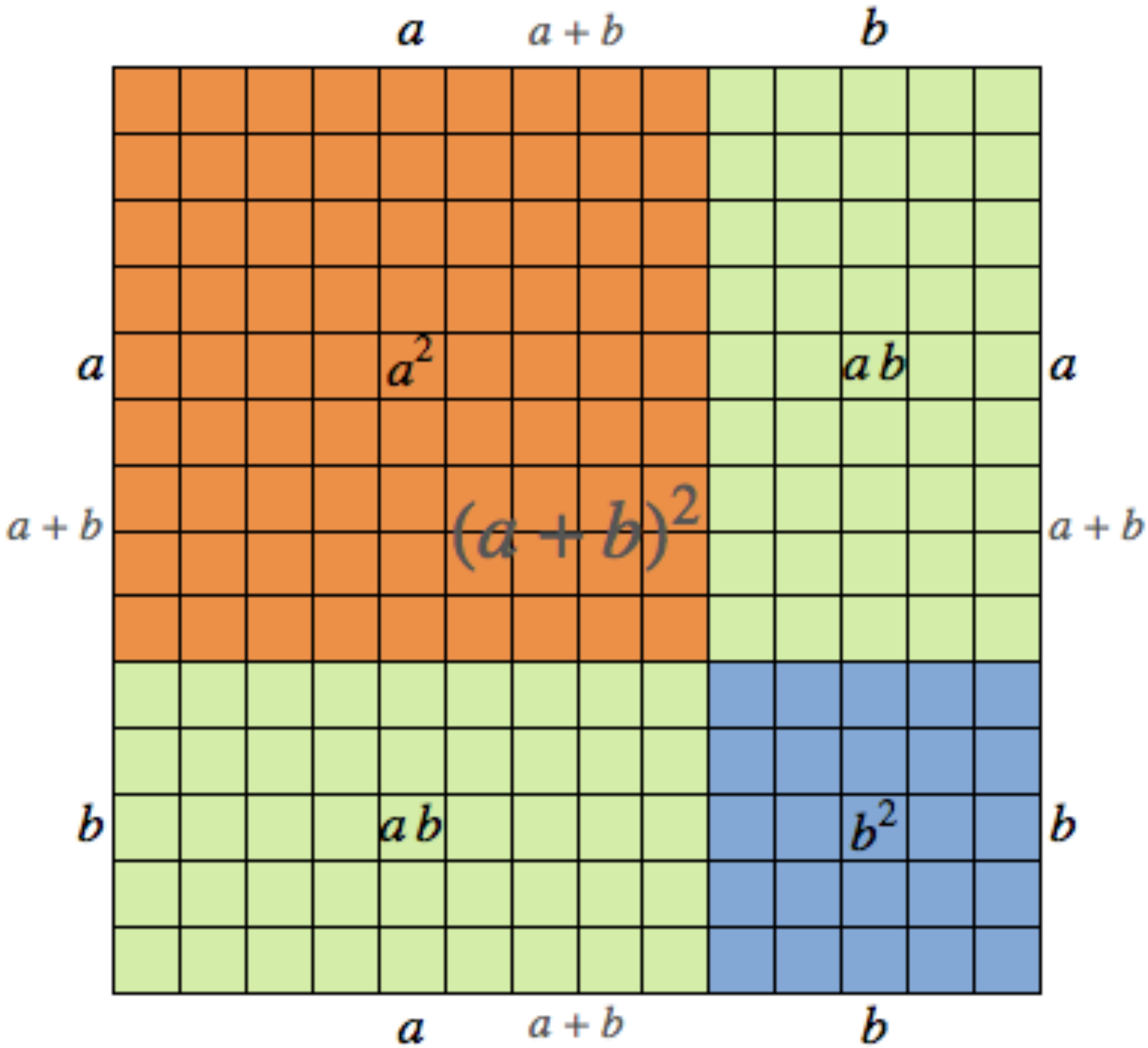
[43] Ver tema 2.3.2.3.1 Método de simplificación de fracciones de este capitulo

[44] Enciclopedia temática interactiva Volumen II **(2003)**. *La guía universal del estudiante*. España: Ediciones Credimar.

[45]Menor denominador común de todos los posibles.
[46] Tomasi Wayne **(2003).** *Sistemas de comunicaciones electrónicas*. México: Pearson.

[47] Levine, Ira N. **(2001)**. *Química cuántica.* España: Pearson Educación.

Capítulo 2. Álgebra



2. Introducción[1]

La operación matemática 3 + 2, que es la suma, es de fácil comprensión, y aún más fácil es su ejecución. A esta expresión, tres más dos lo asociamos a la idea natural que teniendo tres objetos le agregamos dos objetos, para obtener un total de cinco objetos. Lo que queremos decir con esto, que las operaciones matemáticas, por lo general, tienen una interpretación en situaciones reales. Por ejemplo, la operación 2 + 1, puede significar que tengo dos balones de futbol, y me han regalado 1 balón de futbol, lo que en total hace 3 balones de futbol.

Las matemáticas entonces, sirven para la vida real, sucede a veces, que no se puede estar estudiando caso a caso las diferentes problemáticas que se pueden resolver con las operaciones matemáticas, es entonces que se inventa un nuevo lenguaje llamado Álgebra. Esta álgebra consiste en asociar a los números las unidades que representa. Por ejemplo, la expresión tengo siete billetes de mil pesos por 7m, donde la letra **m** representa a un billete de mil pesos. De manera que la expresión algebraica: 7m + 5m = 12m significa, tener doce billetes de mil pesos. De igual manera, es posible que la letra **m** signifique un balón de futbol, entonces 7m + 5m = 12m, significa 12 balones de futbol.
El álgebra es una rama de las matemáticas donde se consideran las cantidades de forma general, para lo cual se usan letras, generalmente las últimas del abecedario, en álgebra aparecen números, que son cantidades conocidas y letras que representan tanto a cantidades bien definidas como a incógnitas o cantidades desconocidas.
Por ejemplo el peso de un cuerpo se calcula mediante la fórmula: $w = mg$ aquí la letra w representa al peso, m a la masa, estas son dos cantidades desconocidas que se relacionan de manera proporcional y g representa a una constante, la de la aceleración debida a la gravedad en la tierra $g = 9.81m/s^2$.

2.1. Lenguaje algebraico

Para resolver problemas matemáticos por medio del álgebra es necesario traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico. A continuación se muestran algunos ejemplos de expresiones en lenguaje común traducidas a lenguaje algebraico:

Un número cualquiera= x

El doble de un número=$2x$

La tercera parte de un número=$\frac{x}{3}$

La diferencia entre dos números=$x - y$

El cuadrado de la suma de dos números distintos=$(a + b)^2$

El producto de la suma por la diferencia de dos números=$(x + y)(x - y)$

El cuadrado del doble de un número menos el triple de otro= $(2x - 3y)^2$

Un número más su consecutivo=$x + (x + 1)$

Al traducir encontramos palabras claves como doble que lo traducimos como multiplicar por dos, la tercera parte, dividir entre tres, la diferencia equivale a la resta, el cuadrado de a, elevar a la potencia dos, el producto a la multiplicación.

Términos en álgebra[2]

Es cada parte de una expresión algebraica cuando estas están separadas por un signo. La parte numérica de un término que contiene una variable se llama coeficiente de la variable.

Término algebraico semejante

Los términos algebraicos semejantes son aquellos que contienen las mismas variables, tales como 7x y 11x o como 3a y 7a. Un término sin una variable se llama constante (una constante es una expresión que tiene un valor fijo). Los términos constantes también se llaman términos semejantes.

Término algebraico y sus partes

Una expresión algebraica es una combinación de números y símbolos (que representan números) unidos por las operaciones elementales como la suma, resta, multiplicación y división.

Por ejemplo: $9x^5y$, $\frac{-8x^2}{y}$ son expresiones algebraicas

Un término es una expresión algebraica que no está separada por el signo más ni por el signo menos.

Por ejemplo: 5pq, -234abcd, $\frac{7}{9}xy^3$

Grado absoluto de un término algebraico[3]

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables

Ejemplo: $-23x^3y^5$ su grado absoluto es 3+5=8

Propón la siguiente adivinanza a un amigo:

a) Piensa un número
b) Multiplícalo por 2
c) Añade 4 al resultado

d) Al resultado anterior multiplícalo por 3

e) Resta doce al resultado anterior

f) Divide lo obtenido entre 6

g) Réstale el número que pensaste

¡Te quedó cero!

Si llamamos x al número inicial, podemos escribir las expresiones algebraicas que obtenemos en cada paso:

a) $\boldsymbol{x}$

b) $2x$

c) $2x + 4$

d) $3(2x + 4) = 6x + 12$

e) $6x + 12 - 12 = 6x$

f) $\frac{6x}{6} = x$

g) $x - x = 0$

Como ves, podemos resolver problemas manejando expresiones algebraicas. A estas letras se les llama incógnitas, o indeterminadas (por norma, las letras se ordenan alfabéticamente).

Por ejemplo: $3x^2+6xy+3y^2$

Las expresiones algebraicas nos permiten traducir el lenguaje ordinario.

Una expresión algebraica está en forma reducida o simplificada si no tiene términos semejantes ni paréntesis, esto se llama reducción o simplificación de términos de una expresión.

Ejemplo: reducir la expresión 8(x+5).

$8(x+5) = 8(x)+8(5) =8x+40$

Reduce -3t+11-4t

Los términos semejantes son -3t y –4t

∴ -3t+11-4t = 11-3t-4t = 11-7t

En la siguiente expresión algebraica 5y+4+6y.

Identifica los términos, términos semejantes, constantes, coeficientes y factores; una vez identificada la estructura de la expresión simplifícala.

Términos: 5y, 4, 6y

Términos semejantes: 5y, 6y

Constantes: 4

Coeficientes: 5, 6

Factores: 4, 5, 6, y

Expresión algebraica simplificada: 11y+4

Tipos de expresiones algebraicas[4]

a) Monomio: es una expresión algebraica formada por un solo término, como 4x, $3a$, ax , $\frac{1}{5}x$, $\frac{a}{x}$, ax^2, $\sqrt{ax}$, etc.
b) Binomio: es una expresión algebraica formada por dos términos, como$(3+7x)$, (3a+4x), $(ax-\frac{1}{5}x)$,$(ax^2 \pm \sqrt{ax})$, etc
c) Trinomio: es una expresión algebraica formada por tres términos, como $(4+6x-ax)$, $(45 \pm \sqrt{ax} \pm ax^2)$, etc.
d) Polinomio: es una expresión algebraica formada por dos términos o más.

Los binomios y trinomio son polinomios con nombres especiales.

Clasificación de expresiones algebraicas[5]

Las expresiones algebraicas se pueden clasificar en función del tipo de operaciones que afectan a su parte literal, en enteras, racionales, e irracionales.

I. Expresión algebraica entera: es aquella en la cual no hay ninguna letra en el denominador. En el caso contrario, dicha expresión algebraica se llama fraccionaria.

Ejemplo: $-3a^3bx^2 - \frac{5}{7}ab^2c^5$, etc.

II. Expresión algebraica racional: es aquella en la cual no hay ninguna letra bajo un signo radical. En caso contrario, la expresión algebraica correspondiente recibe el nombre de irracional.

a) Expresiones algebraicas racionales: son términos que no tienen literal en el denominador.

Ejemplo: $5a^3$, $(a+b)\sqrt{2}$, $\frac{2a+3b}{2}$, etc

b) Expresión algebraica fraccionaria: son términos que tienen parte literal en el denominador.

Ejemplo:$\frac{5a^2b^3c}{3d}$, $-\frac{1}{x}$,$3a^3b^2c - \frac{1}{3d}$,etc.

III. Expresión algebraica irracional: son términos que poseen radicales.

Ejemplo:$\sqrt{a^2-b^2}$, $6\sqrt[4]{2x^2y^3}$,$\frac{2xy}{\sqrt[5]{z^3}}$

Valor numérico de una expresión algebraica[6]

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al efectuar las operaciones indicadas después de haber sustituido las letras por números, a cada letra, un número único que puede ser el mismo para diferentes letras, pero no puede ser distinto para la misma letra en posiciones distintas.

El valor numérico de una expresión algebraica depende de los valores atribuidos a sus letras. Una expresión algebraica puede tener diversos valores numéricos al variar los valores atribuidos a las letras.

Ejemplo: $3a^3b^2c - \frac{1}{3}d$

Para $a = -1, b = -2, c = \frac{1}{2}$ y $d = -6$

$$3a^3b^2c - \frac{1}{3}d = 3(-1)^3(-2)^2\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)(-6) = 3(-1)4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 6 + 2 = 8$$

Equivalencia de expresiones algebraicas

Son aquellas expresiones que tienen el mismo valor para todas las sustituciones permisibles.

Por ejemplo, algebraicamente x+2x=3x, por lo que estas dos expresiones son equivalentes.

Otro ejemplo son las expresiones $3(x.+4)$ y $3\,x.+12$, son expresiones equivalentes, porque tienen el mismo valor sin importar cuál sea el valor de x.

2.2. Operaciones algebraicas [7]

Las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con las expresiones algebraicas enteras son suma, resta, multiplicación y división.

Suma

Las sumas de expresiones algebraicas enteras se efectúan mediante la agrupación de términos semejantes. Solo se pueden sumar monomios y el resultado es otro monomio.

Ejemplo:

Suma de expresiones algebraicas	Resultado
3x+x	4x
$5y^2+3y^2$	$8y^2$
$4x^2+3x$	No se puede simplificar ya que 4x2 y 3x no son términos semejantes
2x+3y+3x+5y	Agrupando los términos semejantes en **x** y en **y** tenemos: (2x+3x)+(3y+5y)=5x+8y

Otra forma en que comúnmente se realizan las sumas es de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcr} 2x & + & 3y \\ x & + & y \\ \hline 3x & + & 4y \end{array} \qquad \text{o} \quad (2x+3y)+(x-y)=2x+3y+x-y=(2x+x)+(3y-y)=3x+2y$$

Como podemos ver, se quitaron primero los paréntesis y después se agruparon los términos semejantes. La suma se puede realizar con más de dos expresiones algebraicas, por ejemplo, podemos sumar *3x + 4y* con *2x + 5y* y *4y*, como podemos observar en la última expresión, a diferencia de las otras dos, no se encuentra ningún término con la variable **x**, sin embargo la operación se puede realizar como veremos:

$$\begin{array}{rcr} 3x & + & 4y \\ 2x & + & 5y \\ & + & 4y \\ \hline 5x & + & 13y \end{array} \qquad \text{o} \quad \begin{aligned} (3x+4y)+(2x+5y)+4y &= 3x+4y+2x+5y+4y \\ &= (3x+2x)+(4y+5y+4y) \\ &= 5x+13y \end{aligned}$$

Con la práctica las operaciones se hacen de manera inmediata sin tener que escribir las agrupaciones, sin embargo, el llevar a cabo las agrupaciones ayuda a adquirir la confianza en las operaciones.

Resta

La resta de dos operaciones algebraicas se realiza de manera similar a como se hace con la suma de operaciones algebraicas, es decir, se realizan las restas entre dos términos semejantes.

Ejemplo **:** restar 2x+2y de x–y.

$$-\begin{array}{rcr} x & - & y \\ 2x & + & 2y \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrcr} & x & - & y \\ -(2x & + & 2y) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & - & y \\ -2x & - & 2y \\ \hline -x & - & 3y \end{array}$$

o $(x-y)-(2x+2y)=x-y-2x-2y=(x-2x)+(-y-2y)=-x-3y$

Restar $2x^2+2y+z$ de x^2+2y.

$$-\begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ 2x^2 & + & 2y & + & z \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ -(2x^2 & + & 2y & + & z) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y & & \\ -2x^2 & - & 2y & - & z) \\ \hline -x^2 & - & 0 & - & z \end{array}$$

$(x^2+2y)-(2x^2+2y+z)=x^2+2y-2x^2-2y-z=(x^2-2x^2)+(2y-2y)+z=-x^2-z$

Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios se efectúa multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro y sumando todos los productos obtenidos, reduciendo términos semejantes, el resultado de la suma de estos productos generan un nuevo polinomio. Generalmente se ordenan ambos polinomios en orden creciente o decreciente.

La multiplicación se realiza de la forma siguiente:

a) Se realiza la multiplicación como ya se describió de los coeficientes *A* por *B*, si es un entero se escribe directamente en el resultado, si por el contrario, no lo es, se acostumbra dejarlo como fracción.
b) Si tienen las mismas variables ambos polinomios, se aplican las propiedades de los exponentes para expresar las variables con sus respectivas potencias en el resultado.

Multiplicar los siguientes monomios: 4x por 6

$$\begin{array}{r} 4x \\ \times \quad 6 \\ \hline 24x \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x)(6)=24x$$

Multiplicar los siguientes monomios 4x por 6x.

$$\begin{array}{r} 4x \\ \times \quad 6x \\ \hline 24x^2 \end{array} \qquad \text{o} \quad (4x)(6x)=24x^2$$

Multiplicar el monomio 4 por el binomio 4x+6.

$$
\begin{array}{r r c r}
\times & 4x & + & 6 \\
 & 6 & & \\
\hline
 & 24x & + & 36
\end{array}
$$

o

(4x+6)(6)=24x+36

Multiplicar el monomio 3x por el binomio 4x-6y.

$$
\begin{array}{r r c r}
\times & 4x & - & 6 \\
 & 3x & & \\
\hline
 & 12x^2 & - & 18x
\end{array}
$$

o $(4x-6)(3x)=24x^2+18x$

Multiplicar el monomio $3x^2$ por el binomio -4x-6y.

$$
\begin{array}{r r c r}
\times & -4x & - & 6y \\
 & 3x^2 & & \\
\hline
 & -12x^3 & - & 18x^2y
\end{array}
$$

o $(-4x-6)(3x^2)=-12x^3-18x^2y$

Multiplicar el binomio $3x^2+3$ por el binomio 4x-6y.

$$
\begin{array}{r r c r c r c r}
\times & 4x & - & 6y & & & & \\
 & 3x^2 & + & 3 & & & & \\
\hline
 & 12x^3 & - & 18x^2y & & & & \\
 & & & & + & 12x & - & 18y \\
\hline
 & 12x^3 & - & 18x^2y & + & 12x & - & 18y
\end{array}
$$

o $(4x-6y)(3x^2+3)=12x^3+12x-18x^2y-18y$

Se ordena el polinomio resultante alfabéticamente, así como el grado de forma decreciente:

$(4x-6y)(3x^2+3)=4x^3-18x^2y+12x-18y$

Multiplicar el trinomio $x^2+2x–1$ por el siguiente trinomio de grado dos x^2+2x+1

$$
\begin{array}{r}
\times \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{ccccccccc}
x^2 & + & 2x & - & 1 & & & & \\
x^2 & + & 2x & + & 1 & & & & \\
\hline
x^4 & + & 2x^3 & - & x^2 & & & & \\
 & & 2x^3 & + & 4x^2 & - & 2x & & \\
 & & & & x^2 & + & 2x & - & 1 \\
\hline
x^4 & + & 4x^3 & + & 4x^2 & & 0 & - & 1
\end{array}
$$

- $(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)=x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x-x^2-2x-1$
  $=x^4+(2x^3+2x^3)+(x^2+4x^2-x^2)+(2x-2x)-1$
  $=x^4+4x^3+4x^2-1$

División

La división se realiza de la forma siguiente:

a) Se realiza la división de los coeficientes *A* entre *B*, si es un entero se escribe directamente en el resultado, si por el contrario, no lo es, se acostumbra dejarlo como fracción.

b) Si tienen las mismas variables ambos polinomios, se aplican las propiedades de los exponentes para expresar las variables con sus respectivas potencias en el resultado.

c) Si no son iguales las variables del numerador con las del denominador, generalmente se dejan como aparecen, aunque también se pueden expresar las variables del numerador subiéndolas al numerador con potencias negativas.

I. División de dos monomios: la división de dos monomios se encuentra hallando el cociente de los coeficientes y el de las variables, el resultado es el producto de los cocientes de los coeficientes por el de las variables.

Ejemplo : dividir $32xy^2$ entre $2xyz$

$$\frac{32xy^2}{2xyz} = \frac{32}{2}\times\frac{x}{x}\times\frac{y^2}{y}\times\frac{1}{z} = 16\times1\times y\times\frac{1}{z} = \frac{16y}{z}$$

Dividir: $32xy^2z$ entre $2xyz$

$$\frac{32xy^2z}{2xyz} = \frac{32}{2}\times\frac{x}{x}\times\frac{y^2}{y}\times\frac{z}{z} = 16\times1\times y\times1 = 16y$$

II. División de un polinomio entre un monomio: la división de un polinomio entre un monomio se realiza sumando a sumando, en el caso de que existan las mismas variables.

Dividir a x^2+bx entre x

$$\frac{ax^2+bx}{x} = \frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} = ax + b$$

Dividir ax^2+bx+c entre dx

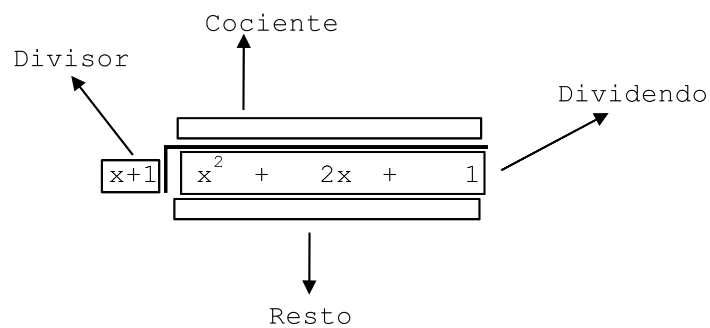
$$\frac{ax^2+bx+c}{dx} = \frac{ax^2}{dx} + \frac{bx}{dx} + \frac{c}{dx} = \frac{ax}{d} + \frac{b}{d} + \frac{cx^{-1}}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}x^{-1}$$

Dividir ax^2+bx+c entre dx

$$\frac{2x^5yz+3x^3y^2z+xy^2z^2}{xyz} = \frac{2x^5yz}{xyz} + \frac{3x^3y^2z}{xyz} + \frac{xy^2z^2}{xyz} = 2x^4 + 3x^2y + yz$$

III. División entre polinomios: para la división de dos polinomios, por la división larga, se emplea una serie de pasos que mediante el siguiente ejemplo se describirán:

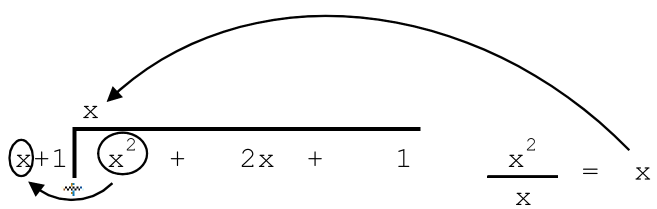
Dividir $2x+1+x^2$ entre $1+x$



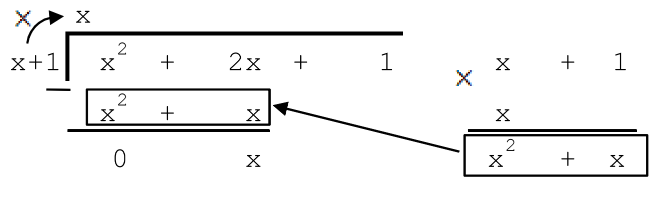
a) Se ordenan los términos de ambos polinomios según las potencias decrecientes (o crecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.

x^2+2x+1 y $x+1$

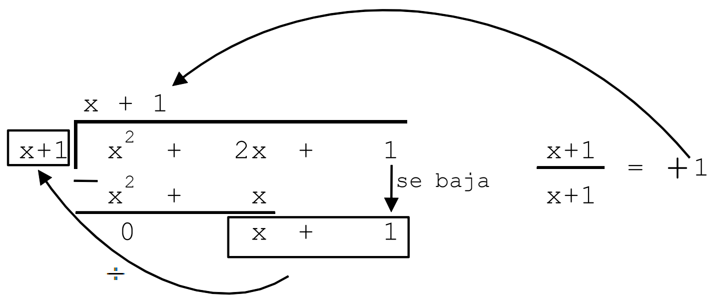
b) Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer término del cociente.



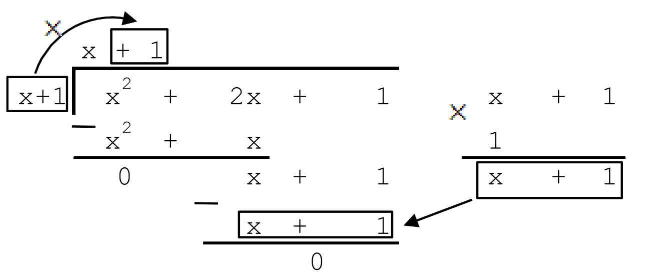
c) El primer término del cociente se multiplica por el divisor, para después restar este producto del dividendo.



d) Una vez realizado esta resta, ahora se centra la atención en este resultado (1er residuo parcial), el cual es un monomio que se completa a un polinomio con un número de términos similar al del divisor y para lo cual se bajan los términos siguientes necesarios del dividendo. Este polinomio recién formado se divide entre el divisor para formar el segundo término del cociente.



e) El divisor se multiplica por el 2° término del cociente, para después restar este producto del polinomio recién formado. Realizar esto de manera consecutiva hasta reducir el residuo a cero o a un polinomio de grado y extensión menor que el divisor.



f) Si el residuo es cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo.

$x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & \boxed{x+1} & & & & \\
\hline
\boxed{x+1} & x^2 & + & 2x & + & 1 \\
- & x^2 & + & x & & \\
\hline
 & 0 & & x & + & 1 \\
 & & - & x & + & 1 \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

También es posible presentar la operación de manera racional:

$$\frac{x^2+2x+1}{x+1} = \text{cociente} + \text{residuo} = (x+1)+0 = x+1$$

Como podrás darte cuenta la división larga se parece mucho a las divisiones aritméticas.

División sintética

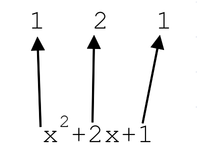
Si el divisor es un polinomio de primer grado de la forma x–c donde **c** es una constante, esta constante puede ser inclusive un número complejo, sin embargo, aquí **c** es una constante real.

Ahora explicaremos la división sintética, realizando de manera paralela el ejercicio anterior. El algoritmo de la división sintética se realiza de acuerdo a los pasos que se desarrollaran en el siguiente ejemplo.

Aplica la división sintética para dividir x^2+2x+1 entre $x+1$.

Recordar que el divisor es $x+1$ y el dividendo es x^2+2x+1

a) Listar los coeficientes del dividendo en orden decreciente de potencias de ***x***, escribiendo 0 para cada potencia de ***x*** que falte.

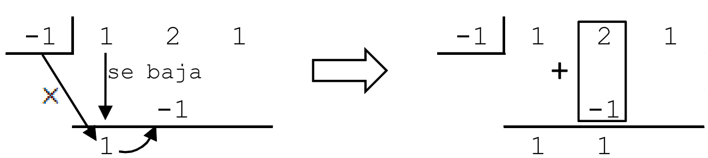


b) Colocar como prefijo de esta lista al valor de **x** que hace cero al divisor.

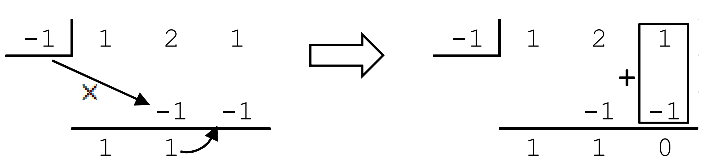
En este caso el prefijo es $x=-1$, que proviene del divisor cuando este lo hacemos cero; es decir: $x+1=0$ y la solución en x se encuentra despejando x $\therefore x=-1$.

```
Prefijo      1   2   1
  -1 |
```

c) Escribir en la parte inferior el coeficiente principal de la lista, multiplicarlo por el prefijo y sumar el producto al siguiente coeficiente de la lista.



d) Multiplicar por el prefijo la suma obtenida en el paso anterior y sumar el producto al siguiente coeficiente. Repetir este paso hasta haber usado todos los coeficientes de la lista.



g) Todos los elementos del tercer renglón excepto el último son los coeficientes del polinomio cociente, en orden decreciente de potencias, se comienza por una potencia menor a la que tiene el dividendo. El último elemento de este renglón es el residuo. Si el residuo es cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo.

Dividendo = x^2+2x+1 y es de grado 2 $\therefore$ el cociente de la división debe ser un grado menos, o sea, de grado 1, y el residuo es igual a cero; esto es:

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \longrightarrow \text{Residuo} \end{array}$$

$$\underbrace{1 \quad 1}_{\text{Polinomio cociente}}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$1\,x + 1 = x + 1$$

Comparación de un ejercicio por división larga y división sintética:

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1x + 1 = x+1 \\ \hline x+1 & x^2 + 2x + 1 \\ & -\,x^2 + x \\ \hline & 0 \quad\; x + 1 \\ & \quad -\,x + 1 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

Encontrar el cociente entre $2x^3–5x^2+3x+1$ y $x–3$ por el algoritmo de la división larga y por división sintética.

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 2x^2 & + & 1x & + & 6 & = & 2x^2+x+6 \\
\hline
x-3 & 2x^3 & - & 5x^2 & + & 3x & + & 1 \\
- & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & \\
\hline
 & 0 & - & x^2 & + & 3x & & \\
 & & & x^2 & - & 3x & & \\
\hline
 & & & 0 & - & 6x & + & 1 \\
 & & & & & 6x & - & 18 \\
\hline
 & & & & & 0 & & 19
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -5 & 3 & 1 \\
 & & 6 & 3 & 18 \\
\hline
 & 2 & 1 & 6 & 19
\end{array}
$$

Como podemos ver el residuo es diferente de cero, entonces el cociente y el divisor son factores del dividendo más el residuo resultante; esto es:

$2x^3–5x^2+3x+1= (2x^2+x+6)(x–3)+19$

También es posible presentar la operación de manera racional:

$$\frac{2x^3-5x^2+3x+1}{x-3} = (2x^2+x+6)+19$$

Operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales

Las 4 operaciones básicas que se pueden realizar con las expresiones algebraicas racionales son las mismas que se analizaron con expresiones algebraicas enteras.

Suma

Las sumas de expresiones algebraicas racionales se efectúan mediante la agrupación de términos semejantes. Solo se pueden sumar monomios y el resultado es otro monomio.

Sumar $\frac{2a}{3b}+\frac{4a}{5b}$

$$\frac{2a}{3b}+\frac{4a}{5b}=\frac{6a}{8b}=\frac{3a}{4b}$$

Efectúa la siguiente operación:

$$\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}+\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

Primero se evalúa el mcm (máximo común múltiplo) de los denominadores:

$c-d=c-d$

$c+d=c+d$

$c^2-d^2=(c+d)(c-d)$

$\therefore$ mcm = $(c+d)(c-d)$

Segundo, se resuelve el primer término de la expresión algebraica racional, para lo cual, el mcm se divide por el denominador de la primera fracción:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c-d)}=c+d$$

Tercero, el cociente de la división se multiplica por el numerador de dicha fracción:

$$(c+d)(a+b)=(ac+bc+ad+bd)$$

Y así se resuelve cada término.

Para el 2º término:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c+d)} = c-d; \qquad (c-d)(a-b) = (ac-bc-ad+bd)$$

Para el 3er. término:

$$\frac{(c+d)(c-d)}{(c^2-d^2)} = \frac{(c+d)(c-d)}{(c+d)(c-d)} = 1; \qquad (1)(a^2-b^2) = (a^2-b^2)$$

La operación quedaría así:

$$\frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d} + \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{(ac+bc+ad+bd) + (ac-bc-ad+bd) + (a^2-b^2)}{c^2-d^2}$$

Se agrupan los términos semejantes, eliminando los que sean iguales pero de diferente signo.

$$\frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d} + \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{ac+bc+ad+bd+ac-bc-ad+bd+a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

$$\frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d} + \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{ac+bd+ac+bd+a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{2ac+2bd+a^2-b^2}{c^2-d^2}$$

Ordenando por grado

$$\frac{a+b}{c-d} + \frac{a-b}{c+d} + \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} = \frac{a^2+2ac+2bd-b^2}{c^2-d^2}$$

Resta

Para la resta de expresiones algebraica racionales se presentan los mismos casos que para la suma y su solución es la misma, únicamente se prevé el cambio del signo más (+) por el de menos (–).

Multiplicación

El producto de expresiones algebraicas racionales se realiza al igual que como se estudió en las operaciones básicas con expresiones algebraicas enteras. En la multiplicación de fracciones, el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas, pero en este caso en particular se factorizan[8] y se simplifican[9], como se describe a continuación en el siguiente ejemplo.

Realizar el siguiente producto.

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)$$

Factorizar lo que sea posible del numerador y denominador de cada término de la expresión algebraica:

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\left[\frac{3(4x^2-1)}{15}\right]\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)$$

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\frac{(4x^2-1)(3)(1)(5)}{(15)(2x+1)(2x+1)}=\frac{(4x^2-1)(15)}{(2x+1)(2x+1)(15)}$$

$$\left(\frac{12x^2-3}{15}\right)\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{5}{2x+1}\right)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x+1)(2x+1)}=\frac{(2x-1)}{(2x+1)}$$

Realizar el siguiente producto:

$$\left(\frac{a}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{t+b}\right)\left(\frac{t^2+2tb+b^2}{a}\right)$$

Factorizar lo que sea posible del numerador y denominador de cada término de la expresión algebraica.

$$(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2$$
$$(t^2+2tb+b^2)=(t+b)^2$$

Se sustituyen estos valores en la expresión algebraica original.

$$\left(\frac{a}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{t+b}\right)\left(\frac{t^2+2tb+b^2}{a}\right)=\left[\frac{a}{(a+b)^2}\right]\left(\frac{a+b}{t+b}\right)\left[\frac{(t+b)^2}{a}\right]$$

$$\left(\frac{a}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{t+b}\right)\left(\frac{t^2+2tb+b^2}{a}\right)=\frac{(a+b)(t+b)^2(a)}{(a+b)^2(t+b)(a)}=\frac{t+b}{a+b}$$

División

Para dividir dos expresiones algebraicas fraccionarias, es suficiente con multiplicar la primera con el inverso de la segunda y luego se reducen términos semejantes resultantes del producto.

Efectúa la siguiente división.

$$\frac{1}{3}(a^2 - b^2) \div \frac{1}{6}(a + b)$$

$$\frac{(a^2 - b^2)}{3} \div \frac{(a + b)}{6} = \frac{(a^2 - b^2)}{3} \times \frac{6}{(a + b)} = \frac{6(a^2 - b^2)}{3(a + b)} = \frac{2(a + b)(a - b)}{(a + b)}$$

$$= 2(a - b)$$

Efectúa la siguiente división:

$$\frac{3x - 27}{x^2 - 9} \div \frac{x - 9}{x^2 + 18x + 9}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes de acuerdo a recomendaciones de ejemplos del tema anterior y se reducen términos semejantes.

$$\frac{3x - 27}{x^2 - 9} \div \frac{x - 9}{x^2 + 18x + 9} = \frac{3x - 27}{x^2 - 9} \times \frac{x^2 + 18x + 9}{x - 9} = \frac{3(x - 9)}{x^2 - 3^2} \times \frac{(x + 3)^2}{x - 9}$$

$$= \frac{3(x + 3)^2(x - 9)}{(x + 3)(x - 3)(x - 9)}$$

$$\frac{3x - 27}{x^2 - 9} \div \frac{x - 9}{x^2 + 18x + 9} = \frac{3(x + 3)}{(x - 3)}$$

Simplificación de expresiones algebraicas racionales

a) De ser posible se factoriza[10] el numerador y denominador de la fracción.
b) Se reducen términos semejantes resultantes de la factorización del paso anterior

Ejemplo : simplifica la siguiente expresión algebraica.

$$\frac{x^3 - 16x}{2x^2 - 8x + 16}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes tanto en el numerador como en el denominador de la fracción y se reducen términos semejantes.

$$\frac{x^3 - 16x}{2x^2 - 8x + 16} = \frac{x(x^2 - 16)}{2(x^2 - 8x + 16)} = \frac{x(x^2 - 4^2)}{2(x-4)^2} = \frac{x(x+4)(x-4)}{2(x-4)^2} = \frac{x(x+4)}{2(x-4)}$$

Simplificar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{a^2 + ab}{a^2 + ab - ac - bc}$$

Se realizan las factorizaciones pertinentes tanto en el numerador como en el denominador de la fracción y se reducen términos semejantes.

$$\frac{a^2 + ab}{a^2 + ab - ac - bc} = \frac{a(a+b)}{(a^2 + ab) + (-ac - bc)} = \frac{a(a+b)}{a(a+b) + c(-a - b)}$$

$$= \frac{a(a+b)}{a(a+b) - c(a+b)}$$

$$\frac{a^2 + ab}{a^2 + ab - ac - bc} = \frac{a(a+b)}{(a+b)(\square - c)} = \frac{a}{a - c}$$

Potencia de expresiones algebraicas enteras y racionales

La exponenciación es una multiplicación de varios factores iguales, es decir, una multiplicación abreviada, y para evaluarla es suficiente con aplicar la regla de multiplicación tantas veces como lo indique el exponente.

Ejemplo: evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.

$$(a+b)^2$$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.

$$(a-b)^2$$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial entera.

$$(a+b-c)^3$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
1 \times & a & + & b & - & c & & & & & & \\
2 & a & + & b & - & c & & & & & & \\
\hline
 & a^2 & + & ab & - & ac & & & & & & \\
 & & & ab & & & + & b^2 & - & bc & & \\
 & & & & - & ac & & & - & bc & + & c^2 \\
\hline
 & a^2 & + & 2ab & - & 2ac & + & b^2 & - & 2bc & + & c^2
\end{array}$$

Se eliminan términos semejantes (si los hay) y se ordena de acuerdo a grado y alfabéticamente.

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

El resultado se multiplica una vez más por la base de la exponencial porque el exponente de la misma es 3.

$$
3\ \times\quad
\begin{array}{cccccccccc}
a^2 & +b^2 & +c^2 & +2ab & -2ac & -2bc & & & & \\
a & +b & -c & & & & & & & \\
\hline
a^3 & +ab^2 & +ac^2 & +2a^2b & -2a^2c & -2abc & & & & \\
 & +2ab^2 & & +a^2b & & -2abc & +b^3 & +bc^2 & -2b^2c & \\
 & & +2ac^2 & & -a^2c & -2abc & & +2bc^2 & -b^2c & -c^3 \\
\hline
a^3 & +3ab^2 & +3ac^2 & +3a^2b & -3a^2c & -6abc & +b^3 & +3bc^2 & -3b^2c & -c^3
\end{array}
$$

Finalmente se eliminan términos semejantes (si los hay) y se ordena de acuerdo a grado y alfabéticamente.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + 3ac^2 - 3a^2c - 6abc$$

Evalúa la potencia de la siguiente exponencial con base polinomial racional.

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2$$

Operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales.

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}=\frac{5a+3b}{(3)(5)}=\left(\frac{5a+3b}{15}\right)$$

Sustituir en expresión original

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2=\left(\frac{5a+3b}{15}\right)^2=\frac{(5a+3b)^2}{(15)^2}=\frac{(5a+3b)(5a+3b)}{225}=\frac{25a^2+30ab+9b^2}{225}$$

Se simplifica

$$\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{5}\right)^2=\left(\frac{5a+3b}{15}\right)^2=\frac{25a^2+30a\square+9b^2}{225}=\frac{25a^2}{225}+\frac{30ab}{225}+\frac{9b^2}{225}=\frac{a^2}{9}+\frac{2ab}{15}+\frac{b^2}{25}$$

Radicales de polinomios[11]

Raíz cuadrada de polinomios enteros

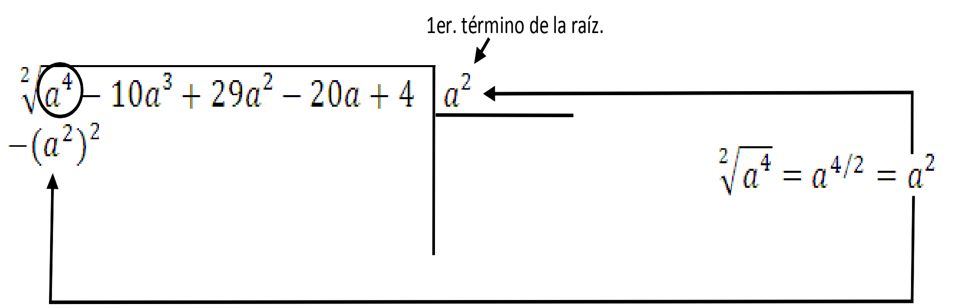
Para extraer la raíz cuadrada de una expresión algebraica entera se aplica el siguiente método que se detallará a través del ejemplo a continuación:

Evalúa la raíz cuadrada de $a^4 - 20a + 4 + 29a^2 - 10a^3$

a) Se ordena el polinomio dado:

$$a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4$$

b) Se halla la raíz cuadrada del primer término del polinomio, que será el primer término de la raíz cuadrada; se eleva al cuadrado esta raíz y se resta al polinomio.



c) Se bajan los dos términos siguientes del polinomio y se divide el primero de estos por el duplo del primer término de la raíz. El cociente es el segundo término de la raíz. Este segundo término de la raíz con su propio signo se escribe al lado del duplo (multiplicar por 2) del primer término de la raíz y se forma un binomio; este binomio se multiplica por dicho segundo término y el producto se resta de los dos términos que habíamos bajado.

1er. término de la raíz. 2º término de la raíz.

$$\sqrt[2]{a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4} \quad \Big| \quad a^2 - 5a$$

$$\begin{array}{l} -a^4 \\ \hline 0 - 10a^3 + 29a^2 \\ -(-10a^3 + 25a^2) \end{array}$$

El duplo de 1er. término de la raíz es: $2a^2$

∴ se divide este 1er. término del binomio que bajamos (residuo) entre este duplo.

$$\frac{-10a^3}{2a^2} = -5a$$

El duplo de 1er. término de la raíz.

Este 2º término de la raíz se escribe al lado del duplo del 1er. término de la raíz y se forma un binomio que debemos multiplicar por dicho segundo término de la raíz recien obtenido:

$$(2a^2 - 5a)(-5a) = \underline{-10a^3 + 25a}$$

d) Se bajan los términos necesarios para tener tres términos en el residuo. Se duplica la parte de la raíz ya hallada (1er y 2º término de la raíz) y se divide el primer término del residuo entre el primero de este duplo. El cociente es el tercer término de la raíz. Este tercer término con su propio signo, se escribe al lado del duplo de la parte de la raíz hallada y se forma un trinomio; este trinomio se multiplica por dicho tercer término de la raíz y el producto se resta al residuo.

1er. término de la raíz. 2º término de la raíz. 3er. término de la raíz.

$$\sqrt[2]{a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4} \quad \Big| \quad a^2 - 5a + 2$$

$$\begin{array}{l} -a^4 \\ \hline 0 - 10a^3 + 29a^2 \\ \quad +10a^3 - 25a^2 \\ \hline \quad 0 \quad +4a^2 \quad -20a + 4 \\ \quad -(+4a^2 \quad -20a + 4) \end{array}$$

El duplo de la raíz hallada es:
$2(a^2 - 5a) = 2a^2 - 10a$

Siendo el 1er. térm. de este duplo: $2a^2$

∴ se divide el 1er. término del residuo ($4a^2$) entre el 1er. térm. del duplo ($2a^2$)

$$\frac{4a^2}{2a^2} = 2$$

1er. término del duplo.

Este 3er. término de la raíz se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio que debemos multiplicar por dicho 3er. término de la raíz recien obtenido:

$$(2a^2 - 10a + 2)(2) = \underline{4a^2 - 20a + 4}$$

e) Se continua el procedimiento anterior, dividiendo siempre el primer término del residuo entre el primer término del duplo de la parte de la raíz hallada, hasta obtener residuo cero.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[2]{a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4} & a^2 - 5a + 2 \\
\cline{2-2}
\underline{-a^4} & \sqrt[2]{a^4} = a^{4/2} = a^2 \\
\quad 0 - 10a^3 + 29a^2 & (2a^2 - 5a)(-5a) = -10a^3 + 25a \\
\qquad \underline{+10a^3 - 25a^2 \qquad\qquad\quad} & (2a^2 - 10a + 2)(2) = 4a^2 - 20a + 4 \\
\qquad\quad 0 \qquad + 4a^2 \quad - 20a + 4 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-4a^2 \quad + 20a - 4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cuadrada de la raíz es el radicando de la radicación.

$$(a^2 - 5a + 2)^2 = a^4 - 10a^3 + 29a^2 - 20a + 4$$

Raíz cuadrada de polinomios racionales

Prácticamente se emplea la misma metodología del caso anterior, teniendo presente de simplificar cada vez que se pueda.

Nota: La raíz cuadrada de un polinomio racional con denominadores que contengan literales, puede extraerse enviando las letras al numerador cambiándole el signo a sus exponentes.

La extracción de la raíz cuadrada de una expresión algebraica racional se comprenderá mejor a través del ejemplo a continuación:

Ejemplo: evalúa la raíz cuadrada de $\frac{b^4}{25} - \frac{a^3b}{2} + \frac{a^4}{16} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5}$

a) $\frac{a^4}{16} - \frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5} + \frac{b^4}{25}$

b)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16} - \frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5} + \frac{b^4}{25}} \quad \Big| \quad \frac{a^2}{4}$$

$$-\left[\frac{a^2}{4}\right]^2$$

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}} = \frac{\sqrt[2]{a^4}}{\sqrt{16}} = \frac{a^{4/2}}{4} = \frac{a^2}{4}$$

c)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16} - \frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5} + \frac{b^4}{25}} \quad \Big| \quad \frac{a^2}{4} - ab$$

$$-\frac{a^4}{16}$$

$$0 \quad -\frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10}$$

$$-\left[-\frac{a^3b}{2} + a^2b^2\right]$$

El duplo del 1er. término de la raíz es:

$$2\left[\frac{a^2}{4}\right] = \frac{2a^2}{4} = \boxed{\frac{a^2}{2}}$$

∴ se divide este 1er. término del binomio que bajamos (residuo) entre este duplo.

$$\frac{-\frac{a^3b}{2}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2a^3b}{2a^2} = \boxed{-ab}$$

Este 2º término de la raíz se escribe al lado del duplo del 1er. término de la raíz y se forma un binomio que debemos multiplicar por dicho segundo término de la raíz recien obtenido:

$$\left[\boxed{\frac{a^2}{2}}\boxed{-ab}\right]\left[\boxed{-ab}\right] = -\frac{a^3b}{2} + a^2b^2$$

d)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}} \quad \Big| \quad \frac{a^2}{4}-ab-\frac{b^2}{5}$$

$$-\frac{a^4}{16}$$

$$0 \quad -\frac{a^3b}{2}+\boxed{\frac{9a^2b^2}{10}}$$

$$+\frac{a^3b}{2}\boxed{-a^2b^2}$$

$$0 \quad -\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

$$-\left[-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}\right]$$

$$+\frac{9a^2b^2}{10}-\frac{a^2b^2}{1}=\frac{9a^2b^2-10a^2b^2}{10}=-\frac{a^2b^2}{10}$$

El duplo de la raíz hallada es:

$$2\left[\frac{a^2}{4}-ab\right]=\frac{2a^2}{4}-2ab=\boxed{\frac{a^2}{2}-2ab}$$

Siendo el 1er. térm. de este duplo: $\frac{a^2}{2}$

∴ se divide el 1er. término del residuo entre el 1er. térm. del duplo:

$$\left[\frac{-\frac{a^2b^2}{10}}{\frac{a^2}{2}}\right]=-\frac{2a^2b^2}{10a^2}=\boxed{-\frac{b^2}{5}}$$

Este 3er. término de la raíz se escribe al lado del duplo de la raíz hallada y se forma un trinomio que debemos multiplicar por dicho 3er. término de la raíz recien obtenido:

$$\left[\boxed{\frac{a^2}{2}-2ab}\boxed{-\frac{b^2}{5}}\right]\left[\boxed{-\frac{b^2}{5}}\right]=-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

e)

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}-\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}} \quad \Big| \quad \frac{a^2}{4}-ab-\frac{b^2}{5}$$

$$-\frac{a^4}{16}$$

$$0 \quad -\frac{a^3b}{2}+\frac{9a^2b^2}{10}$$

$$+\frac{a^3b}{2}-a^2b^2$$

$$0 \quad -\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

$$+\frac{a^2b^2}{10}-\frac{2ab^3}{5}-\frac{b^4}{25}$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$\sqrt{\frac{a^4}{16}}=\frac{\sqrt[2]{a^4}}{\sqrt{16}}=\frac{a^{4/2}}{4}=\frac{a^2}{4}$$

$$\left[\frac{a^2}{2}-ab\right]\left[-ab\right]=-\frac{a^3b}{2}+a^2b^2$$

$$\left[\frac{a^2}{2}-2ab-\frac{b^2}{5}\right]\left[-\frac{b^2}{5}\right]=$$

$$=-\frac{a^2b^2}{10}+\frac{2ab^3}{5}+\frac{b^4}{25}$$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cuadrada de la raíz es el radicando de la radicación.

$$\left(\frac{a^2}{4} - ab - \frac{b^2}{5}\right)^2 = \frac{a^4}{16} - \frac{a^3b}{2} + \frac{9a^2b^2}{10} + \frac{2ab^3}{5} + \frac{b^4}{25}$$

Raíz cúbica de polinomios enteros

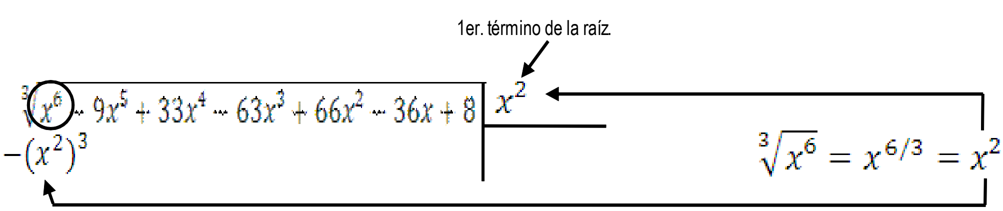
Para extraer la raíz cúbica de una expresión algebraica entera, se aplica el siguiente método que se detallará a través del ejemplo a continuación:

Hallar la raíz cúbica de $33x^4 - 36x + 8 - 63x^3 - 9x^5 + x^6 + 66x^2$

a) Se ordena el polinomio dado

$$x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$$

b) Se extrae la raíz cúbica de su primer término, que será el primer término de la raíz; este término se eleva al cubo y se resta del polinomio.



c) Se bajan los tres términos siguientes del polinomio y se divide el primero de ellos por el triplo (multiplicar por 3) del cuadrado del término ya hallado de la raíz; el cociente de esta división es el segundo término de la raíz.

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8} & x^2-3x \\ \underline{-x^6} & \\ 0\ -9x^5+33x^4-63x^3 & \end{array}$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz es: $3(x^2)^2 = 3x^4$

$\therefore$ se divide este 1er. término del trinomio que bajamos (residuo) entre este triplo.

$$\frac{-9x^5}{3x^4} = -3x$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz.

d) Se forman tres productos: 1º.- El triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo término de la raíz. 2º.- El triplo del primer término de la raíz por el cuadrado del segundo término de la raíz. Y 3º.- Cubo del segundo término de la raíz. Estos productos se restan (cambiándole los signos) de los tres términos del polinomio que se habían bajado (residuo).

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8} & x^2-3x \\ \underline{-x^6} & \\ 0\ -9x^5+33x^4-63x^3 & \\ \quad -(-9x^5+27x^4-27x^3) & \end{array}$$

1º $3(x^2)^2(-3x) = -9x^5$

2º $3x^2(-3x)^2 = 27x^4$

3º $(-3x)^3 = -27x^3$

e) Se bajan los términos que faltan del polinomio y se divide el primer término del residuo entre el primer término del triplo del cuadrado de la raíz ya hallada. El cociente de esta división, es el tercer término de la raíz. Se forman tres productos: 1º.- Triplo del cuadrado del binomio que forman el primer y segundo término de la raíz por el tercer término de la raíz. 2º.- Triplo de dicho binomio por el cuadrado del tercer término de la raíz. y 3º.- Cubo del tercer término de la raíz. Estos productos se restan (reduciendo previamente términos semejantes si los hay) del residuo de la raíz. Si la diferencia es cero, la operación ha terminado. Si aún quedan términos en el residuo, se continúa el procedimiento anterior hasta obtener residuo cero.

1er. término de la raíz. 2º término de la raíz. 3er. término de la raíz.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8} & x^2 - 3x + 2 \\
-x^6 & \\
\quad 0 \; - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 & \\
\quad\quad +9x^5 - 27x^4 + 27x^3 & \\
\quad\quad 0 \; + 6x^4 - 36x^3 + 66x^2 - 36x + 8 & \\
\quad\quad\quad -(6x^4 - 36x^3 + 66x^2 - 36x + 8) &
\end{array}
$$

El triplo del cuadrado de la raíz hallada es: $3(x^2-3x)^2 = 3[(x^2)^2-2(x^2)(3x)+(3x)^2]$ $= 3[x^4-6x^3+9x^2]=\mathbf{3x^4-18x^3+27x^2}$

Siendo el primer término del triplo del cuadrado: $3x^4$

∴ se divide este 1er. término del residuo entre el 1er. término del triplo del cuadrado:

$$\frac{6x^4}{3x^4} = 2$$

Se reducen términos semejantes mediante una suma.

1º $3(x^2 - 3x)^2(2) = (3x^4 - 18x^3 + 27x^2)(2)$ $= 6x^4 - 36x^3 + 54x^2$

2º $3(x^2 - 3x)(2)^2 = (3x^2 - 9x)(4) = 12x^2 - 36x$

3º $(2)^3 = 8$

$$
\begin{array}{r}
6x^4 - 36x^3 + 54x^2 \qquad\qquad \\
+12x^2 - 36x \quad \\
+8 \\
\hline
\underbrace{6x^4 - 36x^3 + 66x^2 - 36x + 8}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8} & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{2-2}
-x^6 & \sqrt[3]{x^6} = x^{6/3} = x^2 \\
\cline{2-2}
\quad 0 \; - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 & 1º \quad 3(x^2)^2(-3x) = -9x^5 \\
\quad\quad +9x^5 - 27x^4 + 27x^3 & 2º \quad 3x^2(-3x)^2 = 27x^4 \\
\quad\quad 0 \; + 6x^4 - 36x^3 + 66x^2 - 36x + 8 & 3º \quad (-3x)^3 = -27x^3 \\
\cline{2-2}
\quad\quad\quad -6x^4 + 36x^3 - 66x^2 + 36x - 8 & 1º \quad 3(x^2 - 3x)^2(2) = 6x^4 - 36x^3 + 54x^2 \\
\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & 2º \quad 3(x^2 - 3x)(2)^2 = 12x^2 - 36x \\
 & 3º \quad (2)^3 = 8
\end{array}
$$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cúbica de la raíz es el radicando de la radicación.

$$(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 66x^2 - 36x + 8$$

Raíz cúbica de polinomios racionales

Prácticamente se emplea la misma metodología del caso anterior, teniendo presente de simplificar cada vez que se pueda.

La extracción de la raíz cúbica de una expresión algebraica racional se comprenderá mejor a través del ejemplo a continuación:

Hallar la raíz cúbica de:

$$\frac{a^3}{x^3} + \frac{153x}{4a} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$$

a)

$$\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$$

b)

1er. término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \;\Bigg|\; \frac{a}{x}$$

$$-\left[\frac{a}{x}\right]^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{a^{3/3}}{x^{3/3}} = \frac{a}{x}$$

c)

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \quad \Bigg| \quad \frac{a}{x} - 5$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0 - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz es:

$$3\left[\frac{a}{x}\right]^2 = \frac{3a^2}{x^2}$$

∴ se divide este 1er. término del trinomio que bajamos (residuo) entre este triplo.

$$\frac{-\frac{15a^2}{x^2}}{\frac{3a^2}{x^2}} = -\frac{15a^2x^2}{3a^2x^2} = -5$$

El triplo del cuadrado del 1er. término de la raíz.

d)

1er. término de la raíz.

2º término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \quad \Bigg| \quad \frac{a}{x} - 5$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0 - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140$$

$$-\left[-\frac{15a^2}{x^2} + \frac{75a}{x} - 125\right]$$

1º $3\left[\frac{a}{x}\right]^2\left[-5\right] = -\frac{15a^2}{x^2}$

2º $3\left[\frac{a}{x}\right]\left[-5\right]^2 = \frac{75a}{x}$

3º $(-5)^3 = -125$

e)

1er. término de la raíz. 2º término de la raíz. 3er. término de la raíz.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}} \quad \frac{a}{x}-5+\frac{x}{2a}$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0-\frac{15a^2}{x^2}+\frac{153a}{2x}-140$$

$$+\frac{15a^2}{x^2}-\frac{75a}{x}+125$$

$$0 \quad +\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

El triplo del cuadrado de la raíz hallada es:

$$3\left[\frac{a}{x}-5\right]^2=3\left[\left(\frac{a}{x}\right)^2-2\left(\frac{a}{x}\right)(5)+(5)^2\right]$$

$$=3\left[\frac{a^2}{x^2}-\frac{10a}{x}+25\right]$$

$$=\frac{3a^2}{x^2}-\frac{30a}{x}+75$$

Siendo el primer término del triplo del cuadrado: $\frac{3a^2}{x^2}$

Resolviendo:

$$\frac{153a}{2x}-\frac{75a}{x}=\frac{153a-150a}{2x}=\frac{3a}{2x}$$

$\therefore$ se divide el 1er. término del residuo entre el 1er. término del triplo del cuadrado:

$$\frac{\frac{3a}{2x}}{\frac{3a^2}{x^2}}=\frac{3ax^2}{6a^2x}=\frac{x}{2a}$$

$$1º \quad 3\left[\frac{a}{x}-5\right]^2\left[\frac{x}{2a}\right]=3\left[\frac{a^2}{x^2}-\frac{10a}{x}+25\right]\left[\frac{x}{2a}\right]$$

$$=\frac{3a^2x}{2ax^2}-\frac{30ax}{2ax}+\frac{75x}{2a}=\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a}$$

$$2º \quad 3\left[\frac{a}{x}-5\right]\left[\frac{x}{2a}\right]^2=\left[\frac{3a}{x}-15\right]\left[\frac{x^2}{4a^2}\right]=$$

$$=\frac{3ax^2}{4a^2x}-\frac{15x^2}{4a^2}=\frac{3x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}$$

$$3º \quad \left[\frac{x}{2a}\right]^3=\frac{x^3}{8a^3}$$

Se reducen términos semejantes mediante una suma.

$$\frac{3a}{2x}-15+\frac{75x}{2a}$$

$$\frac{3x}{4a}-\frac{15x^3}{4a^2}$$

$$+\frac{x^3}{8a^3}$$

$$\frac{3a}{2x}-15+\frac{153x}{4a}-\frac{15x^2}{4a^2}+\frac{x^3}{8a^3}$$

Se resta esto al residuo.

Resolviendo:

$$\frac{75x}{2a}+\frac{3x}{4a}=\frac{150x+3x}{4a}=\frac{153x}{4a}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}} \quad \Big| \quad \frac{a}{x} - 5 + \frac{x}{2a}$$

$$-\frac{a^3}{x^3}$$

$$0 - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140$$

$$+\frac{15a^2}{x^2} - \frac{75a}{x} + 125$$

$$0 + \frac{3a}{2x} - 15 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}$$

$$-\left[\frac{3a}{2x} - 15 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8a^3}\right]$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{a^{3/3}}{x^{3/3}} = \frac{a}{x}$$

1º $3\left[\frac{a}{x}\right]^2\left[-5\right] = -\frac{15a^2}{x^2}$

2º $3\left[\frac{a}{x}\right]\left[-5\right]^2 = \frac{75a}{x}$

3º $(-5)^3 = -125$

1º $3\left[\frac{a}{x} - 5\right]^2\left[\frac{x}{2a}\right] = \frac{3a}{2x} - 15 + \frac{75x}{2a}$

2º $3\left[\frac{a}{x} - 5\right]\left[\frac{x}{2a}\right]^2 = \frac{3x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2}$

3º $\left[\frac{x}{2a}\right]^3 = \frac{x^3}{8a^3}$

f) Si el residuo es cero, entonces la potencia de la exponencial cúbica de la raíz es el radicando de la radicación.

$$\left(\frac{a}{x} - 5 + \frac{x}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{x^3} - \frac{15a^2}{x^2} + \frac{153a}{2x} - 140 + \frac{153x}{4a} - \frac{15x^2}{4a^2} + \frac{x^3}{8\square^3}$$

2.3. Productos notables de expresiones algebraicas[12]

Es como se les define a las multiplicaciones con expresiones algebraicas donde el producto puede ser señalado como regla constante, sin verificar dicha multiplicación. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

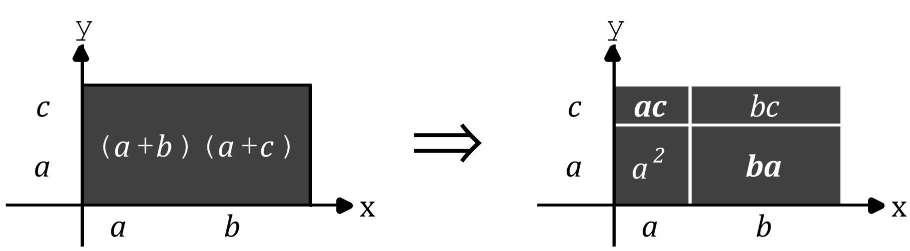
Cada producto notable se relaciona a una fórmula de factorización. Por ejemplo, la factorización de una diferencia de cuadrados perfectos es un producto de dos binomios conjugados.

Binomio con término común

En un producto de dos binomios que tienen un término común, se suma el cuadrado del término común con el producto del término común por la suma de los otros términos no comunes y posteriormente se añade el producto de los términos no comunes.

Ejemplo: $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$

La siguiente figura muestra el producto de binomios con un término común:



Ejemplo: desarrolla el siguiente producto:

$$(4a+5)(4a-8)$$

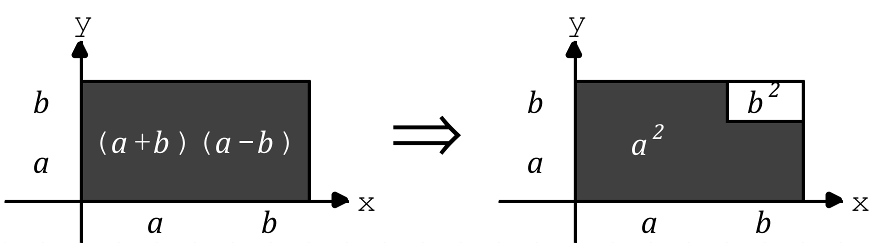
$$\begin{aligned}(4a+5)(4a-8) &= (4a)^2+4a(5-8)+[(5)(-8)] = 16a^2+4a(-3)+(-40)\\ &= 16a^2-12a-40\end{aligned}$$

Binomios conjugados

Dos binomios conjugados son aquellos que solo difieren en el signo de la operación. El resultado de un producto de binomios conjugados es igual a la diferencia de cuadrados de cada término.

Ejemplo: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

La siguiente figura muestra el producto de binomios conjugados:



Desarrolla el siguiente producto:

$$(4a+6b)(4a-6b)$$

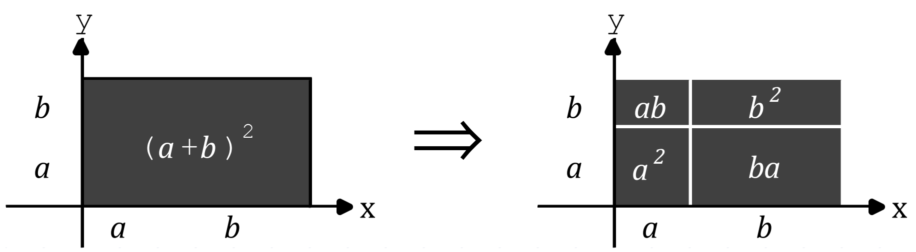
$$(4a+6b)(4a-6b)=(4a)^2-(6b)^2=16a^2-36b^2$$

Binomio al cuadrado

Para elevar un binomio aditivo al cuadrado, es decir, multiplicarlo por sí mismo, es suficiente con elevar el primer término al cuadrado, sumar el doble producto del primer término por el segundo término y finalmente sumar el cuadrado del segundo término. Si el binomio es una diferencia se alternan los signos empezando con el primer término con signo positivo, el segundo con signo menos y el tercer término con signo positivo.

Ejemplo: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

La siguiente figura muestra un binomio al cuadrado:



Desarrolar:

$$(3a + 3b)^2$$

$$(3a + 3b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(3b) + (3b)^2 = 9a^2 + 18ab + 9b^2$$

Desarrolla el siguiente binomio al cuadrado:

$$(3a - 3b)^2$$

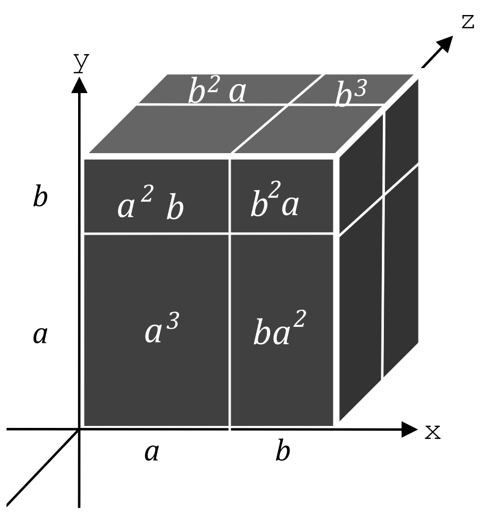
$$(3a - 3b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(3b) + (3b)^2 = 9a^2 - 18ab + 9b^2$$

Binomio al cubo

Para elevar un binomio aditivo al cubo, es decir, multiplicarlo por sí mismo tres veces, es suficiente con elevar el primer término al cubo, sumar el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo término, adicionarle el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término y finalmente sumarle el segundo término al cubo. Si el binomio es una diferencia se alternan los signos, empezando con el primer término con signo positivo, el segundo con signo negativo, el tercer término con signo positivo y el cuarto y último término negativo.

Ejemplo: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

La siguiente figura muestra un binomio al cubo:



Ejemplo: mediante la técnica del binomio al cubo, localiza la potencia de la siguiente exponencial al cubo:

$$(a + 3b)^3$$

$$(a + 3b)^3 = a^3 + 3a^2(3b) + 3a(3b)^2 + (3b)^3 = a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$$

Mediante la técnica del binomio al cubo, desarrolla la potencia de la siguiente exponencial al cubo:

$$(a-3b)^3$$

$$(a-3b)^3 = a^3 - 3a^2(3b) + 3a(3b)^2 - (3b)^3 = a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$$

Binomio de Newton

El teorema del binomio[13], descubierto hacia 1664 -1665, fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677), secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Como sabemos, de los temas de factorización anteriores, podemos desarrollar fácilmente polinomios de la forma $a^2 + 2ab + b^2$ o $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, sin embargo, el realizar operaciones con potencias de mayor grado resulta tedioso, a continuación presentamos algunos de ellos:

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2\ 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Es de la forma[14] $(a \pm b)^n$ y una forma fácil de determinar sus coeficientes numéricos al desarrollarlo es mediante el triángulo de Pascal, el cual se construye de acuerdo a las instrucciones siguientes sin llegar al término general.

Primero empezar cada renglón con 1 y terminarlo en 1. Los números restantes son la suma de los dos números situados inmediatamente arriba a la izquierda y a la derecha.

Segundo, con respecto a los términos algebraicos que incluyen las literales **a** y **b**, la suma de los exponentes de **a** y de **b** en cada término es igual al exponente del binomio, es decir, cuando disminuye el exponente de **a**, aumenta el de **b**; ambos en una unidad.

$(a+b)^0$	1	1
$(a+b)^1$	1 1	$a+b$
$(a+b)^2$	1 2 1	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(a\pm b)^n$	*término general*	$a^n \pm \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$

Donde:

1. n = entero positivo.
2. Signos:

a) En $(a+b)^n$ todos los signos son positivos.

Ejemplo: $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

b) En $(a-b)^n$ se empieza con $+$ y luego se van alternando.

Ejemplo:$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

Ejemplo: evalúa la potencia del siguiente binomio aplicando el triángulo de Pascal.

$$(2x^2+3y^2)^5$$

Se hace $a=2x^2$ y $b=3y^2$ y se aplica la regla según triángulo de pascal.

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Se sustituyen datos y se resuelve.

$$(2x^2+3y^2)^5 = (2x^2)^5 + 5(2x^2)^4(3y^2) + 10(2x^2)^3(3y^2)^2 + 10(2x^2)^2(3y^2)^3 + 5(2x^2)(3y^2)^4 + (3y^2)^5$$

Por último simplificar la expresión haciendo uso de las leyes de exponenciación.

$$(2x^2+3y^2)^5 = 32x^{10} + 240x^8y^2 + 720x^6y^4 + 1080x^4y^6 + 810x^2y^8 + 243y^{10}$$

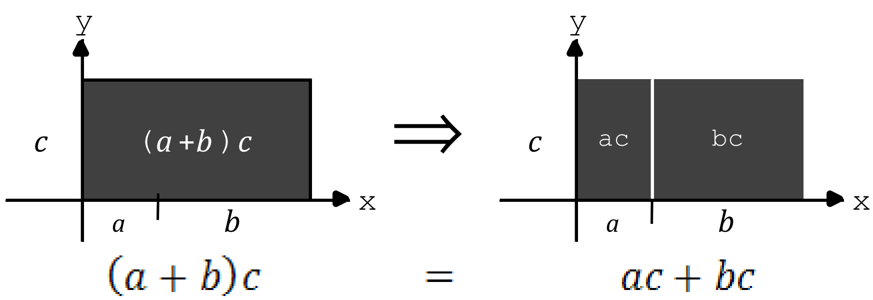
2.4. Factorización[15,16,17]

Como ya se analizó en los números racionales existen otros números que se expresan como el producto de otros a los que les llamamos factores que, al multiplicarlos todos, resulta el número original. En el caso particular de los números los factores son números primos, en álgebra, la factorización es expresar un polinomio como producto de otros polinomios a los que les denominaremos factores al igual que con los números.

Factor común

El factor común es la literal común de un binomio, trinomio o polinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes.

La figura que representa la regla del factor común es la siguiente:



Reglas para extraer el o los factores comunes de expresiones algebraicas

a) Factor común monomio: se extrae por agrupación de términos.

Extraer de la siguiente expresión el factor común.

$$ab + ac + ad$$

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes.

$$ax + bx + ay + by$$

$$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

b) Factor común polinomio: primero hay que determinar el factor común de los coeficientes junto con el de las variables de menor exponente. Aquí el factor común no cuenta con un término, sino con dos.

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes:

$$6a^2(a - b) + 4a(a - b) + 2(a - b)$$

$$6a^2(a - b) + 4a(a - b) + 2(a - b) = (a - b)(6a^2 + 4a + 2)$$

Extraer de la siguiente expresión el o los factores comunes:

$$8a^3(4a + b) + 4a + b$$

$$8a^3(4a + b) + 4a + b = 8a^3(4a + b) + 1(4a + b) = (4a + b)(8a^3 + 1)$$

Diferencia de cuadrados

Son binomios cuyos términos están al cuadrado y los signos de cada uno son diferentes. Los términos se caracterizan por tener raíz cuadrada exacta.

La factorización de la diferencia de cuadrados consiste en obtener la raíz cuadrada de cada término y representar estas como el producto de binomios conjugados tal y como se estudió en el tema: Binomios conjugados de este apartado, a continuación se muestra tal expresión:

$$a^2 - b^2 = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)\left(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}\right) = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo: resuelve la siguiente diferencia de cuadrados.

$$(ax)^2 - (by)^2$$

$$(ax)^2 - (by)^2 = (ax + by)(ax - by)$$

Resuelve la siguiente diferencia de cuadrados.

$$16a^2 - 25b^2$$

$$16\mathrm{a}^2 - 25\mathrm{b}^2 = (4\mathrm{a})^2 - (5\mathrm{b})^2 = (4\mathrm{a} + 5\mathrm{b})(4\mathrm{a} - 5\mathrm{b})$$

Trinomio cuadrado perfecto

Son aquellas expresiones algebraicas de tres términos, de los cuales dos tienen raíces cuadradas exactas, y el resto equivale al doble producto de las raíces cuadradas del primero por el segundo. De hecho, es la operación inversa al desarrollo de un binomio al cuadrado.

Para factorizar se ordenan los términos dejando de primero y de tercero los términos cuadráticos, luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis elevado al cuadrado, separándolos por el signo que acompaña al segundo término. Por último se verifica que el doble producto del primero por el segundo término sea 2ab, con lo que se confirma que es correcta la solución. De ser diferente esta solución no es la correcta. La expresión algebraica que manifiesta esta regla es:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplo: factoriza el siguiente trinomio cuadrado:

$$25m^2 - 40mn + 16n^2$$

$$25m^2 - 40mn + 16n^2 = \left(\sqrt{25m^2} - \sqrt{16n^2}\right)^2 = (5m - 4n)^2$$

Verificando

$2ab = 2(5m)(4n) = 40mn \therefore$ la factorización es correcta.

Factoriza el siguiente trinomio cuadrado:

$$4m^2 + 12mn + 9n^2$$

$$4m^2 + 12mn + 9n^2 = \left(\sqrt{4m^2} + \sqrt{9n^2}\right)^2 = (2m + 3n)^2$$

Verificando

$2ab = 2(2m)(3n) = 12mn \therefore$ la factorización es correcta.

Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$

Son aquellas expresiones algebraicas de tres términos, donde hay una variable[18] cuadrática, una lineal y un término independiente. Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable cuadrática, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados (pudiendo ser números negativos) den como resultado el término del medio. Cuando el coeficiente numérico de la variable cuadrática sea diferente de uno, es decir, $a \neq 1$, multiplicar el trinomio por a:

$$a(ax^2 \pm bx \pm c) = a^2x^2 \pm a(bx) \pm (ac) = (ax)^2 \pm b(ax) \pm (ac)$$

En esta expresión resultante hay que precisar la siguiente observación: Después de multiplicar por a, el término central se deja expresado así $\underline{b(ax)}$ y cuando se obtengan los dos paréntesis resultantes de la factorización dividir ambos entre a. Si a no divide a ningún coeficiente numérico de los términos da la factorización, se descompone en sus factores y se vuelve a intentar una vez más la división.

Factoriza el siguiente trinomio:

$$a^2 + 2a - 15$$

(+)(+) = + (+)(−) = −

+	a	x^2	+	b	x	−	c
+	1	a^2	+	2	a	−	15

$$= \left(\sqrt[2]{a^2} + p\right)\left(\sqrt[2]{a^2} - q\right) \quad \begin{cases} p - q = b \\ p \times q = c \end{cases}$$

(+)(−) = −

$$\begin{matrix} b = 2 \\ c = 15 \end{matrix} \begin{cases} p - q = 2 \\ p \times q = 15 \end{cases}$$

Debo buscar dos números cuya diferencia me dé 2 y cuyo producto me dé 15

$$\left.\begin{matrix} p & & q & & \\ 5 & - & 3 & = & 2 \\ 5 & \times & 3 & = & 15 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} p = 5 \\ q = 3 \end{matrix}\right\} \quad \text{y sustituyo:}$$

$$a^2 + 2a - 15 = \left(\sqrt{a^2} + p\right)\left(\sqrt{a^2} - q\right) = (a + 5)(a - 3)$$

Factoriza el siguiente trinomio:

$$x^2 + 5x + 6$$

(+)(+) = + (+)(+) = +

+	a	x^2	+	b	x	+	c
+	1	x^2	+	5	x	+	6

$$= \left(\sqrt[2]{x^2} + p\right)\left(\sqrt[2]{x^2} + q\right) \quad \begin{cases} p + q = b \\ p \times q = c \end{cases}$$

(+)(+) = +

$$\begin{matrix} b=5 \\ c=6 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} p + q = 5 \\ p \times q = 6 \end{matrix} \right.$$

Debo buscar dos números cuya suma me dé 5 y cuyo producto me dé 6

$$\left.\begin{matrix} p & & q & & \\ 3 & + & 2 & = & 5 \\ 3 & \times & 2 & = & 6 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} p=3 \\ q=2 \end{matrix}\right\} \quad \text{y sustutuyo:}$$

$$x^2+5x+6=\left(\sqrt{x^2}+p\right)\left(\sqrt{x^2}+q\right)=(a+3)(a+2)$$

Factoriza el siguiente trinomio:

$$6m^2-7m-3$$

En esta expresión $6 \neq 1$, por lo que se debe multiplicar toda la expresión por el coeficiente del término cuadrático que es 6.

$$6(6m^2-7m-3)=6^2m^2-6(7m)-6(3)=(6m)^2-\mathbf{7}(\mathbf{6m})-18$$

$(+)(-) = -$ $\qquad$ $(-)\ (+)\ = -$

+	a	x^2	−	b	x	−	c
+	1	$(6m)^2$	−	7	$(6m)$	−	18

$$= \left(\sqrt{m^2}-p\right)\left(\sqrt{m^2}+q\right) \quad \left\{ \begin{matrix} p - q = b \\ p \times q = c \end{matrix} \right.$$

$(-)\ (-)\ = +$

$$\begin{matrix} b=7 \\ c=18 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} p - q = 7 \\ p \times q = 18 \end{matrix} \right.$$

Debo buscar dos números cuya resta me dé 7 y cuyo producto dé 18

$$\left.\begin{matrix} p & & q & & \\ 9 & - & 2 & = & 7 \\ 9 & \times & 2 & = & 18 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} p=9 \\ q=2 \end{matrix}\right\} \quad \text{y sustutuyo:}$$

$$6(6m^2-7m-3)=6^2m^2-6(7m)-6(3)=(6m)^2-6(7m)-18$$
$$=\left(\sqrt{(6m)^2}-9\right)\left(\sqrt{(6m)^2}+2\right)$$

$$6(6m^2-7m-3)=(6m-9)(6m+2)$$

Como al inicio se multiplicó por 6, ahora debemos dividir también entre 6 para no afectar la expresión algebraica en su totalidad.

$$\frac{6(6m^2-7m-3)}{6}=\frac{(6m-9)(6m+2)}{6}$$

Se observa que algunos términos del producto de los binomios resultantes de la factorización no son divisibles por 6, así que descomponemos 6 en sus factores, esto es, 6=3×2.

$$6m^2-7m-3=\frac{(6m-9)(6m+2)}{3\times 2}=\left(\frac{6m}{3}-\frac{9}{3}\right)\left(\frac{6m}{2}+\frac{2}{2}\right)=(2m-3)(3m+1)$$

Factorización por agrupación

Para factorizar por agrupación de términos un polinomio, debe considerase los términos comunes y posteriormente los compuestos resultado de la primera agrupación donde se aplica el caso del factor común. La expresión algebraica que representa este tipo de factorización es la siguiente:

$$ab + ac + bd + dc = (ab + ac) + (bd + dc) = a(b + c) + d(b + c) = (b + c)(a + d)$$

Ejemplo: factoriza la siguiente expresión algebraica.

$$2l + 2m + 3ln + 3mn$$

$$2l + 2m + 3ln + 3mn = (2l + 3ln) + (2m + 3mn) = l(2 + 3n) + m(2 + 3n)$$
$$= (2 + 3n)(l + m)$$

Polinomio cubo perfecto

Son aquellas expresiones algebraicas de 4 términos, de los cuales dos tienen raíces cúbicas exactas, y el resto equivale al triple producto del primer término al cuadrado por el segundo término y a el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término. De hecho, es la operación inversa de un binomio al cubo. La expresión algebraica que representa esta regla es:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Para factorizar[19] se siguen los siguientes pasos:

1. Debe tener cuatro términos y estar ordenado con respecto a una letra.
2. Dos de sus términos, el 1º (a^3) y el 4º (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.
3. El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término $3a^2b$.
4. El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto termino $3ab^2$.
5. El segundo y el cuarto término deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).

6. Si todos los términos son positivos el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, si hay términos negativos el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^3$.

Ejemplo: factorizar la siguiente expresión algebraica

$$125 + 15x^2 + x^3 + 15x^2 + 75x$$

Paso 1:

$x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

Paso 2:

$\sqrt[3]{x^3} + 15x^2 + 75x + \sqrt[3]{125}$

$\sqrt[3]{x^3} = x; \sqrt[3]{125} = 5$ donde $\boldsymbol{a = x}$; $\boldsymbol{b = 5}$

Paso 3:

$15x^2 = \boldsymbol{3a^2b} = 3(x)^2(5) = (3\times5)x^2 = 15x^2$

Paso 4:

$75x = \boldsymbol{3ab^2} = 3(x)(5)^2 = (3\times25)x = 75x$

Paso 5:

Del paso 1 se observa que el segundo y el cuarto término tienen el mismo signo y es positivo, al igual que el primer y tercer término.

Paso 6:

Como todos los términos son positivos, el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, por tanto:

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 15 = (a + b)^3 = (x + 5)^3$$

Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$27x^3 - 8yb^6 - 54x^2y^2 + 36xy^4$$

Paso 1: $27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6$

Paso 2:

$\sqrt[3]{\boldsymbol{27x^3}} - 54x^2y^2 + 36xy^4 - \sqrt[3]{\boldsymbol{8y^6}}$

$\sqrt[3]{27x^3} = 3x$; $\sqrt[3]{8y^6} = 2y^2$ donde $a = 3x$; $b = 2y^2$

Paso 3:

$54x^2y^2 = 3a^2b = 3(3x)^2(2y^2) = 3(9x^2)(2y^2) = (3\times9\times2)x^2y^2 = 54x^2y^2$

Paso 4:

$36xy^4 = 3ab^2 = 3(3x)(2y^2)^2 = 3(3x)(4y^4) = (3\times3\times4)xy^4 = 36xy^4$

Paso 5:

Del paso 1 se observa que el segundo y el cuarto termino tienen el mismo signo y es negativo.

Paso 6:

Como hay términos negativos, el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a-b)^3$, por lo tanto:

$$27x^3 - 54x^2y^2 + 36xy^4 - 8y^6 = (a-b)^3 = (3x - 2y^2)^3$$

Binomio de la forma[20] $a^3 \pm b^3$

Abordaremos estas expresiones algebraicas de acuerdo a lo siguiente:

Sean las expresiones $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$

$\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 - ab + b^2$ y $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$

Así el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, como a continuación se muestra:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + a^2)$ y $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + a^2)$

De donde se deducen las siguientes reglas:

1. La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.
2. La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

Ejemplo: factorizar la siguiente diferencia de cubos:

$$27x^3 - 8y^6$$

Como se aprecia, es una diferencia de cubos y se aplica la regla 2,

a) Se extraen las raíces cúbicas de los términos de la diferencia de cubos

$a = \sqrt[3]{27x^3} = 3xyb = \sqrt[3]{8y^6} = 2y^2$

b) Se sustituyen datos en la regla principal:

$$27x^3 - 8y^6 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (3x-2y^2)[(3x)^2+(3x)(2y^2)+(2y^2)^2]$$

c) Se reducen términos.

$$27x^3 - 8y^6 = (3x-2y^2)(9x^2+6xy^2+4y^4)$$

Factorizar la siguiente suma de cubos:

$$64x^3 + 125y^6$$

Como se aprecia, es una suma de cubos y se aplica la regla 1,

a) Se extraen las raíces cubicas de los términos de la diferencia de cubos.

$a = \sqrt[3]{64x^3} = 4x$ y $b = \sqrt[3]{125y^6} = 5y^2$

b) Se sustituyen datos en la regla principal.

$$64x^3 + 125y^6 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (4x+5y^2)[(4x)^2-(4x)(5y^2)+(5y^2)^2]$$

c) Se reducen términos,

$$64x^3 + 8y^6 = (4x+5y^2)(16x^2-20xy^2+25y^4)$$

2.5. Expresiones algebraicas racionales[21]

En una expresión algebraica racional donde el denominador implica radicales, al proceso por el cual se determina otra expresión algebraica que no involucra radicales en el denominador y que es equivalente a la expresión algebraica dada; se le llama racionalización del denominador de dicha expresión. Este proceso facilita el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Consecuentemente, racionalizar el denominador de una fracción es transformarlo en un número racional . Para esto se multiplican los dos términos por una expresión que convierta al denominador en potencia perfecta del índice de la raíz.

En este proceso se distinguen tres casos, que serán materia de estudio de los tres siguientes temas.

Caso I

Racionalización del tipo: $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\times\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\times\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2a^2}{5\sqrt{a}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$

$$\frac{2a^2}{5\sqrt{a}}=\frac{2a^2\times\sqrt{a}}{5\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{2a^2\sqrt{a}}{5\left(\sqrt{a}\right)^2}=\frac{2a^2\sqrt{a}}{5a}=\frac{2a\sqrt{a}}{5}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{a^2-4}{\sqrt{a-2}}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{a-2}$

$$\frac{a^2-4}{\sqrt{a-2}}=\frac{(a^2-2^2)\sqrt{a-2}}{\sqrt{a-2}\times\sqrt{a-2}}=\frac{(a+2)(a-2)\sqrt{a-2}}{\left(\sqrt{a-2}\right)^2}=\frac{(a+2)(a-2)\sqrt{a-2}}{(a-2)}$$

$$=(a+2)\sqrt{a-2}$$

Caso II

Racionalización del tipo: $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{2a^2}{5\sqrt[7]{a^3}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[7]{a^{7-3}}=\sqrt[7]{a^4}$

$$\frac{2a^2}{5\sqrt[7]{a^3}}=\frac{2a^2\times\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^3}\times\sqrt[7]{a^4}}=\frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^3\times a^4}}=\frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5\sqrt[7]{a^7}}=\frac{2a^2\sqrt[7]{a^4}}{5a}=\frac{2a\sqrt[7]{a^4}}{5}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[5]{(3a-1)^{5-2}} = \sqrt[5]{(3a-1)^3}$

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}} = \frac{(3a-1)\times\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}\times\sqrt[5]{(3a-1)^3}} = \frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2\times(3a-1)^3}}$$

$$= \frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2\sqrt[5]{(3a-1)^5}} =$$

$$\frac{3a-1}{2\sqrt[5]{(3a-1)^2}} = \frac{(3a-1)\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2(3a-1)} = \frac{\sqrt[5]{(3a-1)^3}}{2}$$

Caso III

Racionalización del tipo: $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado[22] del denominador, para abordar este tipo en particular de racionalización de expresiones algebraicas; se debe tener presente que el producto de dos binomios conjugados corresponde a una diferencia de cuadrados tal como ya se mencionó presentan dos casos:

a) Cuando el denominador es un binomio cuyos términos es la suma de dos radicales $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$,se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador$\sqrt{b}-\sqrt{c}$ y se resuelve de acuerdo a lo siguiente:

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica.

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$$

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}=\frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}=\frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{a+1})^2}$$

$$=\frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{a-(a+1)}=$$

$$\frac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}=\frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{a-a-1}=\frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{-1}=-3(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})$$

b) Cuando el denominador es un binomio aditivo y uno de los términos carece de radical $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $b-\sqrt{c}$ y se resuelve de acuerdo a lo siguiente:

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b)^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Racionalizar la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{9a-4b^2}{2b+3\sqrt{a}}$$

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador $2b - 3\sqrt{a}$.

$$\frac{9a - 4b^2}{2b + 3\sqrt{a}} = \frac{(9a - 4b^2)\left(2b - 3\sqrt{a}\right)}{\left(2b + 3\sqrt{a}\right)\left(2b - 3\sqrt{a}\right)} = \frac{(9a - 4b^2)\left(2b - 3\sqrt{a}\right)}{(2b)^2 - \left(3\sqrt{a}\right)^2}$$

$$= \frac{(9a - 4b^2)\left(2b - 3\sqrt{a}\right)}{4b^2 - 9a} =$$

$$\frac{9a - 4b^2}{2b + 3\sqrt{a}} = \frac{(9a - 4b^2)\left(2b - 3\sqrt{a}\right)}{-(9a - 4b^2)} = -\left(2b - 3\sqrt{a}\right)$$

Este proceso de racionalización es también extensivo al campo de los números reales.

2.6. Problemario

1. Traducir a lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

1.1. El doble de un número

1.2. La tercer parte del cuádruple de un número

1.3. El producto de la suma por la diferencia de dos números

1.4. La suma de tres números consecutivos

2. Traducir del lenguaje algebraico al lenguaje ordinario

2.1. $\frac{x-y}{2}$

2.2. $3(x+y)$

2.3. $2x^2$

2.4. x-5

3. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores dados a continuación: a=1, b=2, c=3, d=4

3.1. $\frac{abc}{d}$

3.2. c(a+b)

3.3. $\frac{2\sqrt{d}+c}{a}$

3.4. $\frac{3(a+b)^2+2d}{5a}$

4. Sumar $5x^3+8x^2-3x+4$ con $-3x^3-6x^2+3x+6$

5. Restar $5x^3+8x^2-3x+4$ de $-3x^3-6x^2+3x+6$

6. Multiplicar:

6.1. $5x^2y^4$ por $-4x^3y^2z^3$

6.2. $\frac{3}{4}abc$ por $\frac{4}{2}a^2b^mc$

6.3. $x + 4$ por $x + 5$

6.4. $x^2 + 6x + 3$ por $x - 2$

7. Resolver las siguientes divisiones

7.1. $\frac{20x^2y^3}{-4xy^2}$

7.2. $\frac{60x^2y+30x^3y^2-20x^5y^4}{10x^2y}$

7.3. $x^2 + 5x + 6$ entre $x + 1$

7.4. $x^3 - 3x + 5$ entre $x + 2$

8. Por división sintética dividir $2x^4 + 2x^3 + x^2 + x$ entre x+1

9. Resolver las siguientes operaciones:

9.1. $\frac{3}{a+b} + \frac{2}{a^2-b^2} - \frac{5}{a-b}$

9.2. $\frac{100-y^2}{x^2+5x+6} \times \frac{x+3}{100+y} \times \frac{x+2}{100-y}$

9.3. $\frac{x^2+6x+8}{x^2+8x+16} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-8}$

10. Desarrolla los siguientes productos notables:

10.1. (5+x)(5-x)

10.2. (3x+2)(3x+2)

10.3. $(2x-y)^3$

10.4. $(x+y)^5$

11. Factorizar:

11.1. $36x^2y^3 + 20x^3y^4 - 40x^2y^2$

11.2. 5x(a+b)-4y(a+b)

11.3. $\left(\frac{36}{x^2} - \frac{49}{y^2}\right)$

11.4. $4x^2$-100

11.5. $25x^2 + 20xy + 4y^2$

11.6. $m^2 + 2mn + n^2$

11.7. $x^2 + 11x + 30$

11.8. $x^2 + x - 12$

11.9. $x^2 - 8x + 16$

11.10. $4x^2 + 8x + 3$

11.11. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

12. Racionaliza las siguientes expresiones:

12.1. $\frac{3a}{\sqrt{3}}$

12.2. $\frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$

12.3. $\frac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

2.7. Autoevaluación

1. Es la combinación de números y letras mediante las operaciones fundamentales:
   A) Fórmula algebraica
   B) Expresión algebraica
   C) Término algebraico
   D) Signo algebraico
   E) Signo de agrupación

2. ¿Cuál es el grado absoluto del término $-5x^2y^4z^5$?

3. Reducir a la mínima expresión las siguientes raíces:

3.1. $\sqrt{16a^4} =$

3.2. $\sqrt[3]{-8x^{12}} =$

3.3. $\sqrt[3]{27a^6} =$

3.4. $\sqrt{20x^8y^{12}} =$

4. Indica qué clase de término es el siguiente, atendiendo al signo, si tienen o no denominador y si tienen o no radical.

4.1. $\frac{M^5\sqrt[3]{Q^6}}{X}$

4.2. $-M^{-1/5}Q^2$

4.3. $-\frac{2AX}{P}$

5. El polinomio $-x^8y^2+x^{10}+3x^4y^6-x^6y^4-4+x^2y^8$ en orden ascendente respecto a la x es:

A) $-x^8y^2+x^{10}+3x^4y^6-x^6y^4-4+x^2y^8$

B) $x^2y^8+3x^4y^6-x^6y^4-x^8y^2+x^{10}-4$

C) $-4-x^2y^8+3x^4y^6-x^6y^4-x^8y^2+x^{10}$

D) $x^2y^8+3x^4y^6-x^6y^4-x^8y^2+x^{10}+4$

E) $x^2y^8-4+3x^4y^6-x^6y^4-x^8y^2+x^{10}$

6. Encontrar el valor numérico para las expresiones siguientes, con los valores dados:

6.1. $a=\frac{v_f-v_i}{t}$ para v_f= 30km/s , v_i= 110 km/s y t=2 s

6.2. $t_f=\frac{9}{5}t_c+32$ para t_c= 20°C

7. Reducir y expresar el resultado en fracciones irreducibles de:

$.3a+4b-.\overline{45}c+\frac{2}{3}a-5b+\frac{6}{11}c$

8. Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.

10a + {-[5b+(9a-c)+2-(-a+b-(c+4))]-(-a+b)} +3a

9. Multiplicar, indicar en forma irreducible los ejercicios con fracciones.

9.1. $\left(\frac{5}{6}a^mb^n\right)\left(-\frac{3}{10}ab^2c\right)$

9.2. x^2-4x+5 por $x+2$

10. Desarrollar los siguientes productos notables:

a) $(a+2b)^2=$

b) $(2x^3-3y^4)^2=$

c) $(3x-4)(3x+4)=$

d) $(x-5)(x+5)=$

e) $(x-5)(x+8)=$

f) $(x^2-10)(x^2-6)=$

g) $(2x-y)(2x+y)=$

h) $(x-y)^3=$

i) $(5x-2y)(2y+5x)=$

j) $(x-y)^6=$

k) $(2x+3)(2x-4)=$

l) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=$

m) $(y+3)(y^2+9)(y-3)=$

11. Dividir: expresa en fracciones irreducibles aquellos ejercicios cuyos coeficientes sean racionales, además los exponentes deberán expresarse en forma positiva.

11.1 $14xy^2$ entre $2y$

11.2. $-4a^{x-2}b^n$ entre $-5a^3b^2$

11.3. $-\dfrac{1}{15}a^{x-3}b^{2m+5}c^3$ entre $\dfrac{3}{5}a^{x-4}b^{m-1}$

11.4. $2x^4y^3-24x^5y^6-36xy^7$ entre $36\,xy$

11.5. $x^6+x^5-4x^4-4x+x^2-1$ entre x^3+x^2-4x-1

12. Factorizar o descomponer en dos factores.

a) $x^2-36=$
b) $x^2-2xy+y^2=$
c) $x^2-4x+4=$
d) $a^3-3a^2b+5ab^2=$
e) $100x^4y^6-121m^4=$
f) $4x^2+25y^2-20xy=$
g) X^2-5x+6
h) $x^2+3x-10$
i) y^2-4y+3

13. Hallar por división sintética, el cociente y el resto de la división siguiente:

$2x^3-3x^2+7x-5$ entre $x-1$

14. Racionaliza $\frac{5}{\sqrt{x}}$

15. Resolver las operaciones indicadas:

15.1. $\frac{2}{X-3}+\frac{1}{X+2}-\frac{4}{X^2-X-6}=$

15.2. $\frac{a^2-5a+6}{3a-15}\times\frac{12a}{a^2-a-30}\times\frac{a^2-25}{2a-4}=$

15.3. $\frac{x^2-9}{15x^3+15x^2}\div\frac{4x-6}{x+1}=$

2.8. Soluciones del problemario

1.1. 2x

1.2. $\frac{4x}{3}$

1.3. (a+b)(a-b)

1.4. x+(x+1)+(x+2)

2.1. La mitad de la diferencia de dos números

2.2. El triple de la suma de dos números

2.3. El doble del cuadrado de un número

2.4. Un número disminuido en 5

3.1. $\frac{3}{2}$

3.2. 9

3.3. 7

3.4. 7

4. $2x^3 + 2x^2 + 10$

5. $-8x^3 - 14x^2 + 6x + 2$

6.1. $-20x^5y^6z^3$

6.2. $\frac{3}{2}a^3b^{m+1}c^2$

6.3. $x^2 + 9x + 20$

6.4. $x^3 + 4x^2 - 9x - 6$

7.1. $-5xy$

7.2. $6 + 3xy - 2x^3y^3$

7.3. Cociente: x+4, residuo:2

7.4. Cociente: $x^2 - 2x + 1$, residuo 3

8. $2x^3+x$

9.1. $\frac{-2a-8b+2}{a^2-b^2}$

9.2. 1

9.3. $\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-20}$

10.1. $25 - x^2$

10.2. $9x^2 + 12x + 4$

10.3. $8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

10.4. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

11.1. $4x^2y^2(9y + 5xy^2 - 10)$

11.2. $(a + b)(5x - 4y)$

11.3. $\left(\frac{6}{x} + \frac{7}{y}\right)\left(\frac{6}{x} - \frac{7}{y}\right)$

11.4. $(2x + 10)(2x - 10)$

11.5. $(5x + 2y)^2$

11.6. $(m + n)^2$

11.7. $(x + 5)(x + 6)$

11.8. $(x - 3)(x + 4)$

11.9. $(x - 6)(x - 2)$

11.10. $(2x + 1)(2x + 3)$

11.11. $(x + 3)^3$

12.1. $\sqrt{3}a$

12.2. $\sqrt{x - 2}$

12.3. $\frac{5(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

2.9. Soluciones de autoevaluación

1. B

2. 11

3.1. $4a^2$

3.2. $-2x^4$

3.3. $3a^2$

3.4. $2\sqrt{5}x^4y^6$

4.1. Positivo, entero, racional

4.2. Negativo, fraccionario, irracional

4.3. Negativo, fraccionario, racional

5. C

6.1. -40km/s

6.2. 68°F

7. $\frac{29}{30}a - b + \frac{1}{11}c$

8. 2a-3b-6

9.1. $-\frac{1}{4}a^{m+1}b^{n+2}c$

9.2. $x^3-2x^2-3x+10$

10.

a) $a^2+4ab+4b^2$

b) $4x^6-12x^3y^4+9y^8$

c) $9x^2-16$

d) x^2-25

e) $x^2+3x-40$

f) x^4-16x^2+60

g) $4x^2-y^2$

h) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

i) $25x^2-4y^2$

j) $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$

k) $4x^2-2x-12$

l) a^4-b^4

m) y^4-81

11.1. 7xy

11.2. $\frac{4}{5}a^{x-5}b^{n-2}$

11.3. $-\frac{1}{9}ab^{m+6}c^3$

11.4. $\frac{1}{18}x^3y^2-\frac{2}{3}x^4y^5-y^6$

11.5. x^3+1

12.

a) (x+6)(x-6)

b) $(x-y)^2$

c) $(x-2)^2$

d) $a(a^2-3ab+5b^2)$

e) $(10x^2y^6+11m^2)(10x^2y^6-11m^2)$

f) $(2x-5y)^2$

g) (x-3)(x-2)

h) (x+5)(x-2)

i) (y-1)(y-3)

13. Cociente: $2x^2-x+6$, residuo: 1

14. $\frac{5\sqrt{5}}{x}$

15.1. $\frac{3x-4}{x^2-x-6}$

15.2. $\frac{2a(a-3)}{(a-6)}$

15.3. $\frac{x+3}{30x^2}$

2.10. Conclusiones[23]

En este apartado de álgebra vimos la notación científica, misma que aplican profesionistas como los astrónomos, biólogos, físicos, químicos, matemáticos y otros pues su empleo se relaciona con unidades macroscópicas y microscópicas, de las cuales aprendiste sus múltiplos y submúltiplos.

En una conferencia impartida en 1959 por uno de los grandes físicos del siglo pasado, el maravilloso teórico y divulgador Richard Feynman, predijo que había un montón de espacio al fondo (el título original de la conferencia fue*: There'splenty of room at thebottom*) y auguraba una gran cantidad de nuevos descubrimientos si se pudiera fabricar materiales de dimensiones atómicas o moleculares. Hubo que esperar varios años para que el avance en las técnicas experimentales, culminado en los años 80 con la aparición de la Microscopía Túnel de Barrido (STM) o de Fuerza Atómica (AFM), hiciera posible primero observar los materiales a escala atómica y, después, manipular átomos individuales. Con respecto a que es la Nanotecnología, empecemos por aclarar el significado del prefijo nano: este hace referencia a la milmillonésima parte de un metro (o de cualquier otra unidad de medida). Para hacernos una idea de a qué escala nos referimos, piensa que un átomo es la quinta parte de esa medida, es decir, cinco átomos puestos en línea suman un nanómetro. Bien, pues todos los materiales, dispositivos, instrumental, etc., que entren en esa escala, desde 5 a 50 o 100 átomos, es lo que llamamos Nanotecnología. Como podrás darte cuenta en todo esto se aplica el álgebra. Es de suma importancia que lo aprendido en este tema lo relaciones y lo pongas a funcionar con los efectos cotidianos, y es en el siguiente apartado donde se te proporcionará una serie de herramientas para tal efecto.

Referencias

[1]Eliseo Martínez H., Héctor Varela V., Proyecto "Web en apoyo al estudio de las matemáticas", Universidad de Antofagasta**.** *Introducción al álgebra para los estudiantes de primero medio*. Recuperado 29 de Julio del 2011http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/extension/algebra/parte1

[2] Guía de estudio para padres y alumnos. *Matemáticas: Aplicaciones y conceptos curso 3*. Glencoe/McGraw-Hill. Recuperado 24 Jul del 2011: Reducción de expresiones algebraicas http://www.glencoe.com/sec/math/msmath/mac04/course3/study_guide/pdfs/mac3_pssg10_sp.pdf

[3]Álvarez J. Rafael & Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellin. Recuperado 15 Julio del 2011: http://books.google.com.mx/books?id=vsIz82TAuhMC&pg=PA15&dq=factorizacion+de+expresiones+algebraicas&hl=es&ei=peE6TqeFFuPWiALByu3SCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CDMQ6AEwAQ#v=onepage&q=factorizacion%20de%20expresiones%20algebraicas&f=false

[4] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE). Recuperado 22 Julio del 2011: http://dieumsnh.qfb.umich.mx/matematicas/ale2.htm

[5]Álvarez J. Rafael &Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellín. Recuperado 15 Julio del 2011: http://books.google.com.mx/books?id=vsIz82TAuhMC&pg=PA15&dq=factorizacion+de+expresiones+algebraicas&hl=es&ei=peE6TqeFFuPWiALByu3SCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CDMQ6AEwAQ#v=onepage&q=factorizacion%20de%20expresiones%20algebraicas&f=false

[6] Las expresiones algebraicas. Recuperado: 01 de Agosto del 2011. http://www.oocities.org/mx/amiga_miraba/articulos/expresiones.html

[7]Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE). Recuperado 22 Julio del 2011: http://dieumsnh.qfb.umich.mx/matematicas/ale2.htm

[8] Consultar tópico *4.8 Factorización de expresiones algebraicas* de este tema.

[9] Consultar tópico *4.4.5. Simplificación de expresiones algebraicas racionales* de este tema.

[10]Ver tópico *4.8. Factorización de expresiones algebraicas de este capítulo*.

[11]*Algebra elemental.* Dr. Aurelio Baldor. Cultural Mexicana S.A. México· (**1972**).

[12]*Wentworth, George; y Smith, David Eugene (1917). Ginn & Co. (ed.). Elementos de Algebra, 2a edición*. Recuperado 29 Julio del 2011. http://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

[13]Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Coordinación de Innovación Educativa (CIE). Recuperado 22 Julio del 2011: http://dieumsnh.qfb.umich.mx/matematicas/ale3.htm

[14]Kurt Gieck (1981). *Manual de fórmulas técnicas*. Representaciones y servicios de ingeniería S.A. MEXICO

[15]Álvarez J. Rafael &Mejía D. Francisco (**2006**). *Factorización*. Universidad de Medellín. Recuperado 15 Julio del 2011: http://books.google.com.mx/books?id=vsIz82TAuhMC&pg=PA15&dq=factorizacion+de+expresiones+algebraicas&hl=es&ei=peE6TqeFFuPWiALByu3SCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CDMQ6AEwAQ#v=onepage&q=factorizacion%20de%20expresiones%20algebraicas&f=false

[16]*Wentworth, George; y Smith, David Eugene (1917). Ginn & Co. (ed.). Elementos de Algebra, 2a edición*. Recuperado 29 Julio del 2011. http://es.wikipedia.org/wiki/Productos_notables

[17]*Algebra elemental.* Dr. Aurelio Baldor. Cultural Mexicana S.A. México· (**1972**).

[18] Ver tópico *5.2.2 Variable, variable independiente y variable dependiente* del capítulo 5.

[19]Aula fácil.com: *CUATRINOMIO CUBO PERFECTO DE BINOMIOS*. Recuperado : 12 Jul del 2011 http://www.aulafacil.com/algebra/curso/Lecc-32.htm

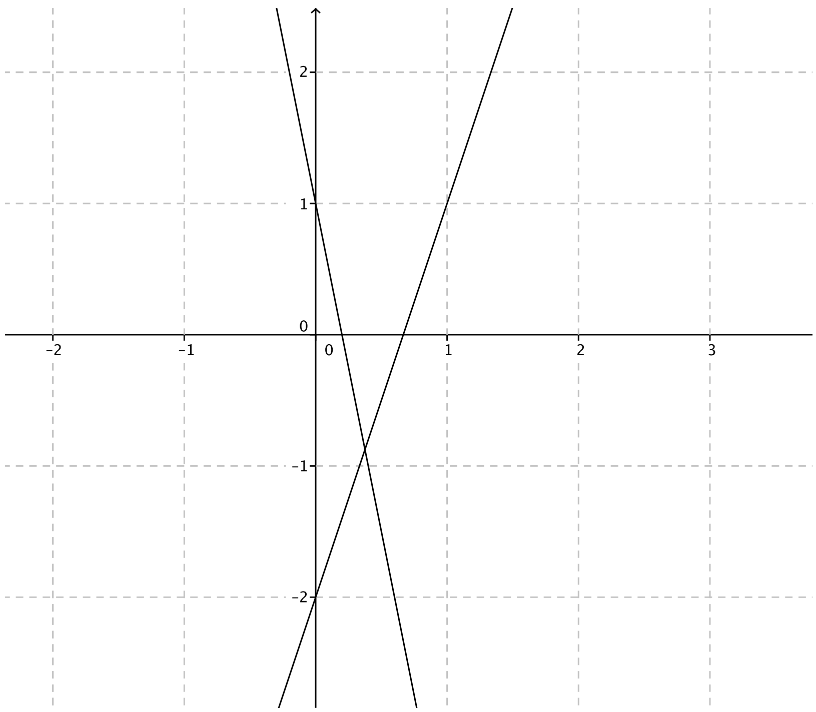
[20]Aula fácil.com: *CUATRINOMIO CUBO PERFECTO DE BINOMIOS*. Recuperado : 12 Jul del 2011 http://www.aulafacil.com/algebra/curso/Lecc-32.htm

[21]Vitutor (**2010**) *Racionalización de radicales*. España. Archivo de blog. Recuperada 15 de Julio del 2011. http://www.vitutor.com/di/re/r3.html

[22]Tema ya revisado en el tópico *4.7.2. Binomios conjugados de este capítulo*.

[23] INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL. CECyT "MIGUEL BERNARD PERALES".ACADEMIA DE MATEMÁTICAS.**GUIA DE ALGEBRA PRIMER DEPARTAMENTAL. Recuperado 03 Agosto del 2011: algebra_1_tm_tv**

CAPÍTULO 3: Relaciones y funciones



3. Introducción

Una parte importante dentro de los desarrollos matemáticos son las expresiones algebraicas, sus representaciones y su ecuación.

¿Recuerdas cómo te has acercado a las matemáticas a lo largo de tu educación? Seguramente puedes recordar que tu primer contacto con las matemáticas fue mediante los números, seguido por el álgebra y la geometría.

Las representaciones gráficas de las ecuaciones en el plano se realizan desde tiempos remotos por parte de culturas precursoras de las ciencias como la griega, alrededor del siglo V Antes de Cristo hace aproximadamente 2500 años. Sin embargo, la representación de las figuras geométricas y más específicamente de los trazos (como lo son las rectas, parábolas y circunferencias) se han vinculado a desarrollos y comportamientos "generalizados" mediante las funciones algebraicas y el eje coordenado hasta hace apenas 400 años gracias a las aportaciones de René Descartes (1596-1650).

A partir del uso del plano cartesiano para representar y vincular los trazos de figuras planas con símbolos algebraicos, se han encontrado usos incontables de las representaciones algebraicas. En más de una ocasión seguramente has utilizado alguno de estos trazos mediante sus ecuaciones, su manejo numérico y su escritura mediante el uso del álgebra; pero ¿Qué significan estos símbolos en una situación real? o caso contrario, ¿Cómo representar una situación real con esos símbolos o trazos?

En el presente apartado se abordan ecuaciones, pero sobretodo se enfatiza en su aplicación en situaciones reales y además se representan siempre en lo posible a las funciones en más de una forma: gráfica, numérica, simbólica y verbal.

3.1. Identificación de funciones

Parece que uno de los primeros acercamientos que tenemos con las matemáticas es hasta cierto punto intuitivo, es decir: sumamos y restamos solo aplicando ciertos pasos, cuando en realidad estas dos operaciones tienen una serie de reglas que por ejemplo no permiten que en la resta se pueda intercambiar minuendo y sustraendo de una manera arbitraria, por ejemplo el resultado de restar 3 al número 4 no tendrá el mismo resultado al hacerlo de forma inversa, o sea restar 4 a 3. Dicho sea lo anterior, debemos establecer un primer concepto que nos ayude a comprender y acercarnos a los conceptos de igualdad, función y ecuación.

Una igualdad es una relación de equivalencia, puede ser numérica o algebraica, una serie de valores que son lo mismo en valor numérico, tanto del lado izquierdo como del derecho del signo igual, llamados primer miembro y segundo miembro respectivamente.

Hay igualdades simbólicas o algebraicas que de la misma manera relacionan valores de uno y otro miembro, solo que aquí los valores no son directos o no son visiblemente directos. En este punto, podemos comenzar a definir función y ecuación de la misma manera, como igualdades.

Una ecuación es una igualdad que puede tener una o más literales llamadas variables o incógnitas, que la satisfacen uno o varios valores.

Una función por otro lado, tiene una característica especial: debe tener un valor único de su variable dependiente con respecto a la independiente, esto es, para cada valor de x debe de tener y corresponder un único valor de y. Estos elementos para cada expresión se retomarán a detalle más adelante en este capítulo y en cursos posteriores donde los tratamientos de funciones son no solo útiles, sino ampliamente utilizados. Así, esta serie de definiciones puede ser clara y lógica para algunos de nosotros, pero ilógica y hasta innecesaria para algunos otros. La idea es que comencemos a dejar una base de lo que abordaremos más adelante y que seguiremos afinando con definiciones relacionadas primeramente a las igualdades y acto seguido aplicadas a las soluciones, representaciones e interpretaciones de funciones algebraicas.

Propiedades y postulados de la igualdad

Una igualdad matemática es una relación que existe entre dos expresiones, esta relación se expresa mediante el conocido símbolo de igual (=). Parece que este concepto es sencillo, pero ¿creerás que sigue siendo sencillo si lo definimos para el campo de los números Reales ($\mathbb{R}$)? Lo que acabamos de mencionar no es más que definir para qué números la igualdad existe; simplemente para todos (positivos, negativos, racionales, decimales, enteros) exceptuando los números *imaginarios* cuyo estudio no es motivo del presente capítulo.

Así que, si bien ya definimos que la igualdad es una relación válida para cualquier número real, entonces es posible generalizar que la igualdad es también una relación entre símbolos que representen una cantidad cualquiera; en otras palabras, una igualdad será también válida tanto en el campo de los números reales como en el álgebra.

Algunas de las manipulaciones que realizaremos con símbolos algebraicos tanto en igualdades como en funciones y ecuaciones, obedecen a ciertas reglas, mismas que seguramente ya hemos utilizado en más de una ocasión, pero que recordaremos de manera formal para que en un futuro no haya lugar a dudar en afirmar que la igualdad se cumple o que una ecuación tiene una raíz, comencemos entonces con las:

Propiedades de la igualdad

Partiendo del concepto de álgebra como una parte de las matemáticas que se dedica a estudiar de las propiedades de objetos Matemáticos (definiendo por objeto matemático a un número, una ecuación, un punto coordenado en el plano cartesiano), entonces la igualdad será en adelante una relación entre estos objetos que para fines prácticos relacionaremos con número reales. Más adelante utilizaremos estas propiedades entre otras para resolver ecuaciones.

Reflexiva: un número siempre es igual a sí mismo, lo que en símbolos o lenguaje algebraico sería: $x = x$. **Ejemplo:** $12 = 12$

Simétrica: si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero: si $x = y$, entonces, $y = x$. **Ejemplo:** si x = 2, entonces, 2 = x.

Transitiva: si un primer número es igual a otro segundo número, y además, el segundo número es igual a otro tercer número, entonces el tercer número y el primer número son iguales. **Ejemplo:** si x = 2, y 2 = w, entonces, $x = w$.

Sustitución: si $x = y$, entonces x puede ser reemplazada por y en cualquier ecuación o expresión. Ejemplo: si x = 3, y x +5= z, entonces 3+5= z, y 8= z.

Aditiva: al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida. Si $x = y$, entonces, $x + z = y + z$. **Ejemplo:** si x = 5, entonces, x + 3 = 5 + 3.

Multiplicativa: si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida. Si $a = b$ entonces $ac = bc$. **Ejemplo:** si x = 5, entonces, 7 x =(7)(5).

Podemos decir que hasta este momento las propiedades básicas enunciadas pueden darnos elementos suficientes para poder solucionar ecuaciones, sin embargo conviene mencionar algunas propiedades complementarias a las mencionadas anteriormente, así para:

la resta: nos dice que al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos otra igualdad válida. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$. **Ejemplo:** si x = 5, entonces, x - 3 = 5 – 3.

La división: nos dice que si dividimos ambos lados de la igualdad por un número real $c \neq 0$, obtenemos otra nueva igualdad válida. Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. **Ejemplo:** si $x = 5$ entonces $\frac{x}{8} = \frac{5}{8}$

La potencia: indica que si elevamos a la misma potencia ambos miembros de una igualdad esta se sigue cumpliendo. Si $a = b$, entonces, $(a)^n = (b)^n$. **Ejemplo:** si x =5 entonces $x^2 = (5)^2$

La raíz: nos dice que si calculamos la raíz n-ésima en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), la igualdad sigue siendo válida. Si $a = b$, entonces, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ (hay restricción para raíces de números negativos cuando n es par). **Ejemplo:** Si x = 5, entonces $\sqrt{x} = \sqrt{5}$

Para practicar:

realiza un cuadro comparativo en el cual se resuman las propiedades y escribe un ejemplo de cada una de las propiedades descritas, compara tus resultados con el de tus compañeros.

Postulados de campo

Aunado a las propiedades de los números reales que hemos descrito en los párrafos anteriores, definiremos ahora una serie de nuevas propiedades llamadas *postulados.* Un postulado puede definirse como una verdad evidente que es utilizada como parte de la argumentación al hacer demostraciones. Dado que se admiten sin demostración, simplemente han de aplicarse y nos pueden ayudar a resolver ecuaciones, si definimos aquellos que se pueden aplicar al sistema de números reales y estas verdades siempre se cumplen, entonces serán llamadas postulados de campo de los números reales.

Recordemos que igual que en las propiedades de la igualdad, lo que aquí definiremos aplica a la generalidad de los números y por consecuencia a los términos algebraicos, dicho lo anterior, definamos pues los siguientes porstulados.

Postulados de campo de los números reales

La manera en la cual describiremos los postulados de *campo* para los números reales será en esta ocasión en forma de una tabla[1] que se describe a continuación, en donde se menciona en la primer columna el postulado, en la segunda columna su descripción, una tercer columna con el enunciado del postulado y una cuarta con un ejemplo. Recordemos que que la literal ℝ denota el campo de los números reales los que pueden ser representados mediante letras.

Postulado		Enunciado	Ejemplo
Cerradura	Para la suma (+): la suma de dos números reales es un número real	Si a y b son dos números reales, entonces: a + b será un número real	4 + 6 = 10
	Para el producto (*): el producto de dos números reales es un número real	Si a y b son dos números reales, entonces: a * b será un número real	8 * 3 = 24
Conmutativa	Para la suma: el orden de los sumandos no altera la suma	Si a y b son dos números reales, entonces: a + b = b + a	3 + 5 = 5 + 3
	Para el producto (*): el orden de los factores no altera el producto	Si a y b son dos números reales, entonces: a * b = b * a	5 * 3 = 3 * 5
Asociativa	Parala suma: podemos agrupar sumandos sin alterar la suma.	Si a, b y c son tres números reales, entonces: (a+b)+c =a+(b+c)	(2+3)+5=2+(3+5)
	Para el producto: pode mos agrupar los	Si a, b y c son tres números reales, entonces:	(2 * 3) * 5=2 * (3 * 5)

	factores sin alterar el producto	(a * b)* c =a * (b * c)	
Distributiva	El producto se distribuye en la suma	Si a, b y c son tres números reales, entonces (a+b) *c = a * c + b * c	(2+3) * 5=2 * 5+3 * 5
Identidad	Para la suma: el cero como sumando, no altera la suma	Si a es un número real, entonces a + 0 = a	6 + 0 = 6
	Identidad para el producto: el uno como factor, no altera el producto.	Si a es un número real, entonces: a* 1 = a	13 * 1 = 13
Inverso	Inverso para la suma: si la suma de dos números reales es cero, uno de ellos es el simétrico del otro	Si a es un número real, entonces a + (-a) = 0	6 + (-6) = 0
	Inverso para el producto: si el producto de dos números reales es la unidad, uno de ellos es el recíproco del otro	Si a es un número real y además distinto de cero, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$	$23 * \left(\frac{1}{23}\right) = 1$

Ejemplos:

1. Demostraremos y argumentaremos que si a es un número real, entonces es verdad que: $(2a+5)+3(2+a)=5+11$

PROPOSICIONES:	RAZONES:
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3)(2)+(3)(a)$	Postulado distributivo
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3a+3*2)$	Postulado conmutativo en el paréntesis derecho
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+5)+(3a+6)$	Propiedad de sustitución de la igualdad (3*2=6)
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+3a)+(5+6)$	Postulado asociativo
$(2a+5)+3(2+a)=(2a+3a)+11$	Propiedad de sustitución
$(2a+5)+3(2+a)=(2+3)a+11$	Postulado distributivo
$(2a+5)+3(2+a)=5a+11$	Propiedad de sustitución (2+3=5)

2. Sea $3x+5=23$ una ecuación cuya variable x se encuentra en los reales, encontrar su solución.

PROPOSICIONES:	RAZONES:
$3x+5=23$	Ecuación dada
$3x+5=(18+5)$	Propiedad de sustitución de la igualdad (23=18+5)
$3x+5-5=18+5-5$	Propiedad aditiva de la igualdad (sumar -5 en ambos lados sin alterar la igualdad)
$3x=18$	Postulado del inverso de la suma
$3x=6*3$	Propiedad de sustitución de la igualdad (18=6*3)
$\left(\frac{1}{3}\right)3x=6*3\left(\frac{1}{3}\right)$	Postulado del inverso del producto

	$\left(\frac{1}{3}\right)*3=1$
$x=6$	Valor de la variable

En más de una ocasión que hemos demostrado igualdades o realizado despejes, para encontrar valores aplicamos reglas o pasos que son incorrectos, seguir las correctas justificaciones como lo muestran los ejemplos anteriores no solo asegura que hemos realizado de manera adecuada el proceso pedido, sino que nos asegura un resultado correcto. Algunos de nosotros realizamos algunos de estos pasos tal cual los conociéramos a la perfección, lo cual es posible después de realizar muchos ejercicios. Si nuestro proceso es dudoso puede hacernos fallar, por tanto es conveniente no olvidar estas reglas y siempre que sea posible observar un orden en la argumentación de cada nuevo proceso.

Ahora bien, todos los enunciados que hemos descrito, tanto en propiedades como en postulados, tiene un primer propósito que es, el de formalizar y hacer válido el tratamiento que podemos hacer de los números en lo general (números reales) y por ende del álgebra. Procederemos ahora a las manipulaciones algebraicas para la solución de ecuaciones.

3.2. Ecuaciones de primer grado

Como ya hemos definido, una ecuación es una expresión algebraica que se define mediante una igualdad. En ocasiones estas igualdades están definidas de manera tal que tienen un uso directo o inmediato, pero la mayoría de las veces la definición primera tiene que volver a definirse para aplicar o interpretar su uso.

Por otro lado, las ecuaciones tienen siempre uno o mas términos algebraicos y dependiendo de la cantidad de términos se clasifican como monomios, binomios, etc. y de acuerdo a el grado del exponente más grande como de grado 1, 2, etc.

Finalmente y de manera muy general, cabe mencionar que las ecuaciones siempre tienen un motivo u aplicación, algunos de esos usos los realizamos de manera cotidiana sin considerar siquiera como lo hacemos. En el presente apartado abordaremos las ecuaciones como una manera de operatividad que es una habilidad importante en las matemáticas, pero en lo posible se plantearán situaciones en donde las ecuaciones tengan un significado con nuestra vida diaria.

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado se define como una expresión algebraica donde el grado mayor del exponente es uno, una vez realizadas las operaciones indicadas y reducidos los términos semejantes, a continuación se muestran ejemplos de ecuaciones de primer grado:

$$x = 3 + 2\,,\ 2x + 3y = 5\,,\ \frac{a}{b+c} = d\,,\ 5 - 2d = 9$$

Algunas de las ecuaciones anteriores tienen más de una variable, pero en todos los casos ninguna de éstas tiene como exponente un número distinto de uno, todas son ecuaciones de primer grado. Para manipularlas emplea las ecuaciones de primer grado, deben cumplir las propiedades de la igualdad y los postulados de campo de los números reales, pues como mencionamos, dichos enunciados encierran en su naturaleza las reglas básicas de las manipulaciones algebraicas, por lo tanto, aplicaremos lo descrito en los planteamientos y soluciones de ecuaciones de primer grado, quizá no con la detallada descripción de cada uno de los ejercicios mostrados anteriormente, pero sí de una manera práctica y concisa que nos habilite para los futuros usos en la manipulación de ecuaciones y funciones.

Ecuaciones de primer grado con una variable

Dada la ecuación de primer grado:

$$5-2d=9$$

resolver una ecuación es conocer qué valor hace verdadera la igualdad, esto es que satisface a la ecuación, dicha solución la llamaremos raíz de la ecuación. Así $d=-2$ es el valor que hace verdadera la igualdad, ya que:

$$5-2(-2)=9$$

$$5+4=9$$

$$9\equiv 9$$

Para la ecuación:

$7-6(c-1)+3(3-4c)=7+(7c-4)$

Es poco práctico tratar de encontrar por tanteos la posible solución. Veamos como se resuelve esta nueva ecuación para conocer el valor de su variable de acuerdo al siguiente desarrollo:

Desarrollo:	Argumento:
$7-6(c-1)+3(3-4c)=7+(7c-4)$	Ecuación dada.
$7-6c+6+3(3-4c)=7+(7c-4)$	Desarrollo del producto: $-6(c+1)=-6c+1$
$7+6c+6+9-12c=7+(7c-4)$	Desarrollo del producto: $+3(3-4c)=9-12c$
$7+6c+6+9-12c=7+7c-4$	Desarrollo del producto: $+(7c-4)=7c-4$
$7+6+9-12c+6c=7-4+7c$	Acomodo por términos semejantes
$22-6c=3+7c$	Agrupamiento de términos semejantes $7+6+9=22$, $-12c+6c=-6c$ y $7-4=3$

$22-6c-22=3+7c-22$	Restando en ambos lados de la igualdad
$6c=7c-19$	Reduciendo
$6c-7c=7c-19-7c$	Restando ahora $-7c$ -en ambos miembros
$-1c=-19$	Reduciendo
$c=19$	Multiplicando en ambos lados por -1

Como puedes ver, en términos generales realizar un despeje o realizar las manipulaciones correspondientes que nos permitan encontrar el valor de una variable puede ser una tarea larga, pero si se observan cada una de las descripciones anteriores puedes con mucha facilidad realizar un proceso similar omitiendo algunos argumentos, siempre y cuando estemos seguros de que no se ha omitido alguno y de que se lleve siempre el orden adecuado y no se omita algunos de los postulados ya mencionados. De esta forma, desarrollemos un nuevo ejercicio de manera aún más práctica que de la misma manera nos lleve a encontrar el valor de una variable determinada.

Encontremos el valor de r en la siguiente ecuación: $2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$

Desarrollo:	Argumento:
$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$	Ecuación dada
$2-3r+21-7r=4r-8+8$	Desarrollo de productos con paréntesis
$+23-10r=4r$	Agrupamiento de términos semejantes de cada lado
$+23=14r$	Suma de $+10r$ en cada miembro de la igualdad
$\frac{23}{14}=\frac{14r}{14}$	División entre 14

$r=\dfrac{23}{14}$	Resultado final, intercambiando términos en la igualdad

Finalmente los argumentos deben ser claros, el orden definido y no necesariamente debe usarse una tabla para el acomodo del proceso. Realizar algunos ejercicios es muy adecuado para poder confiar en que nuestros procesos y nos hace eficientes en el proceso del cálculo de las variables buscadas.

Por otro lado, podemos para cada uno de los casos en que se pide encontrar el valor de la variable en las ecuaciones, realizar la respectiva comprobación para saber que el valor encontrado ha sido correcto. El proceso es sencillo e igualmente tiene que ver con las propiedades de los números reales. Haremos de forma sencilla y directa la comprobación del ejemplo anterior.

Definida la igualdad:

$$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$$

comprobar que el valor $r=\dfrac{23}{14}$ es correcto.

Procedemos a sustituir el valor encontrado en la ecuación dada:

$2-3(r-7)-7r=4(r-2)+8$

$2-3((23/14)-7)-7(23/14)=4((23/14)-2)+8$

Desarrollando:

$2-3(-75/14)-(23/2)=4(-5/14)+8$

$2+225/14-23/2=-10/7+8$

$253/14-23/2=46/7$

$46/7=46/7$

De esta manera, la igualdad se cumple con el valor encontrado lo que nos demuestra que este es correcto.

Para resolver:

En parejas resolver las siguientes ecuaciones de primer grado y hacer la comprobación.

1. $5 + 6x = 2$
2. $4b + 1 = -18$
3. $18c - 3 = 0$
4. $5 - 2d = 9$
5. $-3f + 1 = 4$
6. $-2 - 5g = 0$
7. $13 - h = 13$
8. $5j - 9 = 3j + 5$
9. $2k + 7 = 12 - 3k$
10. $10 - 4x = 7 - 6x$
11. $5m - 3{,}2 = 2m + 2{,}8$
12. $5n - 2n + 12 = 35 - 4n - 9$
13. $3ñ - 15 + 2ñ - 14 = ñ - 11$
14. $48p - 13 + 12p = 72p - 3 - 24p$
15. $q - 3 + 6q - 9 + 12q - 15 = q$
16. $6r + 12r - 9 - 8r + 10 + r = 0$
17. $5s + (4 - s) = 9 - (s - 6)$
18. $(3t - 1) + 7 = 8t - (3 - 2t)$
19. $3 - (8v-5) + (6-7v) - 1 = 7 - (v-1) + (4v+4)$
20. $(3w - 8) - (4 - 9w) + 3 = 7w - 2 - (5w + 9 - 3)$
21. $-(4x-6+5x) + (9-5x+3-2x) = 7x - (1 - 6x)$
22. $12y = 3(3y - 5)$
23. $3z - 1 = 2(z - 1)$
24. $2(b + 2) - 5(2b - 3) = 3$
25. $7 - 6(c - 1) + 3(3 - 4c) = 7 + (7c - 4)$
26. $4-2(d + 7)-(3d + 5)=2d+(4d-9+3d)-(d - 3)$
27. $8(6f - 14)-7(12 - 5f)+(23f + 2)-(2f + 65) = 0$

28. $21 - [5g - (3g - 1)] - g = 5g - 12$
29. $40h - [24 - (6h + 8) - (5 - 2h)] = 3-(8h - 12)$
30. $3[2 - (3j - 6)] + 4[6j - (1 - 2j)] = 4 - 5j$
31. $2 - \{k - [6k - (1 - 2k)]\} = 100$
32. $3[2x - (5x + 2)] + 1 = 3x - 9(x -3)$
33. $2 - \{2m + [2m - (2 - 2m)]\} = 2$
34. $34 - 52(12n - 34) + 235 = 32 + 101(35n\ 1)$
35. $2 - (3ñ + 4)-(5ñ - 6)-(7ñ - 8)-(9ñ - 10)= =11$
36. $2[7p - 2(p - 1)] + 3(4p + 7) = 5 - (p - 1)$
37. $8\{2 - [q + 2(q - 3)] + 1\} = 3 - (8 - 3q)$
38. $2 - 3(r - 7) - 7r = 4(r - 2) + 8$
39. $3.37 - (1.5s + 2.3) = 3.4s - (0.4 – 5.7s)$
40. $(t - 3)^2 - (t - 2)^2 = 5$

Sistemas de ecuaciones lineales

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales son uno de los problemas matemáticos más antiguos y presenta una conexión con la actividad práctica. Se han encontrado sistemas de ecuaciones lineales en la matemática mesopotámica, medieval, china y japonesa. En 1678 el matemático alemán Leibniz fue el primero en proponer un método general de resolución y manejo de los determinantes, en 1693 dió ejemplos de sistemas de ecuaciones con coeficientes, de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y eliminando las variables obtenía una expresión como determinante utilizando la notación con subíndices. Sin embargo, fue Maclaurin quien usó el método de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2,3 y 4 incógnitas. El Suizo Cramer hacia 1750 propuso auxiliándose de expresiones similares a los determinantes, un método para la resolución de un sistema de **n** ecuaciones con **n** variables. Además matemáticos de los siglos XVIII y XIX continuaron estas investigaciones, Laplace por ejemplo, obtuvo el desarrollo de los determinantes, Lagrange estudió identidades de determinantes funcionales de 3×3 , en 1773. Cauchy dedujo la ley de multiplicación, gracias a Jacobi en 1826 los determinantes se convirtieron en patrimonio general de los matemáticos, llegando a ser utilizados ampliamente en los sistemas de ecuaciones lineales, geometría y en análisis.

El matemático Irlandés Sylvester introdujo las matrices haciendo uso del rango, su amigo y colega Cayley creó el cálculo matricial e hizo notar que las matrices son una forma de expresión abreviada para las sustituciones lineales[2].

Actualmente, los planteamientos de soluciones y aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales tiene una amplia aplicación en la ciencia y la tecnología y se desarrollan principalmente por medio de algoritmos computacionales, pues algunos de estos llegan a ser compuestos por cientos o miles de ecuaciones con igual número de incógnitas.

Un sistema de ecuaciones es una colección de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables, por ejemplo:

$a)\begin{cases} 2x + y = 3 \dots\dots\dots (1) \\ -4x + 8y = -2 \dots (2) \end{cases}$ sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

b) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8 \dots (1) \\ x + y + z = 4 \dots (2) \\ x - y - z = 0 \dots (3) \end{cases}$ sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

Utilizamos una llave para indicar el sistema de ecuaciones, es conveniente numerar cada ecuación del sistema. Una solución de un sistema de ecuaciones consta de valores para las variables, los cuales hacen verdadera cada ecuación del sistema. Resolver un sistema de ecuaciones significa determinar todas las soluciones del sistema[3]. Un sistema de ecuaciones lineales se denomina consistente si tiene al menos una solución. Un sistema sin soluciones es conocido como inconsistente.

Una ecuación con n variables es lineal si es equivalente a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Donde $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ son variables distintas mientras que $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, b$ son constantes y al menos una de las constantes a es distinta de cero[4].

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones: suma y resta también conocido como reducción, sustitución, igualación, por determinantes y gráfico.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables

Se le llama sistema de ecuaciones a la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas[5], en nuestro caso, de ecuaciones lineales o de primer grado.

Recordemos que cada ecuación representa geométricamente una recta y que dos rectas pueden ser paralelas, lo cual significa no que tienen solución o puntos en común. Pueden cortarse en un punto, por lo que tienen una solución y se llaman simultáneas, o estar una recta sobre la otra y entonces tienen infinitas soluciones o puntos en común, en nuestros ejemplos sólo utilizaremos sistemas de ecuaciones simultáneas, es decir siempre tendrán solución o un punto en común.

Método de suma y resta o reducción

En este método se trata de igualar los coeficientes de una de las incógnitas, para después sumar o restar las dos ecuaciones y así eliminar una de las incógnitas, veamos ejemplos de ello:

Resolver por el método de suma y resta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + 6\mathrm{y} = 27 \ \ldots \text{ecuación } 1 \\ 7\mathrm{x} - 3\mathrm{y} = 9 \ldots \text{ecuación } 2 \end{cases}$$

En este sistema lo más conveniente es multiplicar la ecuación 1 por -7 y sumarla con la ecuación dos para eliminar la incógnita x

$$-7(x + 6y) = -7(27)$$

$$-7x - 42y = -189$$

Esta nueva forma de representar a la ecuación 1 la sumamos con la ecuación 2 y obtenemos:

$$\begin{array}{r} -7x - 42y = -189 \\ 7x - 3y = 9 \\ \hline 0 - 45y = -180 \end{array}$$

Por lo tanto, teniendo este resultado podemos

$$y = \frac{-180}{-45} = 4$$

Una vez obtenido el valor de y=4, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones 1 o 2, y se obtiene el valor de x:

$$x + 6y = 27$$

$$x + 6(4) = 27$$

$$x + 24 = 27$$

$$x = 27 - 24 = 3$$

Si en lugar de sustituir y =4 en la ecuación 1, se hace en la 2, obtendremos el mismo resultado, ya que este valor satisface a ambas ecuaciones, así la solución es x =3 y $y = 4$ mediante la coordenada (3,4).

Veamos ahora si estos valores satisfacen a ambas ecuaciones. Para esto sustituimos en las ecuaciones originales los valores obtenidos; veamos primeramente lo relativo a la primera de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -7x-42y&=-189 \\ -7(3)-42(4)&=-189 \\ -21-168&=-189 \\ -189&=-189 \end{aligned}$$

Hacemos lo mismo en la ecuación 2 para comprobar que nuestras soluciones son correctas:

$$\begin{aligned} 7x-3y&=9 \\ 7(3)-3(4)&=9 \\ 21-12&=9 \\ 9&=9 \end{aligned}$$

Resolver por el método de suma y resta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3\mathrm{x}-4\mathrm{y}=41 \text{ ... ecuación 1} \\ 11\mathrm{x}+6\mathrm{y}=47 \text{ ... ecuación 2} \end{cases}$$

Para este sistema debemos buscar que los coeficientes de x o de y sean además de iguales, de signo contrario. A simple vista no encontramos por qué número multiplicar las ecuaciones conviene encontrar el mínimo común múltiplo de los coeficientes, trabajemos en eliminar la y, por lo que usamos el -4 y el 6, ya tienen signo contrario que los eliminará, ahora busquemos el mcm como lo viste en las unidades anteriores, encontrarás que es 12, por lo que nos indica que el -4 hay que multiplicarlo por 3 y el 6 por 2, y tendremos:

$3[3x-4y]=3[41]$ además, para la segunda: $2[11x+6y]=2[47]$

De esta manera, las ecuaciones nos resultan de forma simultánea:

La suma de estas nuevas ecuaciones será:

$$31x = 217$$

lo cual de manera evidente nos resultaría para el valor de $x = \frac{217}{31}$ que nos resulta en un valor para $x = 7$.

Este nuevo valor nos ayuda a calcular el resultante valor de y. Para ello, al igual que en el caso anterior podemos sustituir el valor encontrado de x =7 en cualquiera de las dos ecuaciones originales. Tomemos la primera y desarrollemos:

$$3x - 4y = 41$$
$$3(7) - 4y = 41$$
$$21 - 4y = 41$$
$$-4y = 41 - 21$$
$$-4y = 20$$
$$y = \frac{20}{-4} = -5$$

Queda comprobar que los valores encontrados x =4 y y =-5 satisfacen ambas ecuaciones, las soluciones también son llamadas raíces de la ecuación.

Método de sustitución

Otro método de resolución es el llamado por sustitución, el cual lo indicaremos por pasos y lo explicaremos mediante el siguiente ejemplo:

Resolvamos el sistema: $\begin{cases} \mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 6 \ \dots \text{ ecuación 1} \\ 5\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 13 \dots \text{ ecuación 2} \end{cases}$

Paso I: despejamos una de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones.

En nuestro ejemplo despejamos x de la primera ecuación:

$$x = 6 - 3y$$

Paso II: sustituimos el valor obtenido de x en la otra ecuación

$$5(6 - 3y) - 2y = 13$$

$$30 - 15y - 2y = 13$$
$$-17y = 13 - 30$$
$$-17y = -17$$
$$y = \frac{-17}{-17} = 1$$

Paso III: como ya hemos encontrado un valor, ahora sustituimos este valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones dadas en un principio. Podemos observar que en el Paso I ya se ha dejado una ecuación en función de *y*, así que ahí podemos sustituir como:

$$x = 6 - 3y$$
$$x = 6 - 3(1)$$
$$x = 3$$

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 6\text{x} - 5\text{y} = -9 \ \ \ldots \text{ecuación 1} \\ 4\text{x} + 3\text{y} = 13 \ldots \text{ecuación 2} \end{cases}$$

Paso I: despejamos x de la primera ecuación:

$$6x = -9 + 5\text{y}$$
$$x = \frac{-9 + 5y}{6}$$

Paso II: sustituimos en la segunda ecuación:

$$4\left(\frac{-9 + 5y}{6}\right) + 3y = 13$$

Reducimos la fracción: $2\left(\frac{-9+5y}{3}\right) + 3y = 13$

Multiplicamos todo por 3 para quitar el denominador:

$$3\left[2\left(\frac{-9 + 5y}{3}\right) + 3y\right] = 3[13]$$

Se elimina un 3 que multiplica con un 3 que divide $(\frac{3}{3} = 1)$, solamente en el primer término ya que estamos aplicando la propiedad distributiva.

$$[2(-9 + 5y) + 9y] = 39$$
$$-18 + 10y + 9y = 39$$

Reducimos: $19y = 39 + 18$, $19y = 57$, $y = \frac{57}{19}$, y=3

Paso III: sustituimos y=3 en el despeje del paso I:

$x = \frac{-9+5(3)}{6}$ $x = \frac{6}{6}$ $x = 1$

Resultado: (1,3) o x =1, y =3

Metodo de igualación

Recuerda que un sistema de ecuaciones lineales representa geométricamente dos rectas y como se indicó al inicio en nuestros ejemplos, son dos rectas que se cortan en un punto en común, este método también llamado método gráfico consiste en graficar las dos rectas y buscar el punto de intersección de ambas, veamos con un ejemplo cómo hacerlo.

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} = 1 \ \ldots \text{ecuación 1} \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = 7 \ldots \text{ecuación 2} \end{cases}$$

Paso I: despejar y de cada ecuación.

$$y = x - 1 \ldots \text{ecuación 1}$$

$$\mathrm{y} = 7 - \mathrm{x} \ldots \text{ecuación 2}$$

Se igualan las dos variables despejadas, pues en teoría son dos literales iguales, por tanto se puede expresar la igualdad como:

$$y = y$$
$$x - 1 = 7 - x$$
$$x + x = 7 + 1$$
$$2x = 8$$
$$x = \frac{8}{2} = 4$$

De forma similar, podemos encontrar el valor de la variable restante, lo cual se puede hacer mediante una sustitución en cualquiera de las ecuaciones. Así, tomando la primera ecuación:

$$y = x - 1$$
$$y = (4) - 1 = 3$$

Por lo tanto, la solución para este sistema es el par ordenado como (4,3)

Para practicar:

En parejas resolver cada una de las siguientes ecuaciones simultáneas, con dos variables, por el método de suma y resta, sustitución e igualación. Comprueba tus resultados.

1.- $\begin{matrix} 3x+2y=6 \\ 6x+y=4 \end{matrix},\ x=\frac{2}{9}, y=\frac{8}{3}$	2.- $\begin{matrix} -3x+2y=6 \\ 6x-y=4 \end{matrix},\ x=\frac{19}{9}, y=\frac{16}{3}$
3.- $\begin{matrix} x-y=6 \\ 2x+4y=-4 \end{matrix},\ x=\frac{10}{3}, y=-\frac{8}{3}$	4.- $\begin{matrix} 7x+7y=30 \\ -3x-1y=-24 \end{matrix},\ x=-\frac{99}{7}, y=\frac{129}{7}$
5.- $\begin{matrix} 2x+2y=6 \\ 4x+4y=-4 \end{matrix},\ \text{sin } solucion$	6.- $\begin{matrix} 3x+2y=6x+1 \\ 4x+4y=-4(x+2) \end{matrix},\ x=-\frac{3}{16}, y=\frac{1}{8}$

Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Una ecuación lineal de primer grado con tres incógnitas puede representarse como

$ax+bx+cz=d$

Las ecuaciones de primer grado con tres incógnitas se aplican en forma de conjuntos de ecuaciones agrupadas de la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas puede representar entre otras cosas tres planos en el espacio, con una gráfica de tres dimensiones y la solución que es una triada de valores (x,y,z) es un punto en el espacio en donde estos tres planos en el espacio se cruzan. Sin embargo, al tener sistemas de más ecuaciones e incógnitas no puede darse un significado tangible único como por ejemplo para un cuerpo en el aire en movimiento señala un desplazamiento de 3 dimensiones[6].

Los métodos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones con tres incógnitas son semejantes a los examinados para las ecuaciones con dos incógnitas, el razonamiento es el mismo: tratar de encontrar cierta solución común a las tres ecuaciones. De acuerdo al grado de dificultad que implica el uso algebraico de tres incógnitas, solo analizaremos los métodos de solución por eliminación y por determinantes.

Método de eliminación

El método más directo para llegar a las soluciones y que nos lleva a las técnicas matriciales es el de eliminación. El primer propósito es reducir el sistema de tres incógnitas a un sistema de dos incógnitas. Después resolver este sistema, como se desarrolló anteriormente.

Ejemplo: resolver el siguiente sistema por el método de eliminación

$$\begin{cases} x-2y+1=-3z \\ 2x+y+z=6 \\ 3y-2z-13=-x \end{cases}$$

Las ecuaciones deberán tener la forma $ax+by+cz=d$, para un mejor orden la solución es conveniente numerarlas, por lo tanto:

1. $x-2y-3z=-1$
2. $2x+y+z=6$
3. $x+3y-2z=13$

Enseguida analiza cuidadosamente las tres ecuaciones y elige la variable que se vaya a eliminar. La regla de elección es determinar cuál de las tres variables presenta mayor simplicidad para que, al ser multiplicada por un factor, se obtengan coeficientes simétricos en dos de las ecuaciones del sistema[7].

En esta ocasión x tiene el mismo coeficiente en la ecuación (1) y (3) y el coeficiente de la ecuación (2) es múltiplo de las otras dos. Entonces, nuestros pares de ecuaciones estarán formados por las ecuaciones 1 y 3 y por las ecuaciones (2) y (3).

Entonces el primer par de ecuaciones es:

1. x -2y-3z= -1
3. x+3y-2z=13

Ahora la ecuación (1) se multiplica por (-1), enseguida se suma a la ecuación (3), obteniendo así la ecuación (4).

$$\begin{array}{lr} & -x+2y+3z = \ \ 1 \\ & x+3y-2z = 13 \\ \hline 4) & 5y + \ z = 14 \end{array}$$

El segundo par de ecuaciones es:

2. $2x+y+z=6$

3. $x+3y-2z=13$

En este caso la ecuación (3) se multiplica por (-2), enseguida se suma a la ecuación (2) obteniendo ahora la ecuación (5).

$$\begin{array}{lr} & 2x + \ y + \ z = \ \ 6 \\ & -2x - 6y + 4z = -26 \\ \hline 5) & -5y \ +5z = -20 \end{array}$$

Observemos que las ecuaciones resultantes (4) y (5) tienen dos incógnitas que son: y **y** z, de modo que ahora buscamos la forma de reducir una de las dos incógnitas para despejar la otra. En esta ocasión, los coeficientes de y son simétricos, así que al sumarlas se eliminará esta variable.

$$\begin{array}{r} 5y + \ z = \ \ 14 \\ -5y+5z = -20 \\ \hline 6z = \ - \ 6 \end{array}$$

De la ecuación resultante (6z=-6), se despeja z:

$$z = \frac{-6}{6} = -1$$

Ahora sustituimos el valor de z en la ecuación 4 ó 5 para conocer y. Por simplicidad sustituimos en la ecuación 4:

$5y+z=14$

$5y+(-1)=14$

$5y-1=14$

$5y=14+1$

$y=\frac{15}{5}$

$y=3$

Finalmente sustituimos las dos incógnitas encontradas en una de las tres ecuaciones originales. Por simplicidad, sustituimos en la ecuación (1):

$x-2y-3z=-1$

$x-2(3)-3(-1)=-1$

$x-6+3=-1$

$x=-1-3+6$

$x=2$

Podemos verificar que los valores hallados cumplan con las tres ecuaciones originales, primero para la ecuación 1:

$x-2y-3z=-1$

$(2)-2(3)-3(-1)=-1$

$2-6+3=-1$

$-1=-1$

Para la ecuación 2:

$2x+y+z=6$

$2(2)+3+(-1)=6$

$4+3-1=6$

$6=6$

Y por último para la ecuación 3:

$x+3y-2z=13$

$2+3(3)-2(-1)=13$

$2+9+2=13$

$13=13$

Hay una solución, que es la triada ordenada: (2,3,-1) para los valores x, y, z respectivamente.

Método de determinantes

El método de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2,3 y 4 incógnitas, fue empleado en 1748 por Colín Maclaurin. En el siglo XIX el matemático francés Agustín Louis Cauchy utilizó la palabra determinante y demostró el teorema de la multiplicación para matrices; además presentó resultados en la diagonalización de matrices, en este mismo siglo el matemático alemán Carl Gustav Jacobi incluyó y explicó el concepto de determinante aplicándolo al estudio de las funciones de varias variables múltiples. El primero en utilizar la palabra matriz fue el matemático británico James Joseph Sylvester en 1850 para diferenciar determinante[8].

Un determinante se puede definir como un acomodo de coeficientes organizados en filas y columnas, las cuales dependerán del orden que tenga este y se puede representar con det A, Δ (delta) o bien |A|, este último no deberás confundirlo con el valor absoluto de A.

Una matriz es una agrupación de números o elementos listados de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observa que los subíndices representan el número de filas y columnas en que están ubicados. Por ejemplo: $a_{3,2}$ está ubicado en la tercera fila de la segunda columna.

Cuando el número de filas es igual al número de columnas se dice que es una matriz cuadrada. Cabe señalar que para calcular el determinante de una matriz es indispensable que sea cuadrada, es decir: que el número de filas y columnas sea al mismo[9].

Ejemplos de matrices:

3 x 1: $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 3 x 2: $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 3 x 3: $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 12 \end{bmatrix}$ 1 x 3: $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

2 x 2: $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 2 x 3: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Estos arreglos vienen dados regularmente sólo por los valores numéricos de las ecuaciones, es decir por los coeficientes numéricos de las ecuaciones, razón por la cual se les llama *matríz de coeficientes*. Por otro lado aún que no hemos definido el método completo de solución de los sistemas de ecuaciones, diremos que es importante definor que estas matrices pueden tener un valor numérico; este valor numérico se calculará por medio de un proceso llamado determinante. Así, el determinante de una matríz de orden 2 x 2 se calcula mediante una fórmula específica, misma que se define como::

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo: hallar el valor del determinante de la matríz $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

Solución: aplicando la definición de determinantes

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = (6)(-1) - (-5)(-3) = -6 - 15 = -21$$

Si tenemos el caso de un determinante de una matriz de orden 3 x 3, aplicaremos igualmente un algoritmo especifico, que nos dará un valor numérico y que tendrá como base de solución el sistema anteriormente abordado (determinante de 2x2). El algoritmo o fórmula para su cálculo puede definirse como:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Hallar el valor del determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix} -8 & 12 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & 11 & -3 \end{bmatrix}$

Aplicando la definición de determinantes de este orden:

$$A=\begin{bmatrix} -8 & 12 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & 11 & -3 \end{bmatrix}=-8\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -3 \end{vmatrix}-12\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -3 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -9 & 11 \end{vmatrix}=\ldots$$

$$\ldots-8(-12-22)-12(-18+18)-5(66+36)=-8(-34)-12(0)-5(102)=272-510=-238$$

El ejemplo anterior es entonces el resultado del cálculo del determinante de un sistema de coeficienes del sistema A, en otras palabras: el valor del determinante A.

El uso del cálculo de los determinantes se verá a continuación para el cálculo de los sistemas de ecuaciones mediante la regla de Cramer.

Solución de un sistema de ecuaciones de 3 x 3 por el método de Cramer

El método de Cramer se utiliza cuando se quiere resolver un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes de matrices, donde el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y donde sus coeficientes son diferentes de cero. Analicemos un ejemplo:

resolver el siguiente sistema con la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x+2y-2z=15 \\ 4x-\ y+3z=-5 \\ x+2y-\ z=14 \end{cases}$$

Primeramente hay que verificar cuales son las variables del sistema. En este caso sus variables son (x_1,x_2,x_3),las cuales adquieren la forma (x,y,z).

Ahora hacemos un arreglo de los coeficientes para resolver los valores $(\Delta,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$

Si definimos los determinantes anteriores de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases}$$

Entonces los respectivos determinantes (que ya hemos analizado cómo resolver) serán:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{1,2} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

Es decir el determinante general se define solamente con los coeficientes numéricos del sistema de ecuaciones, el determinante de x se define cambiando la columna primera por los valores resultado de cada una de las ecuaciones (que hemos llamado a estos coeficientes términos independientes y se denotan con b. La solución de cada uno de los valores se definirá una vez calculados los determinantes aquí descritos con las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

De acuerdo al sistema dado, procedemos entonces a calcular el determinante general o del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\left[(-1)(-1)-(3)(2)\right] - 2\left[(4)(-1)-(3)(1)\right] + (-2)\left[(4)(2)-(-1)(1)\right]$$

Realizando las respectivas operaciones tendremos:

$$= 1(1-6) - 2(-4-3) - 2(8+1) = 1(-5) - 2(-7) - 2(9) = -5 + 14 - 18 = -9$$

Ahora calculamos Δx, para hacerlo sustituimos los respectivos valores en el determinante que definimos como Δx, quedando la definición del mismo con su respectivo cálculo como:

$$\Delta x=\begin{vmatrix}15 & 2 & -2\\ -5 & -1 & 3\\ 14 & 2 & -1\end{vmatrix}=15\left[(-1)(-1)-(3)(2)\right]-2\left[(-5)(-1)-(3)(14)\right]+(-2)\left[(-5)(2)-(-1)(14)\right]$$

$$\Delta x=15\left[1-6\right]-2\left[5-42\right]+(-2)\left[-10+14\right]=15(-5)-2(-37)-2(4)=-9$$

Luego calculamos Δy:

$$\Delta y=\begin{vmatrix}1 & 15 & -2\\ 4 & -5 & 3\\ 1 & 14 & -1\end{vmatrix}=1\left[(-5)(-1)-(3)(14)\right]-15\left[(4)(-1)-(3)(1)\right]+(-2)\left[(4)(14)-(-5)(1)\right]$$

$$\Delta y=1\left[5-42\right]-15\left[-4-3\right]-2\left[56+5\right]=1(-37)-15(-7)-2(61)=-54$$

Finalmente calculamos Δz:

$$\Delta z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 15\\ 4 & -1 & -5\\ 1 & 2 & 14\end{vmatrix}=1\left[(-1)(14)-(-5)(2)\right]-2\left[(4)(14)-(-5)(1)\right]+15\left[(4)(2)-(-1)(1)\right]$$

$$\Delta y=1\left[-14+10\right]-2\left[56+5\right]+15\left[8+1\right]=1(-4)-2(61)+15(9)=9$$

La solución del sistema, serán los valores que se calculen de acuerdo a las definiciones de cada variable (ya descritas anteriormente), así que con la sustitución de valores, tendremos:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-9}{-9}=1$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-54}{-9}=6$$

$$z=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{9}{-9}=-1$$

Por tanto, el conjunto solución para este sistema será la triada (1,6,-1) o bien: x=1, y=6, z=-1. Igual que en los casos anteriores, este conjunto solución puede comprobarse sustituyendo los valores encontrados en cada una de las ecuaciones originales para comprobar la igualdad de cada una. De esta forma y de manera resumida en cuanto a operaciones podemos decir que:

$$\begin{cases} x+2y-2z=(1)+2(6)-2(-1)=1+12+2=15 \\ 4x-y+3z=4(1)-(6)+3(-1)=4-6-3=-5 \\ x+2y-z=(1)+2(6)-(-1)=1+12+1=14 \end{cases}$$

Para resolver:

En parejas resolver cada una de las siguientes ecuaciones simultáneas, con dos variables, por el método de eliminación y determinantes. Comprueben sus resultados.

1.- r	2. $\begin{matrix} 3x-2y+z=-4 \\ x+y+4z=2 \\ x+7y+z=5 \end{matrix}$, $x=-1, y=\frac{7}{9}, z=\frac{5}{9}$ -
3.- $\begin{matrix} 2x-3y-5z=-19 \\ 3x-4y+z=-2 \\ x+y+z=6 \end{matrix}$, $x=1, y=2, z=3$	4.- $\begin{matrix} 2x-3y-4z=5 \\ 5x-4y-2z=4 \\ 6x-9y-12z=5 \end{matrix}$, sin *solucion*

3.3. Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación que se pude expresar de la forma $ax^2+bx+c=0$, donde a, b y c son números reales y constantes, con $a \neq 0$[10], recibe el nombre de ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado. Si la ecuación se expresa en función de una nueva variable, entonces será una función. Las funciones cuadráticas tienen la forma:

$$f(x)=y=ax^2+bx+c$$

Esta nueva notación puede tener la definición a partir del valor de *f(x)* que nos representa precisamente la relación que hay de toda la ecuación o lado derecho de la igualdad en función de la variable x, de la forma definida a partir de y, tiene más bien una relación con la representación gráfica, pues como es bien conocido en una representación gráfica hay una relación de acuerdo a las variables en los ejes coordenados X y Y.

Las ecuaciones cuadráticas se clasifican en función del tipo de términos que presente, la completa $ax^2+bx+c=0$ se caracteriza por presentar los tres términos (el del coeficiente cuadrático o ax^2, el lineal bx y el llamado término independiente c. Una ecuación cuadrática puede también ser incompleta por presentar sólo dos términos, puede ser pura $ax^2+c=0$,o bien mixta[11,12] $ax^2+bx=0$ algunos ejemplos de los tipos de ecuaciones cuadráticas serían:

$$\text{Ecuación cuadrática completa}\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ 3x^2+\dfrac{3}{2}x+2=0 \\ -8x^2+6x+6=0 \end{cases}$$

$$\text{Ecuación cuadrática incompleta}\begin{cases} pura\begin{cases} ax^2+c=0 \\ 5x^2-3=0 \\ -3x^2+\dfrac{2}{3}=0 \end{cases} \\ mixta\begin{cases} ax^2+bx=0 \\ 5x^2+6x=0 \\ 3x^2-6x=0 \end{cases} \end{cases}$$

Desde la antigüedad se utilizaban algunos métodos para dar solución a ecuaciones cuadráticas. De acuerdo a los escritos de Al-Khwarizmi alrededor de 820 d. de C., ya se estudiaban casos particulares de problemas como el de áreas rectangulares conociendo el área total del lote, la diferencia entre la base y la altura del rectángulo. Ellos completaban el cuadrado, posteriormente en el año 2000 a. de C. aproximadamente, los babilonios daban solución a los problemas con un método semejante y en tablas hechas de barro escribían los desarrollos del problema de acuerdo a las dimensiones del rectángulo[13].

Alrededor del año 300 a. de C. Euclides presentó algunas soluciones para encontrar el área de un rectángulo y su procedimiento de solución es el más semejante al que utilizamos en la actualidad que le llamamos completar cuadrados[14].

Métodos de solución de una la ecuacion cuadrática con una variable

A la solución de una ecuación cuadrática también se le conoce como raíz de la ecuación, estas pueden ser reales o imaginarias, por lo que debes de recordar las propiedades de los números reales y complejos[15]. Empezaremos a dar solución a las ecuaciones cuadráticas por diversos métodos como: factorización, completando el trinomio cuadrado perfecto, por fórmula general y por uso del discriminante.

Método de Factorización

Este método lo emplearemos solo si la ecuación es factorizable y tomaremos de referencia el siguiente teorema[16], también conocido como la propiedad del factor cero[17] :

Si a y b pertenecen a los números reales, entonces

Si $ab = 0,\ entonces\ a = 0$ ó $b = 0$

La propiedad el factor cero nos indica que si el producto de dos o más números es cero, entonces al menos uno de los números es cero. Veamos algunos ejemplos aplicando este método de factorización en las ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo: utilizando factorización resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Se buscan dos números que multiplicados nos den -10 y sumados o restados esos dos números nos den -3. Estos números pueden ser 10 y 1 o 5 y 2, vemos que estos 2 últimos son los que cumplen con la condición descrita. Después, se forman 2 binomios, el primer término la raíz de x^2 y el segundo con los valores 5 y 2 con los signos adecuados -5, y 2.

$$(x-5)(x+2)=0$$

Para que esta condición se cumpla, uno de los factores (en este caso binomio) debe ser cero, por lo que se iguala cada binomio a cero y se resuelve a partir de la condición:

$$x-5=0$$

lo que nos da:

$$x=5$$

que es la primera solución.

Para la siguiente solución se toma el siguiente factor que es x+2, el cual de acuerdo a la condición del producto igual a cero nos hace proponer que: $x+2=0$, de donde: $x=-2$.

Recordando que la ecuación cuadrática, presenta dos soluciones.

Encuentraremos el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática $x^2+6x-16=0$, utilizando factorización.

Lo desarrollamos de manera análoga al ejemplo anterior:

$(x+8)(x-2)=0$

$x+8=0;\ x=-8$ primera solución

$x-2=0;\quad x=2$ segunda solución.

Encontremos por factorización, el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x^2-3x=0$$

Es una ecuación cuadrática incompleta mixta, que presenta el mismo factor en cada uno de sus términos, por lo que aplicamos el método de factor común[18], este método consiste en buscar el máximo común divisor de los coeficientes de cada término de la ecuación cuadrática, a este término se le adiciona la o las literales repetidas en los dos términos y con el menor exponente. Este término es el factor común, veamos el desarrollo del ejemplo:

$x(x-3)=0$; igualando cero cada factor tendríamos:

$x=0$, primera solución

x-3=0

x=3, segunda solución

Hallaremos por factorización el conjunto de soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x^2-36=0$$

Como corresponde a una ecuación cuadrática incompleta pura, su solución es inmediata despejando la incógnita[19]

$x^2-36=0$

$x^2=36$

$x=\pm\sqrt{36}$, soluciones

$x_1=6$ y $x_2=-6$

Método Completando el trinomio Cuadrado Perfecto (T.C.P).

Recordando el tema de productos notables, el cuadrado de un binomio nos da un trinomio cuadrado perfecto [20], por ejemplo $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ es un trinomio cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de un binomio. Considerando la siguiente expresión como un trinomio cuadrado perfecto:

$r^2+2rt+t^2=(r+t)^2$ de manera análoga tendríamos: $r^2-2rt+t^2=(r-t)^2$

Las propuestas anteriores pueden ayudarnos a recordar algunas características de un trinomio cuadrado perfecto, en donde dos de los términos deben de estar al cuadrado: r^2 y t^2 además ser positivos. Si multiplicamos sus raíces; r y t y duplicamos el resultado, se obtiene el segundo término, o su inverso aditivo, $-2rt$.

Esta explicación tratando de mostrarla en forma concreta puede resultar confusa, pero veamos algunos ejemplos para dejar mas claro:

Completar el trinomio cuadrado perfecto para dar con la solución de la siguiente ecuación cuadrática: $x^2+2x-8=0$

De la ecuación original despejamos el término independiente, 8 para nuestro caso: $x^2+2x=8$, de aquí podemos ver que el coeficiente de **x** es 2, por tanto se toma la mitad que nos daría $\frac{2}{2}=1$; este resultado se eleva al cuadrado $1^2=1$, y lo sumamos en ambos miembros de la ecuación y obtenemos: $x^2+2x+1=8+1$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado se obtiene:

$(x+1)(x+1)=9$

$(x+1)^2=9$

Sacamos raíz cuadrada en ambos miembros, tenemos:

$x+1=\pm\sqrt{9}$

Despejamos y las soluciones son:

$x_1=-1+3; \quad x_1=2$

$x_2=-1-3; \quad x_2=-4$

Resuelveremos la ecuación $2x^2-3x-14=0$, completando el trinomio cuadrado perfecto.

Siendo $2x^2-3x-14=0$ la ecuación dada; dividimos ambos lados entre 2: $\frac{2x^2-3x-14}{2}=\frac{0}{2}$

Sumando 7 en ambos lados: $x^2-\frac{3}{2}x=7$

Completando el trinomio cuadrado en ambos lados; $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=7+\frac{9}{16}$

Factorizando $(x-\frac{3}{4})^2=\frac{121}{16}$

Despejando el cuadrado: $(x-\frac{3}{4})=\pm\sqrt{\frac{121}{16}}$

Calculando la raíz $(x-\frac{3}{4})=\pm\frac{11}{4}$

Sumando en ambos lados: $x_1=\frac{3}{4}+\frac{11}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

Calculando finalmente la segunda incógnita: $x_2=\frac{3}{4}-\frac{11}{4}=\frac{-8}{4}=-2$

$x_1=\frac{7}{2}$ y Siendo estos últimos los resultados.
$x_2=-2$

Para practicar:

En equipos de tres, eterminar las raíces de las siguientes ecuaciones de 2º grado, completando el trinomio cadrado perfecto:

1.- $x^2+5x+4=0$

2.- $6x-27=-x^2$

3.- $x^2+11x+30=0$

4.- $y^2+10=6y$

5.- $w^2-40=3w$

6.- $2x+5=-x^2$

7.- $3x^2=x+2$

8.- $-3x^2+7x+6=0$

Método por Fórmula General

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2+bx+c=0$ en donde por condición debe cumplirse que $a\neq 0$, podemos aplicar la fórmula general, que surge de despejar el valor de x de la ecuación anterior y resulta[21] :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

por lo que las soluciones de una ecuación cuadrática son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Resuelve la ecuación $6x^2+7x+2=0$, mediante la fórmula general.

Partiendo de la fórmula general y considerando: $ax^2+bx+c=0$, que los coeficientes serán: $a=6, b=7, c=2$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación original tenemos:

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$$

Cada valor se calcularía como: $x_{1,2}=\dfrac{-7+\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$ y $x_{1,2}=\dfrac{-7-\sqrt{7^2-4(6)(2)}}{2(6)}$

De esta manera el cálculo para cada uno de los resultados es:

$$x_1=\frac{-7+1}{12}=\frac{-6}{12}=\frac{-1}{2} \quad x_2=\frac{-7-1}{12}=\frac{-8}{12}=\frac{-2}{3} \quad x_1=\frac{-1}{2} \ \text{y} \ x_2=\frac{-2}{3}$$

Resuelve la ecuación $x^2+15x+56=0$ mediante la el método de la fórmula general.

En principio, identificamos los coeficientes de la ecuación: $a=1, b=15, c=56$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general:

$x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{15^2-4(1)(56)}}{2(1)}$ desarrollando: $x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{225-224}}{2}$

$x_{1,2}=\dfrac{-15\pm\sqrt{1}}{2}$ que de forma respectiva para cada valor no da:

$x_1=\dfrac{-15+1}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7 \quad x_2=\dfrac{-15-1}{2}=\dfrac{-16}{2}=-8$

Los valores por ende serán: $x_1=-7, x_2=-8$.

La comprobación de estos valores puede hacerse rápidamente con la simple sustitución de cada uno de los valores encontrados en la ecuación original. Así, para el primer valor:

$x^2+15x+56=0$, sustituyendo: $(-7)^2+15(-7)+56=0$, desarrollando: $49-105+56=0$, finalmente: $105-105=0$, lo cual demuestra que el valor es correcto.

Para el segundo valor:

$x^2+15x+56=0$, sustituyendo: $(-8)^2+15(-8)+56=0$, desarrollando: $64-120+56=0$, finalmente: $120-120=0$ que también demuestra que este segundo valor es correcto.

Para practicar:

En parejas encuentra las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

1.- $x^2+15=8x$

2.- $x^2=x+6$

3.- $x^2+6x=-8$

4.- $x^2-2x-15=0$

5.- $4x^2-20x+25=0$

6.- $6x^2+13x-5=0$

7.- $5y^2-2y-3=0$

8.- $x^2-6x+2=0$

9.- $4x^2=-4x-17$

10.- $w^2-5w=0$

Método del uso del discriminante de la fórmula general

El discriminante nos permite conocer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática. Considerando la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, siendo a,b,c coeficientes reales, el discriminante[22] de dicha ecuación es: b^2-4ac, que como puede observarse es el valor del radical de la fórmula general.

Procedimiento para el cálculo del discriminante y su significado

Sin resolver la ecuación al evaluar el discriminante podemos ver[23] que podemos tener tres diferentes situaciones en el resultado de este discriminante:,

Sí $b^2-4ac=0$, en este caso el resultado serán dos raíces reales e iguales.

Si $b^2-4ac>0$ las raíces son reales pero diferentes.

Y por último, $b^2-4ac<0$ las raíces son imaginarias.

Utilizando el valor del discriminante investigaremos si las raíces son iguales, diferentes, reales o imaginarias, considerando la ecuación cuadrática:

$$y^2+11y+24=0$$

Encontrando los valores numéricos de los coeficientes: $a=1$, $b=11$ y $c=24$ podemos plantear al discriminante como: b^2-4ac . Sustituyendo los valores tendremos:

$1^2-4(1)(24)=1-96=-95$

Como el valor -95<0, las raíces son imaginarias y diferentes. Este resultado no es el valor de las raíces, pero nos indica que si realizamos el cálculo completo de cada raíz, su resultado no será posible de definir al menos como un número real.

Utilizando el valor del discriminante investigaremos si las raíces serán iguales, diferentes, reales o imaginarias, considerando la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 8x - 16 = 0$$

Si definimos los valores de a=1, b=8, c=-16, el discriminante sería $8^2 - 4(1)(-16) = 64 + 64 = 128$ Como 128>0, las raíces de la ecuación son reales y diferentes.

Considerando el discriminante, cómo son las raíces de la siguiente ecuación:

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

Definiendo el valor de los coeficientes numéricos como: a=1, b=8, c=16, el valor del discriminante será: $8^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$. Como 0=0, las raíces son reales e iguales. Por último, cabe señalar que el discriminante puede además definir el resultado en el cálculo de la ecuación cuadrática. Así el resultado del discriminante es un Cuadrado Perfecto mayor que cero, las raíces serán números racionales y diferentes y por último si el discriminante es positivo y no tiene la forma de un cuadrado perfecto, el resultado serán dos números irracionales y diferentes.

Para practicar:

En equipos de 4, determinar el tipo de solución que se obtendrá en cada ecuación calculando el discriminante.

1.- $x^2 - 8x + 12 = 0$

2.- $x^2 + 6x + 16 = 0$

3.4. Problemario

I. Para cada una de las siguientes ecuaciones, verificar si el valor sugerido es correcto o incorrecto, comprobarlo haciendo la sustitución.

1. $x+2=6 \quad , \quad x=2$
2. $2x=6 \quad , \quad x=\frac{1}{3}$
3. $22+3y=y \quad , \quad y=-11$
4. $15x+2x=10 \quad , \quad x=\frac{10}{7}$
5. $x+2=30x \quad , \quad x=7$
6. $8=99x-3 \quad , \quad x=1/9$
7. $x2+5x-6x=99 \quad , \quad x=-99$
8. $\frac{3}{4}x+12=-6 \quad , \quad x=-24$
9. $9x+9=\frac{8}{3} \quad , \quad x=\frac{-19}{27}$
10. $62x=\frac{3}{2}x-55 \quad , \quad x=-\frac{10}{11}$
11. $\frac{2x}{\frac{3}{65}}+28=4x \quad , \quad x=-\frac{40}{60},$
12. $\frac{2x}{6}+\frac{x}{2}8+9=4x-6 \quad , \quad x=-45$
13. $\frac{2x-18}{\frac{3}{65}}=4x-8 \quad , \quad x=\frac{3}{5}$
14. $\frac{8-12}{12}=\frac{x}{8-x} \quad , \quad x=4$
15. $\frac{2x}{\frac{8}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{2}=4x \quad , \quad x=-\frac{2}{91}$

II. Para cada una de las siguientes igualdades, calcular el valor de la incógnita y comprobar con el valor encontrado.

1. $y+1=6-3y$
2. $2+1=9y$
3. $13y=19+4$
4. $1y+1=\frac{4}{3}$
5. $9=2-31y$
6. $\frac{14}{3}+y=y$
7. $3y=\frac{2y-1}{6}$
8. $\frac{15-33}{99}=y$
9. $\frac{y+1}{2}=\frac{6-3y}{9}$
10. $\frac{15-33}{99}=\frac{3}{5}y$
11. $13=\left(\frac{6-3y}{9}\right)+(44y)$
12. $(13y-15)89=\left(\frac{\frac{14}{3}-y}{7}\right)+(12)$
13. $(y-1-354y)4=(2y)+(6y)$
14. $\left(\frac{13y-15}{24}\right)=\left(\frac{12y}{145y}\right)12$
15. $(13y-15)89=\left(\frac{\frac{14}{3}-y}{7}\right)+(12)$

Para los siguientes sistemas de ecuaciones, encontrar los valores de x y y de acuerdo con el método indicado.

III. Método de suma y resta (reducción)

1. $\begin{cases} 3x+6y=6 \\ 10x+3y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-8y=6 \\ 1x+2y=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 10x+6=2 \\ 4x+5y=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} +10x-50y=25 \\ 33x+12y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{3}{5}x+8y=9 \\ 14x+8y=21 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\dfrac{14}{3}x-14\dfrac{2}{3}y=4 \\ x-6y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} 10x+3y=-3 \\ -10x+4y=6 \end{cases}$

IV. Método de sustitución:

1. $\begin{cases} y=1 \\ 4x+y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+10y=7 \\ 9x+13y=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+8y=35 \\ -258x+589y=100 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-50y=6 \\ -14x+y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2}{5}x+3y=4 \\ -11x+9y=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -\dfrac{21}{4}-2567y=0 \\ +9x-9y=9 \end{cases}$

V. Método de igualación:

1. $\begin{cases} 10x+8y=3 \\ -10x-8y=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x-3y=2 \\ 4x+6y=9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ -3x+9y=-10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3y+8x=10 \\ +3x+4y=44 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 14x+10y=4 \\ -1\dfrac{1}{4}x+0y=23 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+6y=13 \\ +9x+10y=4 \end{cases}$

VI. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de eliminación

1. $\begin{cases} x+2y-2z=15 \\ 4x-y+3z=-5 \\ x+2y-z=14 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x+3y-2z=4 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2x+5y+3z=31 \\ x-y+z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y+3z=8 \\ 3x+2y-z=-10 \\ x+3y+z=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y-4z=8 \\ x-2y+3z=2 \\ -3x+y-z=-8 \end{cases}$

Calcular el determinante de las siguientes matrices:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} p & -q \\ q & p \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 43 \\ 2 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & \frac{4}{5} \\ 0.2 & 7 & 4 \\ \frac{6}{5} & 9 & -10 \end{vmatrix}$

VIII. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de determinantes:

1. $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = -9 \\ y + z = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 2y - z = 24 \\ y + z = 5 \\ 2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 4 + 1z = 11 \\ x + 3y - 1z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - 1y + 3z = 1 \\ -4x + 3y - 5z = -9 \\ 5x - 2z = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x - 4y + z = 0 \\ -8x + 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x + 21y - 0.45z = 13 \\ 6x + 4/3\, y - z = -9 \\ \frac{1}{2}x + 10y - 99z = 0 \end{cases}$

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas de acuerdo al método sugerido:

IX. Por factorización

1. $x^2 - 11x + 30 = 0$

2. $x^2 - x - 6 = 0$

3. $x^2 + x - 12 = 0$

4. $x^2 - 2x - 3 = 0$

5. $x^2 - x - 20 = 0$

X. Completando el trinomio cuadrado perfecto

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$
2. $x^2 + 6x - 7 = 0$
3. $x^2 + 10x + 9 = 0$
4. $2x^2 + 5x - 12 = 0$
5. $8x^2 - 2x - 3 = 0$

XI. Utilizando la Fórmula General

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $-x^2 + 7x - 10 = 0$
3. $2x^2 - 14x + 24 = 0$
4. $7x^2 + 21x - 28 = 0$
5. $2x^2 - 7x + 3 = 0$
6. $10x^2 - 6x + 8 = 0$
7. $x^2 + 6x + 18 = 0$

XII. Calcula el valor del discriminante y determina si las raíces de la ecuación cuadrática son reales diferentes o iguales, o imaginarias diferentes:

1. $x^2 - 11x + 30 = 0$
2. $x^2 - 3x + 2 = 0$

3. $x^2 - 2x - 63 = 0$

4. $4x^2 + 8x + 4 = 0$

5. $3x^2 + x + 4 = 0$

3.5. Autoevaluación

Resuelve los siguientes problemas aplicando ecuaciones de primer grado con una y dos variables según corresponda:

1. ¿Cuál es el número que multiplicado por dos es cuatro unidades menos que 3 veces 6?

2. Un número excede a otro en 5 y su suma es 29. ¿Cuáles números son?

3. Encontrar tres números consecutivos cuya suma sea 84.

4. Pedro y Cecilia tienen entre los dos 57 láminas y Cecilia tiene 11 más que Pedro, ¿cuántas láminas tiene cada uno?

5. La suma de tres números es 200. El mayor excede al de en medio en 32 y al menor en 65. Determina los números.

Resuelve los siguientes problemas aplicando los sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas y utiliza cualquiera de los métodos vistos.

6. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de $500 (sin impuestos). El valor del vino es $60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, la cerveza del 12% y el vino el 30%. La factura total con impuestos es de $592.40, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida. Considerar:

x = Importe en \$ de los refrescos, x =\$120

y = Importe en \$ de la cerveza, y =\$160

z = Importe en \$ del vino, z =\$220

7. La edad de un padre es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos, hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era el triple que la suma de las edades, de sus hijos en ese tiempo. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de las edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento que nacieron sus hijos?. Considerar:

x = Edad actual del padre

y = Edad actual del hijo mayor

z = Edad actual del hijo menor

Resuelve problemas teórico-prácticos aplicando ecuaciones cuadráticas

8. La suma de dos números es 18 y la de sus cuadrados es 180. ¿Cuáles son los números?

9. En "t" segundos la altura "h" dada en metros sobre el nivel del suelo de un proyectil está dada por la ecuación $h = 80t - 5t^2$, ¿Cuánto tardará el proyectil en tener una altura de 520m sobre el nivel del suelo?

10. Determina las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 280m y su área es de 4000m^2.

3.6. Soluciones del problemario

I.

1. $x + 2 = 6$, $x = 2$. Correcta.

2. $2x=6$, $x=\frac{1}{3}$ Incorrecta, correcta: x=3

3. $22+3y=y$, $y=-11$Correcta.

4. $15x+2x=10$, $x=\frac{10}{7}$. Correcta

5. $x+2=30x$, $x=7$ Incorrecta, correcta: x=2/29

6. $8=99x-3$, $x=1/9$ Correcta

7. $x2+5x-6x=99$, $x=-99$ Incorrecta, x=99

8. $\frac{3}{4}x+12=-6$, $x=-24$ Correcta.

9. $9x+9=\frac{8}{3}$, $x=\frac{-19}{27}$ Correcta.

10. $62x=\frac{3}{2}x-55$, $x=-\frac{10}{11}$ Correcta.

11. $\frac{\frac{2x}{3}}{65}+28=4x$, $x=-\frac{40}{60}$ Incorrecta, correcta: x=–42/59

12. $\frac{2x}{6}+\frac{x}{2}8+9=4x-6$, $x=-45$ Correcta

13. $\frac{\frac{2x-18}{3}}{65}=4x-8$, $x=\frac{3}{5}$ Correcta

14. $\frac{8-12}{12}=\frac{x}{8-x}$, $x=4$ Incorrecta, correcta: x=-4

15. $\frac{\frac{2x}{8}}{3}+\frac{\frac{1}{7}}{2}=4x$, $x=-\frac{2}{91}$ Incorrecta, correcta: x=2/91

II.

1. $y=\frac{5}{4}$

2. $y = \frac{1}{3}$

3. $y = \frac{23}{13}$

4. $y = \frac{1}{3}$

5. $y = -\frac{7}{31}$

6. Sin solución

7. $y = \frac{1}{16}$

8. $y = \frac{4}{33}$

9. $y = \frac{1}{5}$

10. $y = -\frac{10}{33}$

11. $y = \frac{37}{131}$

12. $y = \frac{28301}{24300}$

13. $y = -\frac{1}{355}$

14. $y = \frac{5631}{1885}$

15. $y = \frac{28301}{24300}$

III.

1. $x=-\frac{2}{17}, y=\frac{18}{17}$

2. $x=2, y=0$

3. $x=-\frac{2}{5}, y=\frac{58}{25}$

4. $x=\frac{65}{177}, y=-\frac{151}{354}$

5. $x=\frac{60}{67}, y=\frac{567}{536}$

6. $x=-\frac{47}{84}, y=-\frac{25}{168}$

7. $x=-\frac{3}{7}, y=\frac{3}{7}$

IV.

1. $x=1, y=1$

2. $x=-\frac{51}{38}, y=\frac{47}{38}$

3. $x=\frac{6605}{1277}, y=\frac{3110}{1277}$

4. $x=-\frac{356}{699}, y=-\frac{91}{699}$

5. $x=\frac{50}{61}, y=\frac{224}{183}$

6. $x=\frac{10247}{10268}, y=\frac{-21}{10268}$

V.

1. Sin solución.

2. $x=\frac{13}{24}, y=\frac{41}{36}$

3. $x=\frac{2}{3}, y=-\frac{8}{9}$

4. $x = 26, y = -\frac{17}{2}$

5. $x = 92, y = -\frac{642}{5}$

6. $x = -\frac{53}{7}, y = \frac{101}{14}$

VI.

1. $x = 1, \quad y = 6, \quad z = -1$

2. $x = 2, \quad y = 2, \quad z = 2$

3. $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 5$

4. $x = -5, \quad y = 4, \quad z = 3$

5. $x = \frac{13}{5}, \quad y = -\frac{6}{5}, \quad z = -1$

VII.

1. 2

2. $p^2 + q^2$

3. 172

4. -273

5. -175

6. 320

7. $\frac{5678}{25}$

VIII.

1. $x = 2, \quad y = 1, \quad z = 7$

2. $x=\frac{88}{19}, \quad y=\frac{37}{19}, \quad z=\frac{58}{19}$

3. $x=\frac{3}{2}, \quad y=\frac{7}{6} \quad z=4$

4. $x=\frac{1}{6}, \quad y=-\frac{65}{12}, \quad z=-\frac{19}{12}$

5. Sin solución

6. $x=-\frac{202565}{119488}$; $-1.69 \quad y=\frac{451099}{477952}$; $.94 \quad z=\frac{31105}{358464}$; $.086$

IX.

1. $x_1=5, x_2=6$

2. $x_1=-2, x_2=3$

3. $x_1=-4, x_2=3$

4. $x_1=-1, x_2=3$

5. $x_1-4, x_2=5$

X.

1. $x_1=-3, x_2=-1$

2. $x_1=-7, x_2=1$

3. $x_1=-9, x_2=-1$

4. $x_1=-4, x_2=\frac{3}{2}$

5. $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{4}$

XI.

1. $x_1 = 2, x_2 = 3$
2. $x_1 = 2, x_2 = 5$
3. $x_1 = 3, x_2 = 4$
4. $x_1 = -4, x_2 = 1$
5. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$
6. Sin solución
7. Sin solución

XII.

1. Reales, desiguales.
2. Reales, desiguales.
3. Reales, desiguales.
4. Reales, iguales.
5. Imaginarias, desiguales

3.7. Soluciones de la autoevaluación

Respuestas a la Autoevalución.

1. Al plantear el número planteado como "a", entonces:

$a \times 2$ será el numero cualquiera multiplicado por dos. Por otro lado,

$3(6)-4$ será "cuatro unidades menos que tres veces seis", por lo tanto:

$a \times 2 = 3(6)-4$ será la igualdad que se plantea en el problema. Por tanto, resolviendo para la incógnita "a":

$$a = \frac{3(6)-4}{2} = \frac{18-4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Por tanto, la respuesta es 7

2. Un número excede a otro en 5 y su suma es 29. ¿Cuáles son?

Podemos plantear al primer número como "y", así el segundo número que lo excede en 5 sería: y +5. Así la suma de los dos números sería:

$(y)+(y+1)$

Y como la suma de ambos es 29, tendríamos entonces:

$(y)+(y+1)=29$ Realizando los desarrollos correspondientes tendríamos:

$y+y+1=29$

$2y=29-1$

$2y=28$,

$y=\frac{28}{2}=14$. Por lo tanto el primer número sería 14 y el segundo 15.

3. Si se propone un primer número como "n", el segundo consecutivo sería:

$n+1$. Consecutivamente tendríamos:

$n+2$ como el tercer número consecutivo. La suma de los tres números consecutivos sería: $(n)+(n+1)+(n+2)$

Y dado que el problema menciona que la suma de tres consecutivos sería 84, entonces:

$(n)+(n+1)+(n+2)=84$ Desarrollando:

$3n+3=84$, despejando: $3n=84-3$; $3n=81$; $n=\frac{81}{3}=27$

Por lo tanto, el primer número será 27, el segundo 27+1=28 y el tercero 27+2 que es 29.

4. Si llamamos "p" al numero de laminas que tiene Pedro y "c" al número que corresponde a las láminas de Cecilia, tendremos para la primer condición:

$p+c=57$

Para la segunda condición, que afirma que Cecilia tiene 11 más que Pedro:

$c=p+11$

De esta manera, tendremos dos ecuaciones, sustituyendo la segunda en la primera:

$p+(p+11)=57$, desarrollando: $2p+11=57$; despejando: $2p=57-11=46$, o sea:

$p=\frac{46}{2}=23$ que es el número de láminas que tiene Pedro. Para calcular el número de láminas que tiene Cecilia, retomamos la segunda ecuación $c=p+11$, y sustituimos el valor encontrado para Pedro (23). Así:

$c=p+11=(23)+11=34$ que será el número de láminas que corresponde a Cecilia.

5. Considerando al número mayor como "x", podemos entonces podemos declara que de acuerdo a la definición del numero "de en medio", este podría ser: $x-32$. De la misma manera, el numero menor sería: $x-65$. Por lo tanto, la

suma de los tres números por un lado será 200 y por el otro la suma de las cantidades antes definidas:

$(x)+(x-32)+(x-65)=200$

De esta forma, quitando los paréntesis: $x+x-32+x-65=200$,

Agrupando términos semejantes: $3x-97=200$

Despejando: $3x=200+97$, y por último para despejar el 3 y dejar la "x" sola:

$$x=\frac{297}{3}=99$$

Éste será el valor del término mayor; el término "de en medio "será

Y el valor más pequeño será: $x-65=99-65=34$

7. Un primer planteamiento será el que corresponde al importe total de las bebidas, o sea, la suma de lo que se paga por los refrescos, la cerveza y el vino y que suma $500, o sea: $x+y+z=500$

Por otro lado, de acuerdo a la condición de que "el valor del vino es 60 $ menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente", tendremos que: . $z=x+y-60$, pero para que esta ecuación tenga la forma adecuada para el planteamiento de un sistema de ecuaciones, despejamos de forma que: $x+y-z=60$

Y por último, de acuerdo a la condición de que "los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4", podemos decir que el 6% del pago del IVA para los refrescos puede representarse como $(6\%)(x)=(.06)x=\left(\frac{6}{100}\right)x$; de igual forma para la cerveza $(12\%)(y)=(.12)y=\left(\frac{12}{100}\right)y$ así como para el vino: $(30\%)(z)=(.30)z=\left(\frac{30}{100}\right)z$. Des esta manera, la ecuación que representaría los pagos del IVA para cada bebida junto con el total sería:

$(.06)(x)+(.12)y+(.3)z=592.4$ Si multiplicamos por 100 ambos lados de la igualdad para manejar cantidades enteras tendremos:

$6x+12y+30z=59240$

De esta manera, tendremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ x+y-z=60 \\ 6x+12y+30z=59240 \end{cases}$$

Las soluciones al sistema serían: $x=-\dfrac{24640}{3}$, $y=\dfrac{25480}{3}$, $z=220$, que sería lo que tendría que pagar por los refrescos, la cerveza y el vino respectivamente.

8. Considerando como lo sugiere el problema, la edad del padre como "x", la edad del hijo mayor como "y" y la del hijo menor como "z", entonces una primer planteamiento que podemos hacer de acuerdo a la afirmación: "La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos" es:

$x=2(y+z)$, que sería la relación en este momento entre el padre y los hijos.

Un acomodo de esta ecuación para poder plantearla en un sistema de ecauciones sería: $x-2y-2z=0$

Por otro lado, de acuerdo a la afirmación "mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos), la edad del padre era triple que la suma de las edades, en aquel tiempo, de sus hijos.", podemos primero definir "la diferencia de las edades actuales de los hijos como: $(y-z)$. "La suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos" de acuerdo a la diferencia anterior sería: $y-(y-z)$ la primer edad & $z-(y-z)$ como la segunda edad; por tanto, el triple sería: $3\left[y-(y-z)+z-(y-z)\right]$.

Finalmente para este apartado, transportarnos a ese momento de "hace unos años", sería la diferencia de la edad actual del padre con la diferencia de edades entre el hijo mayor y el menor, o sea: $x-(y-z)$. De esta forma, este enunciado puede representarse (para hace y-z años) como:

$x-(y-z)=3\left[y-(y-z)+z-(y-z)\right]$

Que acomodada como ecuación para plantearse dentro de un sistema de ecuaciones:

$x-y+z=3[y-y+z+z-y+z]$

$x-y+z=3[+3z-y]$

$x-y+z=-3y+9z$

$x+2y-8z=0$

Por último, para la última afirmación del problema que dice: "cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años", tendremos que en principio la suma de las edades actuales de los hijos será $y+z$, o sea: debemos de "transportarnos" a ese tiempo. De esta forma, la afirmación "la suma de las edades de las tres personas" puede representarse como:

$x+(y+z)$ para la edad de la primer persona dentro de "y+z" años,

$y+(y+z)$ para la edad de la segunda persona dentro de "y+z" años y

$z+(y+z)$ para la edad de la tercer persona dentro de "y+z" años.

Así, la suma de las tres edades después de *"y+z"* años será:

$x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z)$

Y como la suma para este caso se dice es 150:

$x+(y+z)+y+(y+z)+z+(y+z)=150$. Así que para que esta última ecuación nos sea más fácil de introducir a un sistema de ecuaciones la manipulamos, primero quitando los paréntesis:

$x+y+z+y+y+z+z+y+z=150$, agrupando términos semejantes:

$x+4y+4z=150$

Finalmente, podemos representar y agrupar las tres ecuaciones encontradas en un sistema de la forma:

$$\begin{cases} x-2y-2z=0 \\ x+2y-8z=0 \\ x+4y+4z=150 \end{cases}$$

Que resuelto con cualquiera de los métodos vistos nos dará una solución: $x=50,\quad y=15,\quad z=10$ que serían las edades actuales del padre, del hijo mayor y del hijo menor respectivamente.

9. De acuerdo a la ecuación planteada, podemos sustituir la altura que se plantea, de manera que tendríamos ahora: $520=80t-5t^2$

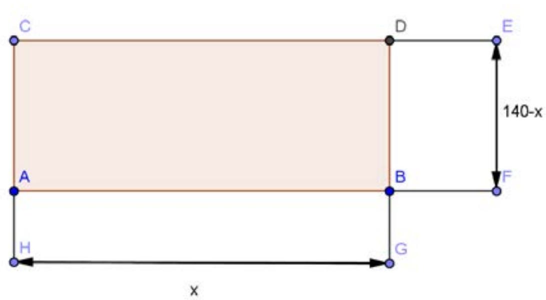
La anterior ecuación no puede resolverse por los métodos vistos sino hasta que esté igualada a cero, o sea que de la ecuación anterior podemos plantarla de forma:

$5t^2-80t-520=0$

Por cualquiera de los métodos vistos, particularmente por el más directo que es el de la fórmula general podemos calcular los valores: $t_1=-4.96,\quad t_2=20.96$

Como no es posible considerar una cantidad negativa, el resultado será 20.96

10. El problema puede plantearse con ayuda de una figura:



Como puede observarse, el área del rectángulo será el producto de la base por su altura, de manera que:

$A=(x)(140-x)$

Como se conoce por el texto el valor de su área como 4000 metros cuadrados, se puede sustituir el valor numérico en el planteamiento dado:

$4000=(x)(140-x)$, desarrollando el producto:

$4000=140x-x^2$, despejando el valor de 4000 para plantear la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$, tendremos: $x^2-140x+4000=0$

La solución para esta ecuación puede realizarse por medio de una factorización:

$x^2-140x+4000=(x-40)(x-100)$, por lo que podemos plantear que:

$(x-40)(x-100)=0$, lo que nos lleva a dos planteamientos:

$(x-40)=0$ y $(x-100)=0$. Para el primer planteamiento, tendremos que x=40 y para el segundo x=100.

Si consideramos el primer valor (x=40), eso nos daría que los lados medirían 40 y 100 metros respectivamente; si multiplicamos estos valores para calcular su área, esto nos da el valor de 4000 metros cuadrados. Se puede descartar el valor de 100, aún sin haber realizado las operaciones respectivas.

3.8. Conclusiones

Las manipulaciones numéricas que se han realizado por parte de la humanidad a lo largo de su historia han venido desarrollando reglas para hacer esas manipulaciones de forma eficiente. Dichas reglas se han formalizado mediante propiedades y postulados de la igualdad entre los números reales. De hecho, utilizamos casi sin notarlo muchos de estos postulado en nuestras operaciones aritméticas diarias. Así, realizar sumas y restas entre otras de las operaciones, nos llevan a generalizar propiedades numéricas incluso en aplicaciones concretas de la generalización de estas propiedades en lo que hemos llamado álgebra; pero el álgebra no es solo la manipulación de símbolos que lleguen a tener significados, sino que estos símbolos cuando tienen relación entre ellos, además de significado, aplicaciones en gran parte de nuestra vida diaria. La manipulación de expresiones y ecuaciones algebraicas vistas en este apartado son un principio para un maravilloso futuro de análisis de funciones. Hasta ahora vistas y tratadas como ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas y ecuaciones de primero y segundo grados, las aplicaciones de las mismas se asoman al final con algunos ejemplos y seguramente nos llevarán a interpretaciones de fenómenos diarios en donde hemos comenzado a ver a las matemáticas y sus aplicaciones como una herramienta de aplicaciones directas y prácticas. El futuro en nuestros estudios de las matemáticas es no solo prometedor, sino además maravilloso.

Referencias

[1] Tomado de © Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Vicerrectoría de Investigación y Desarrollo, Prepanet | México, 2006 Recuperado el 17 de junio de 2013 http://www.cca.org.mx/prepanet/cursos/ene06/pm1007l/contenido/mod_3/conte/conte08.htm

[2] Wussing Hans (**1998**) *Lecciones de historia de las matemáticas.* España. Siglo XXI de España: Recuperada el 26 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=IG3_b5Xm8PMC&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[3] Sullivan Michael (**1998**) *Precálculo*. Pearson Educación. Recuperada el 26 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=tfBhhHF1FXkC&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[4] Poole David (**2007**) *Álgebra lineal: una introducción moderna.* México. Cengage Learning: Recuperada el 26 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=fAPctkEifCMC&dq=origen+de+sistemas+de+ecuaciones+lineales&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[5] Baldor Aurelio.(2009) *Álgebra*México: Grupo Editorial Patria
Consultado el 26 de julio 2011

[6] Zamora, M, Salvador. Et al (**2007**) *Matemáticas 1*. México. St Editorial .Recuperada el 27 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=jomJPQAACAAJ&dq=salvador+zamora+mu%C3%B1oz&hl=es&ei=_8owTtS_EbLisQLI0bX-Cg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCgQ6AEwAA

[7] Prado, P. Carlos Daniel. Et al. (**2006**)*Precálculo*. México. Pearson Educación: Recuperada el 27 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=jW9qHZKJooQC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[8] Ruíz Ángel ( ) *Historia Y Filosofía de Las Matemáticas*. Euned: Recuperada el 28 de Julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=Q7gc9S63WDYC&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false

[9] Fernández C. Horacio. Et al. (**2005**)*Matemáticas previas al cálculo*. Colombia. Universidad de Medellin: Recuperada el 1 de agosto de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=VfKMGiAftL4C&pg=PA113&dq=determinantes,matematicas&hl=es&ei=hOk2TvXqEYrKiALw3oS6CA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CE4Q6AEwBzgK#v=onepage&q&f=false

[10] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa. Recuperado 28 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=TyRUwQ4pKLMC&pg=PA329&dq=Definici%C3%B3n+de+funci%C3%B3n+y+ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=IsYyTuHrDobnsQLAzMifCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CEoQ6AEwBw#v=onepage&q&f=false

[11] Jiménez, José de J.,et. **(2006)** Matemáticas 1 SEP. México. Umbral. Recuperado 28 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=n-Ebosd6UZEC&pg=PA152&dq=ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=n8kyTv3QN5HEsQLAjoGmCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4&ved=0CDsQ6AEwAw#v=onepage&q=ecuaci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica&f=false

[12] Jiménez, José de J.,et al. **(2005)** Matemáticas 2 álgebra. México. Umbral. Recuperado 28 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=Huda0lHQYvkC&pg=PA87&dq=ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=2MwyTrS5F6qGsgKi0tXqCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CEgQ6AEwBTge#v=onepage&q=ecuaci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica&f=false

[13] Camargo, Leonor.,et al. **(2005)**Alfa 8 con estándares, serie de matemáticas para educación secundaria y media.México. Norma. Recuperado 28 de julio de 20011, de http://books.google.com.mx/books?id=GQBuGGQy-SMC&pg=PT131&dq=en+que+siglo+se+estudian+las++ecuaciones+cuadraticas&hl=es&ei=e5cxTofIG-GtsALSs6mlCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCsQ6AEwADgK#v=snippet&q=ecuaci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica&f=false

[14] Estrada,William F., et al.**(2005)** Espiral 9.México.Norma. Recuperado 28 de julio de 20011,dehttp://books.google.com.mx/books?id=usLmD8-TLgYC&pg=PT144&dq=en+que+siglo+se+estudian+las++ecuaciones+cuadraticas&hl=es&ei=e5cxTofIG-GtsALSs6mlCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=3&ved=0CDYQ6AEwAjgK#v=onepage&q&f=false

[15] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa. Recuperado 28 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=TyRUwQ4pKLMC&pg=PA329&dq=Definici%C3%B3n+de+funci%C3%B3n+y+ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=IsYyTuHrDobnsQLAzMifCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CEoQ6AEwBw#v=onepage&q&f=false

[16]Peter, Max,et al. **(2007)** Álgebra y trigonometría. España. Reverte. Recuperado 29 de julio de 2011,dehttp://books.google.com.mx/books?id=R4B4yGIlU0MC&pg=PA214&dq=M%C3%A9todos+de+soluci%C3%B3n+de+una+ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica+en+una+variable&hl=es&cd=5#v=onepage&q&f=false

[17] Gustafson, David R. ( ) Álgebra intermedia. México. Thomson.   Recuperado 29 de julio de 2011,dehttp://books.google.com.mx/books?id=S3S--2pULbgC&pg=PA323&dq=ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica+por+factorizaci%C3%B3n&hl=es&cd=4#v=onepage&q=ecuaci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica%20por%20factorizaci%C3%B3n&f=false

[18] Jiménez, José de J. **(2007)** Guía Piense II. México. Umbral . Recuperado 28 de julio de 2011,dehttp://books.google.com.mx/books?id=wQ0DEYyVMyEC&pg=PA74&dq=completando+un+trinomio+cuadrado+perfecto&hl=es&ei=djg2TpXXF6vZiALKk6TECA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=3&ved=0CC8Q6AEwAjgU#v=onepage&q&f=false

[19] Ibáñez, Patricia C.,et al. **(2006)** Matemáticas I. México. Cengage Learning. Recuperado 29 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=dtFaCmRyO94C&pg=RA3-PA19&dq=factorizaci%C3%B3n+ecuaci%C3%B3n+cuadratica+incompleta+pura&hl=es&ei=W542TrH2IoiosQLmj62dCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CEQQ6AEwBA#v=onepage&q&f=false

[20] Smith, Satanley A., et al. (2001) . Álgebra. México. Person. Recuperado 29 de julio de 2011,de http://books.google.com.mx/books?id=MA0VU1AjOqgC&pg=PA280&dq=trinomio+cuadrado+perfecto&hl=es&ei=qaU2TqXcI9DYiALNhd3DCA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CC0Q6AEwAQ#v=onepage&q=trinomio%20cuadrado%20perfecto&f=false

[21] Palmer, Claude. **(2003)** Matemáticas prácticas. Espeña.Reverte. Recuperado 29 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=svzuB4pZKjkC&pg=PA245&dq=completando+un+trinomio+cuadrado+perfecto&hl=es&ei=Qjc2Tr3xGorkiAKk7oSwCA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CD0Q6AEwBA#v=onepage&q=f%C3%B3rmula%20general&f=false

[22] Reyes, Araceli G. . ( ) Álgebra superior. México. Thomson. Recuperado 29 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=ZF-Qsqy10TkC&pg=PA131&dq=discriminante+en+la+ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=X7k2Tt6CEsbfiAK24426CA&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=0CD4Q6AEwBA#v=onepage&q=discriminante%20en%20la%20ecuaci%C3%B3n%20cuadr%C3%A1tica&f=false

[23] Silva, Juan M. **(2003)** Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México. Limusa. Recuperado 29 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=TyRUwQ4pKLMC&pg=PA329&dq=Definici%C3%B3n+de+funci%C3%B3n+y+ecuaci%C3%B3n+cuadr%C3%A1tica&hl=es&ei=IsYyTuHrDobnsQLAzMifCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=8&ved=0CEoQ6AEwBw#v=onepage&q=discriminante&f=false