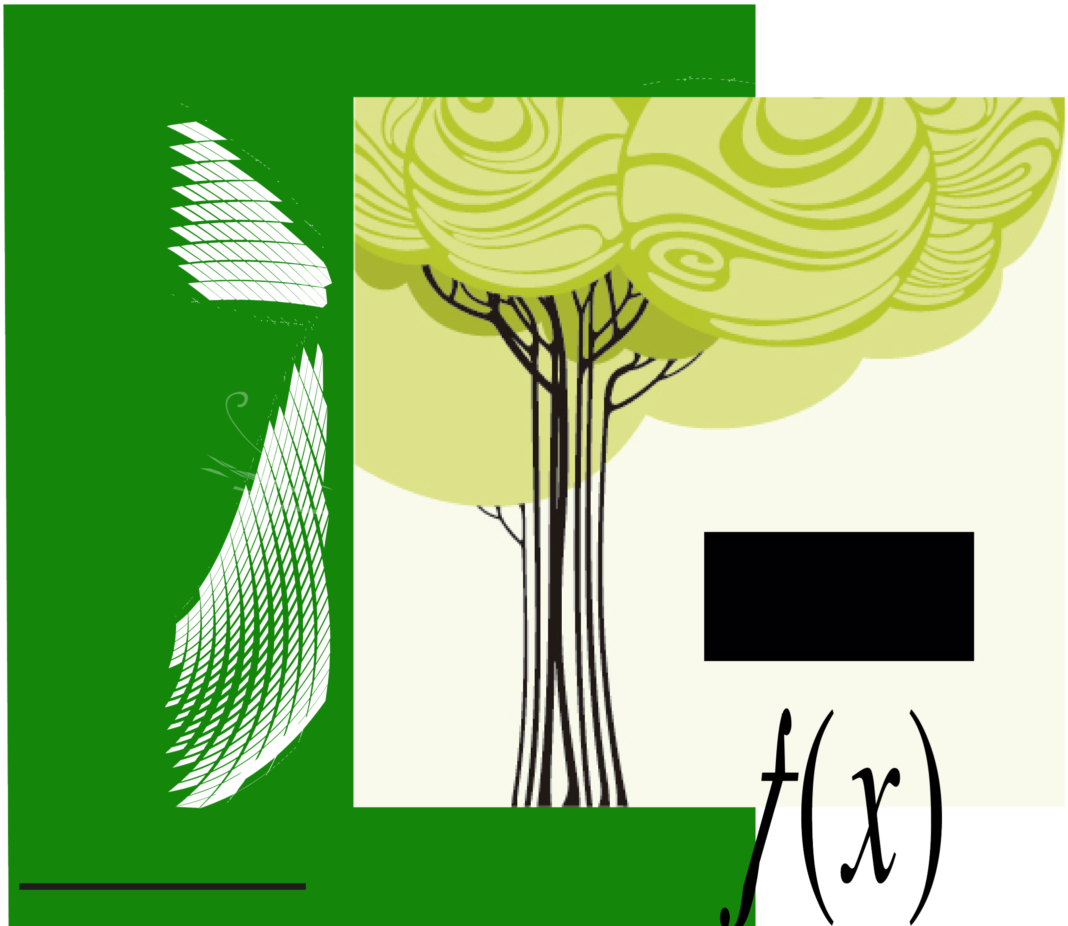
Representación gráfica de funciones



Silvia Ochoa Hernández
Marisol Rodríguez Núñez

Semestre 3

conalep Michoacán

PRESENTA:

Representación gráfica de funciones

Autores:

Silvia Ochoa Hernández
Marisol Rodríguez Núñez

Título original de la obra:

Registro: **CONALEP-GRAFX -1E**

Programa: Profesor escritor. Desarrollo de la competencia de la producción de información literaria y lectura.

Esta obra fue publicada originalmente en Internet bajo la categoría de contenido abierto sobre la URL: http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/ mismo título y versión de contenido digital. Este es un trabajo de autoría publicado sobre Internet Copyright © 2014 por CONALEP Michoacán y CIE, protegido por las leyes de derechos de propiedad de los Estados Unidos Mexicanos. No puede ser reproducido, copiado, publicado, prestado a otras personas o entidades sin el permiso explícito por escrito del CONALEP/CIE o por los Autores.

Ochoa, H. Silvia ; *et al.* (2014) **Representación gráfica de funciones.** México: CONALEP/CIE

xii, 315 p.; carta

Registro: **CONALEP-GRAFX -1E** Documentos en línea

Editores:

Ing. Eduardo Ochoa Hernández

Lic. Filho Enrique Borjas García

Editorial: CONALEP Michoacán

Col. Chapultepec norte, Gral. Nicolás Bravo No. 144, Morelia, Michoacán.

http://www.cie.umich.mx/conalepweb2013/

Registro: **CONALEP-GRAFX -1E**

ISBN: En trámite

Impreso en_______________________

Impreso en México –Printed in Mexico

DIRECTORIO

Dr. Salvador Jara Guerrero
Gobernador Constitucional del Estado de Michoacán

Dr. Armando Sepúlveda López
Secretario de Educación

Mtro. Álvaro Estrada Maldonado
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Ing. Fernando Castillo Ávila
Director de Educación Media Superior

M.A. Candita Victoria Gil Jiménez
Directora General del Sistema CONALEP

Lic. Daniel Trujillo Mesina
Titular de la Oficina de Servicios Federales en Apoyo a la Educación en Michoacán

Dr. Gerardo Tinoco Ruiz
Rector de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

L.E. Rogelio René Hernández Téllez
Director de Planeación, Programación y Presupuesto

Lic. Faradeh Velasco Rauda
Directora de Promoción y Vinculación

Ing. Mónica Leticia Zamudio Godínez
Directora de Informática

Lic. Víctor Manuel Gómez Delgado
Director de Servicios Administrativos

Ing. Genaro González Sánchez
Secretario General del SUTACONALEPMICH

Tec. Juan Pineda Calderón
Secretario General del SUTCONALEP

Prefacio

Estimado estudiante:

Las palabras que sombrean estas páginas, no son simple ciencia dentro del diálogo como depósitos de datos e información, ni son cuestión de vocabulario o listado de definiciones, son la experiencia generosa de la comunidad CONALEP Michoacán, esa realidad oculta pero necesaria que respaldó las tareas de investigación y composición literaria del discurso que integra este libro. Nos referimos a los profesores, administrativos y sindicatos que hoy convergen en el umbral de la existencia para apoyar a un grupo de profesores escritores que han creado en el sereno libre, arquitecturas de conocimientos como un viaje de aprendizaje que exigirá del estudiante, lo mejor de sí mismo ante la presencia luminosa del texto, ese que pretende enseñarle a caminar con la frente en alto.

Las ideas asociadas en este texto, equivalen a la imaginación lograda en el acto de escribir desde otros textos, al decodificarlas el estudiante, se le exige más vocabulario para enriquecer su habla y hacer ver a sus ojos más allá de la estrechez de la información que inunda a la sociedad moderna. El libro no presenta la superficie de la existencia como cruda observación, procura que su dificultad incite a perforar la realidad hasta reflexiones que renueven los modos inciertos de dar significado al mundo. La ciencia, la literatura y la tecnología no las percibimos como mundos incomunicables, los valores son explícitos caminos que las vinculan en torno al currículo del técnico bachiller. Tienen estos textos organización de premisas, técnicas, justificaciones, normas, criterios y como Usted se dará cuenta, también mostrará nuestros límites para seguir haciendo puentes entre las incesantes creaciones de nuevas fronteras de la investigación científica y técnica. Se pretende que estos libros sean contenido y no un libro de prácticas escolares, sean la herramienta de complementación para enriquecer los discursos de la enseñanza-aprendizaje.

Los profesores de CONALEP enfrentan a diario las carencias visibles de medios tecnológicos, materiales y documentales, sería fácil usar las palabras para señalar hasta el cansancio nuestras apremias, pero se ha decidido mejor producir libros como testimonios vivos y luminosos que renueven el rol social de la academia colegiada sensible a la condición social, susceptible de ir perfeccionándose con la acumulación de esta experiencia literaria, para servir de mejor manera al enriquecimiento de las competencias necesarias para realizar el sueño de éxito de tantos jóvenes Michoacanos.

Lic. José Arturo Villaseñor Gómez
Director General del CONALEP Michoacán

Mensaje a la comunidad académica

Con la colaboración docente, administrativa y sindical se realizó el esfuerzo de producir literatura de contenido en apoyo a la formación curricular en CONALEP Michoacán. El libro, esa experiencia de conocimiento se ha democratizado, ya no es un secreto o privilegio de unos cuantos, el texto virtual en la Web resolvió lo que la imprenta de Gutenberg no logró hacer, la auto publicación, la biblioteca virtual móvil, el libro electrónico y el texto digital; esto nos replantea migrar a una pedagogía interactiva con la experiencia del conocimiento. Desde luego que el libro clásico como dice Humberto Eco, nadie puede acabar con su poder en esta sociedad. Promover crear y leer literatura es enriquecer el vocabulario, el desarrollo intelectual, la agudeza de la creatividad y pintar la realidad con lo que nacemos libres: la imaginación.

El docente escritor, dirige el aprendizaje en función de la experiencia de reconstruir el conocimiento contemplado en el currículo. Se realiza el acto de pensar al escribir e investigar los modelos de conocimiento, ensayo, libro, tesis, reseña, síntesis, semblanza, resumen, análisis de texto, definición, argumento, razonamiento, hipótesis, patente, marco teórico, revisión, poema, novela, cuento, … entre otros, resuelven la necesidad de conocer, ser y aprender. El docente escritor escribe y publica su propuesta en el formato de libro, con ello, se abre a la crítica social y expone su calidad como marco ético de revaloración moral frente a su comunidad.

La escritura es más que gramática y semántica, es el acto de estructurar el pensamiento en un modelo de conocimiento, es volver a dar voz al profesor como producción de la libertad de cátedra, acto creativo original en el que encarna la soberanía de la sociedad como expresión cultural particular que habla desde su propio tiempo. Leer para crear es el acto sustantivo del novel. Escribir es una cierta reorganización del conocimiento previo en un acto de creación, donde la teoría literaria, los marcos normativos de estilo, la psicolingüística, la epistemología y la comunicación son los pilares de plataforma del aprendizaje centrado en el acto creativo.

Este libro fue escrito para compartir la felicidad de crear la presencia del docente en el texto. CONALEP desarrolla un programa académico para impulsar su capacidad y compromiso social para generar las ideas curriculares para enriquecer la sensibilidad y la imaginación científica, técnica y humanista de su comunidad.

Lic. José Azahir Gutiérrez Hernández
Director Académico

La palabra no solo nos otorga realidad, también tengo la sensación de que tiene vida propia separada de nosotros, y que cuando hablamos o escribimos, especialmente en momentos de intensa emoción, no hacemos más que dejarnos llevar por una sílaba amable o una frase complaciente.

Eric Ormsby. *Fine incisions*

Leer es una tarea de la memoria por medio de la cual las ficciones nos permiten disfrutar de experiencias ajenas y lejanas en el tiempo como si fueran nuestras.

Alberto Manguel. *La ciudad de las palabras*

En toda obra literaria se afirma una realidad independiente de la lengua y del estilo: la escritura considerada como la relación que establece el escritor con la sociedad, el lenguaje literario transformado por su destino social. Esta tercera dimensión de la forma tiene una historia que sigue paso a paso el desgarramiento de la conciencia: de la escritura transparente de los clásicos a la cada vez más perturbadora del siglo XIX, para llegar a la escritura neutra de nuestros días.

Roland Barthes, *El grado cero de la escritura*

Palabra escrita bajo luz

En un mundo cada día con más canales de comunicación, la palabra escrita camina por los muros que denuncian el drama catastrófico sobre el medio ambiente y sobre el control de la vida humana; el combustible de esta desesperanza produce apatía profunda por tener contacto con el mundo de la literatura, esta distorsión moral parece reflejarse entre los que no quieren sentir responsabilidad ni pensar, dejando a otros su indiferencia al ser prisioneros de ligeras razones y tirria justificada en la empresa de sobrevivir.

Especular en un mundo sin libros es exponer al mundo a la ausencia de pensamiento, creatividad y esperanza. Los libros, dedicados a ser arrebatados por el lector, están expuestos a ser poseídos por las bibliotecas vacías y que con el tiempo opacan sus páginas y empolvan la cubierta de lo que alguna vez fue un objeto de inspiración. Resulta difícil transcribir este instante de un peligroso espacio donde ya muy pocas palabras sobreviven dentro de la reflexión y las pocas sobrevivientes han abandonado la unión del sentido de vivir y el sentido del pensar científico. Escribir pasa de ser un placer repentino a ser una necesidad inminente, es el puente entre lo conocido y lo inexplorado. Es un reto de hoy en día inmiscuirse en lo que una vez fue lo cercano y dejar de lado la novedad tecnológica para poder, a través de las barreras que nos ciegan, abrir fronteras literarias. Es un proyecto que conspira a favor de la libertad creativa, de la felicidad lúcida cargada de libros embajadores de nuevas realidades.

Entre un mar de razones dentro del libro escolar en crisis, se percibe la ausencia de esa narrativa del cuerpo del texto, misma que alimenta al lector de una experiencia de conocimiento, su ausencia, es más un mal glosario, de un mal armado viaje literario científico o de ficción. En esos viajes de libros en crisis, nos cansamos de mirar espacios vacíos de talento, emociones y sensibilidad para responder a un entorno adverso; son muchas veces un triunfalismo de autoevaluación y una falsa puerta de una real competencia para actuar en la realidad. Uno no solo vive, escucha la voz interior de un libro, uno es fundado en el manejo del lenguaje que explica, crea, aplica o expande los límites del horizonte de nuestro imaginario actuante en lo real. No vivimos leyendo texto, sino leyendo el paisaje de una realidad, el libro toma la voz del progreso en una siempre reconstrucción lingüística del sujeto que explica, transforma y comunica desde los desafíos de su generación.

La información cruda que tanto rellena los libros grises, oscuros y papel pintado; requiere ser dotada de conceptos que permitan alimentar al sujeto que toma decisiones, que explora con paso lento, que mira por dentro del lenguaje y aplica la información que cobra sentido en la siempre expansión de las ideas.

Escribir un libro es siempre reconstruir un discurso, sus lectores en este discurso son el puente a un texto profundo que demanda esfuerzo en la reconstrucción de los procesos de razonamiento y el entretejido del discurso que involucra información de fondo, esas fuentes que justifican su análisis y poseen significado privilegiado para la comprensión de una realidad.

El lector puede hacer uso del libro con su propia experiencia y con su autoayuda, al precisar términos y conceptos para prolongar su horizonte de interpretación, el libro se hace cargo de la memoria de un plan de estudios, es un discurso de diferentes capas de argumentos, tras este texto se anuncia un orden de experiencia propuesto para su aprendizaje. El libro está conformado para jóvenes con memoria sin dolor para nuevas palabras, aborda el olvido como una deficiencia de interactividad entre el discurso argumentativo y los referentes conceptuales. Esto es el reto en la producción de los libros CONALEP. La propuesta es una reconstrucción de una semántica más profunda, como el principal reto del estudiante técnico bachiller del siglo XXI.

Libro,…

todos te miran,

nosotros te vemos bajo la piel.

Este texto de apoyo es una introducción a la representación gráfica de funciones que sirven de base para el cálculo de variables. Tales representaciones gráficas incluyen localización de puntos en el plano, secciones cónicas y sus propiedades, así como un breve análisis de funciones.

Características del libro de apoyo para el estudiante:

Cada capítulo cuenta con una introducción, que incluye contexto histórico y aplicaciones, definiciones, ejemplos de ejercicios resueltos, datos curiosos, preguntas reto, problemario, autoevaluación, soluciones y conclusiones, que sin ser finales, más bien son una invitación al análisis de otras posibilidades y aplicaciones de este tema.

En su versión digital, las referencias son accesibles siguiendo la liga en la red.

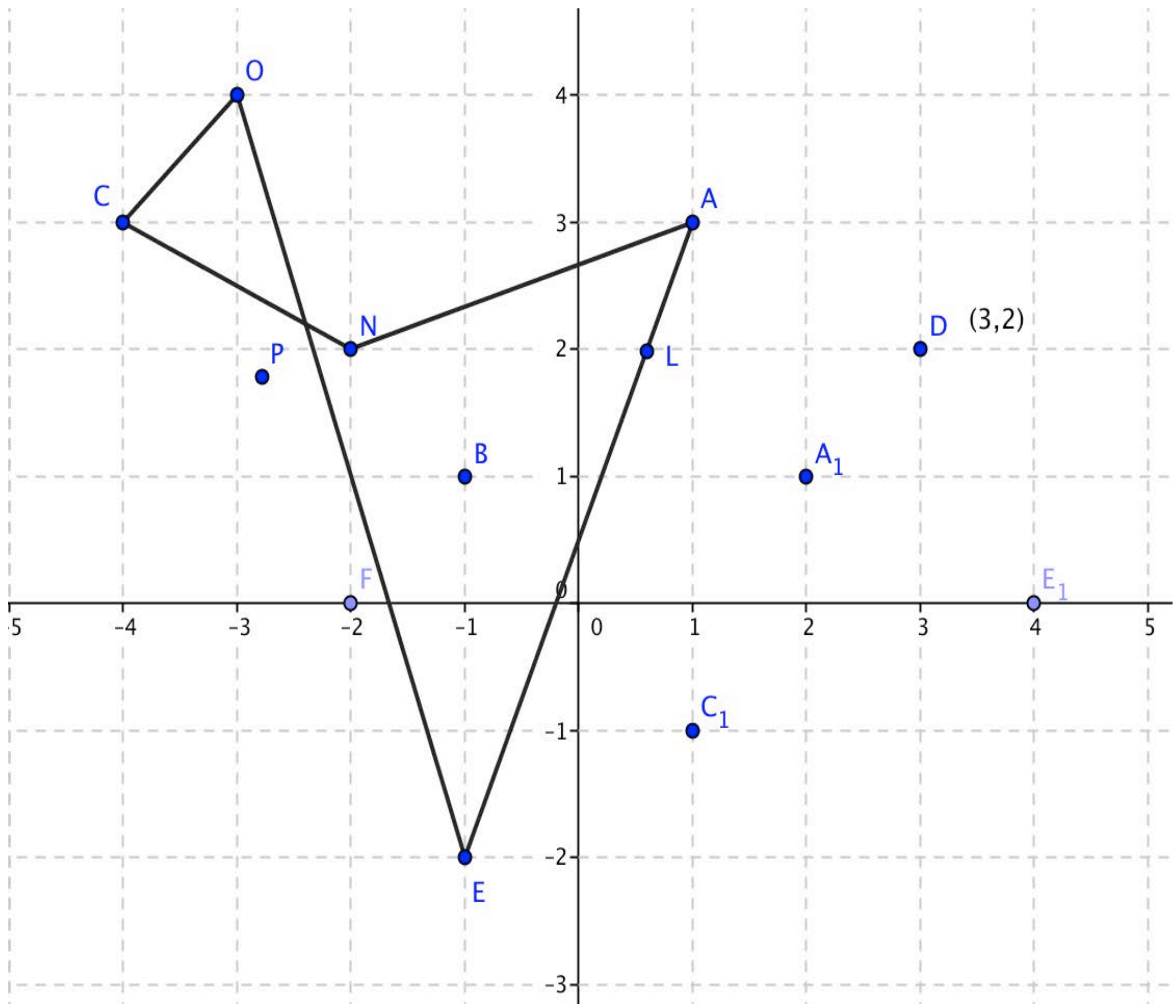
SUMARIO

Capítulo 1: Representación gráfica de lugares geométricos

Capítulo 2: Representación gráfica y uso de curvas canónicas

Capítulo 3: Representación gráfica de derivadas

Capítulo 1: Representación gráfica de lugares geométricos



Introducción

El conocimiento sobre el estudio y aplicaciones de la geometría es tan amplio que podemos observarlo en cualquier parte, sus aplicaciones nos permiten vivir dentro de una atmósfera de bienestar, adentrarnos en el mundo de la geometría nos permite visualizar nuestro entorno de manera diferente, y desde distintos puntos de vista de acuerdo con el tipo de geometría que estemos tratando[1].

Diariamente utilizamos la geometría, nuestra visión nos permite apreciar objetos que nuestro cerebro llega a confundir, tal es el caso de las ilusiones ópticas, y otras que aunque no podamos ver a simple vista vemos la reacción que producen, como sucede a nivel atómico.

Investigadores estudiosos de la Geometría, afirman que el origen de la geometría data tres mil años a.C. en la época de Hammurabi[2] .

Los antiguos griegos se preocuparon por medir las cosas que les rodeaban, Tales de Mileto pudo medir la altura de la Gran Pirámide en Egipto por medio de su propia sombra, desarrollando técnicas de observación y utilizando los equipos rudimentarios de la época.

Los Mayas[3], Toltecas y Olmecas, utilizaron la geometría para construcciones y predicciones astronómicas .

Existen muchos tipos de geometrías y estas han surgido tratando de contestar a la pregunta, ¿cuál es la geometría del espacio físico? .

En la antigua Grecia dieron respuesta, afirmando que era la geometría euclidiana.

A principios del siglo XIX se concluye que existen dos tipos de geometrías[4]; la geometría física y la geometría lógica, Riemann[5] elaboró fundamentos en la geometría física de lo que después se llamaría geometría riemanniana.

Los avances en la física obligaron a los matemáticos y científicos a replantear sus argumentos al considerar el espacio de más de dos dimensiones. Al considerar cuatro dimensiones tuvieron que considerar una geometría de cuarto rango, con la teoría de la relatividad de Einstein y con los avances en las cuerdas cósmicas[6] se han reconsiderado geometrías de rango superior que cumplen con los procesos atómicos y moleculares, pero que no cumplen con la geometría euclidiana, espacios donde las rectas paralelas[3] se cortan y donde no existe ninguna paralela a otra recta.

Existen otros tipos de geometrías[7] como: geometría diferencial, geometría hiperbólica, geometría no euclidiana, geometría elíptica, geometría proyectiva, geometría algebraica, geometría de dimensiones bajas, geometría fractal, geometría molecular.

Este texto trata de la geometría analítica plana y del espacio, que es la unión del álgebra con la geometría, en la que mediante un análisis matemático se puede representar un lugar geométrico mediante una ecuación algebraica y viceversa , dada una ecuación algebraica podemos encontrar el lugar geométrico que representa.

Plaza Valladolid (San Francisco) en Morelia Michoacán, muestra distintas formas geométricas

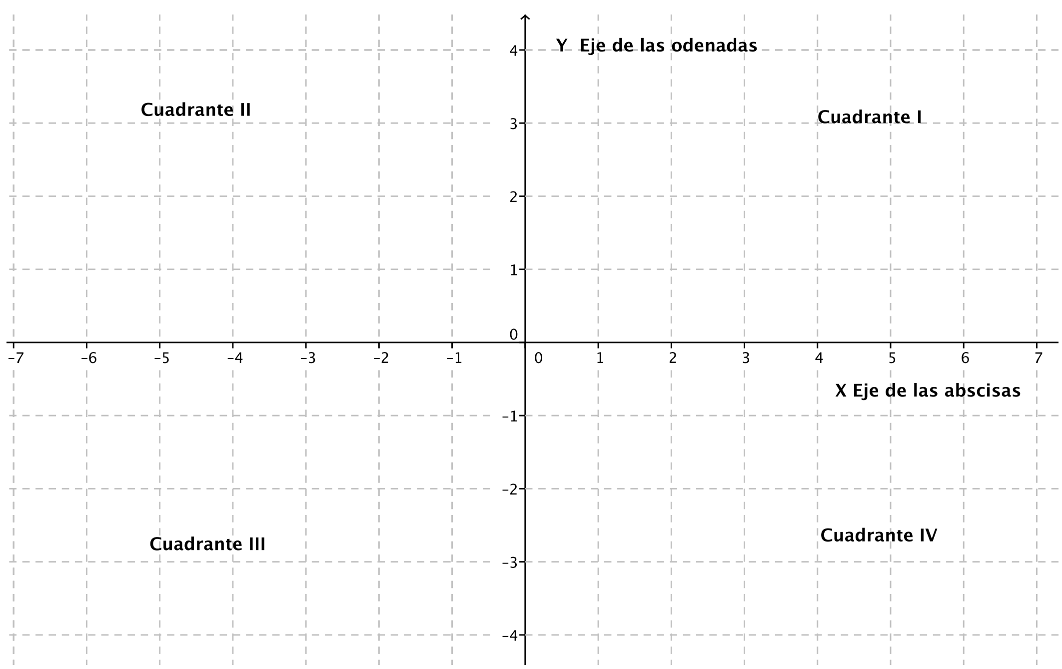
1. Plano cartesiano

Una de las muchas aportaciones que nos brindó el francés René Descartes[8] fue un sistema de localización en un plano, mediante coordenadas llamadas cartesianas (llamadas así en su honor, Descartes en latín se escribe cartesius). Dicho sistema de localización consiste en dos rectas perpendiculares llamadas ejes, uno horizontal representado con la letra X que recibe el nombre de *eje de las abscisas* y el otro vertical, perpendicular al primero, denotado con la letra Y llamado eje de las ordenadas.

Recordemos que un plano tiene dos dimensiones; largo y ancho, así al trazar los dos ejes perpendiculares queda dividido en cuatro partes llamadas cuadrantes.

Para localizar un punto en el plano se necesitan sus coordenadas (x, y) que nos indican las distancias del punto a cada uno de los ejes.

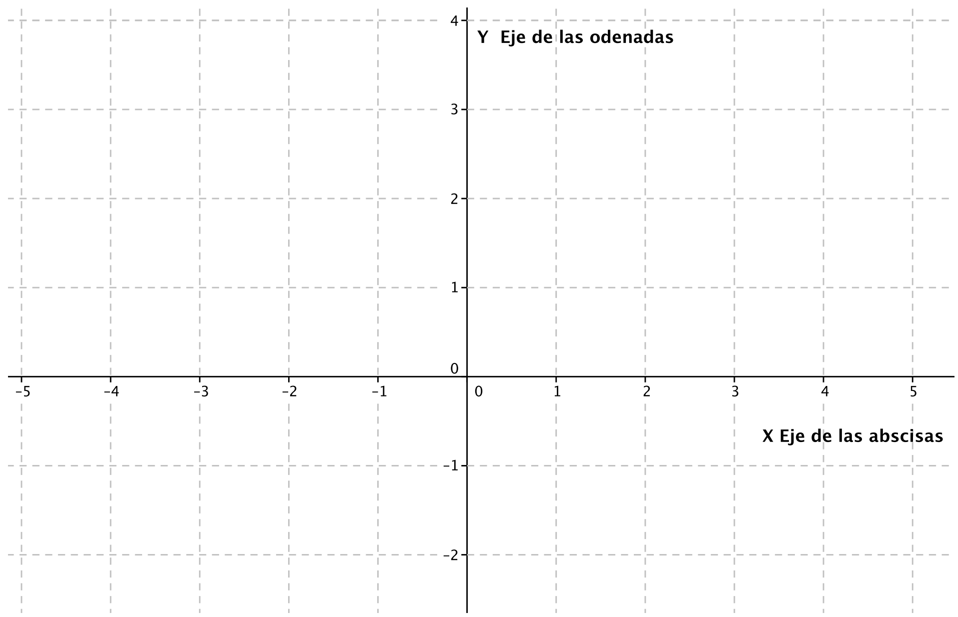
Descartes solo utilizaba números positivos dado que los números negativos aún no se admitian[8].



Para resolver:

1. Localiza los siguientes puntos o parejas ordenadas, colocando la letra que corresponde y compara tus resultados con el de tus compañeros:

A(3,0), B(2,3), C(0,2), D(-4,2), E(-5,0), F(-2,-1), G(0,-2), H(4,-2) y J(0,0)

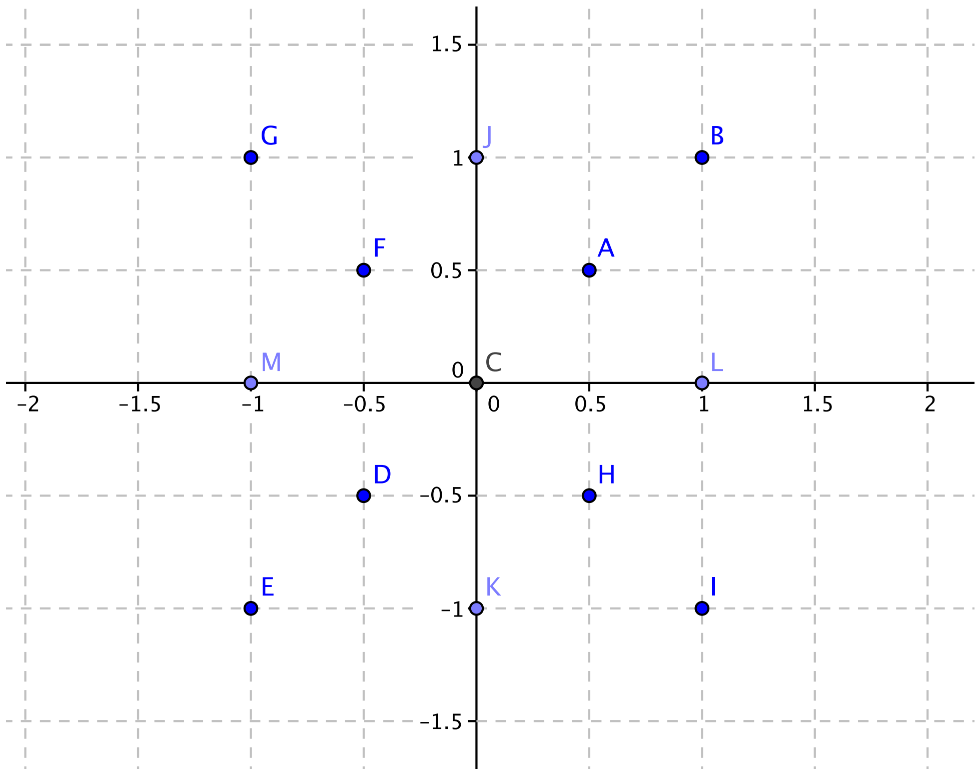


2. Indica la abscisa y la ordenada en los siguientes pares ordenados:

Coordenada	Abscisa	Ordenada
(-3,-4)		
(10,-100)		
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{5}\right)$		
(0,0)		
(6,14)		
(0,11)		

Nota curiosa: René Descartes era licenciado en Derecho

3. En el siguiente plano cartesiano se muestran los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L y M, indica las coordenadas de los mismos en la tabla siguiente, compara con tus compañeros tus respuestas.



Pareja ordenada	Coordenadas
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	
M	

1.1. Variables dependientes e independientes

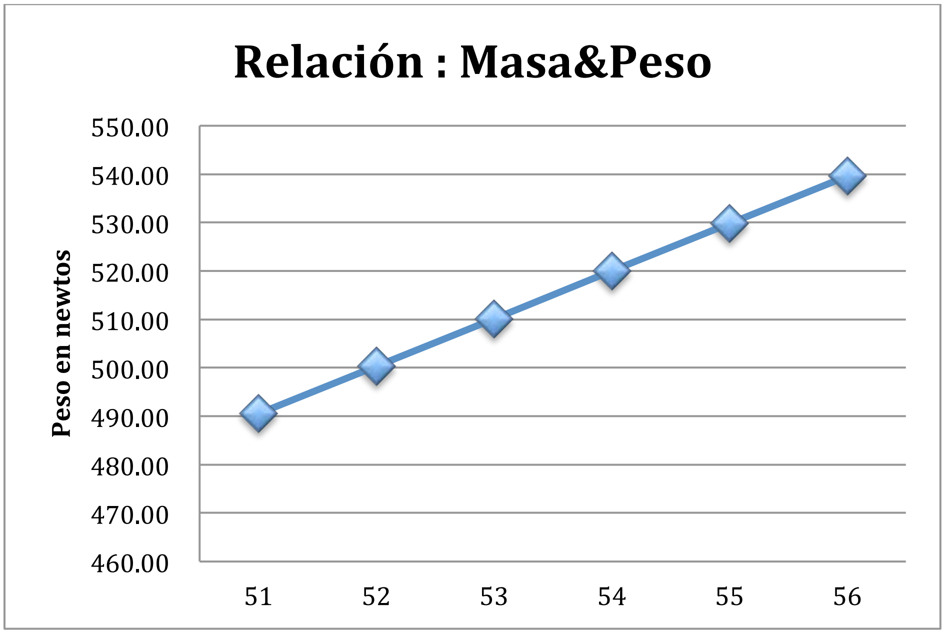
En tus estudios anteriores de física encontraste relaciones importantes, como la del peso de un cuerpo con su masa representada mediante la fórmula $w = mg$
donde:

$w = \text{peso}, m = \text{masa}$ y $g = \text{gravedad debida a la aceleración en la tierra } 9.81 m/s^2$

aquí aparecen tres literales; *m, g* y *w*, dos de ellas *w* y *m* son variables y g una constante.

Esta fórmula muestra la relación de la masa con el peso, observemos la siguiente tabla para algunos valores de la masa y sus respectivos resultados del peso correspondiente:

Masa en kilogramos m	Peso en newtons w
50	490.50
51	500.31
52	510.12
53	519.93
54	529.74
55	539.55



Observa que los valores del peso dependen del valor que tiene la masa, este tipo de variables se llaman variables independientes y dependientes respectivamente, y el valor de g es una constante.

Otra relación importante para dar un diagnóstico de cómo se encuentra nuestra salud es el cálculo del índice de masa corporal que relaciona nuestro peso (kg) y nuestra altura (m) mediante la fórmula:

$$IMC = \frac{peso}{(altura)^2}$$

Te invitamos a realizar el cálculo de tu IMC, el valor obtenido te indicará si tu peso está en un ideal, padeces obesidad o estás bajo de peso, los valores esperados para la población mexicana los puedes obtener en un buscador de la red, esto con la finalidad de realizar cambios en hábitos alimenticios, no olvides consultar con un médico antes de iniciar alguna dieta.

Para resolver:

1. Investiga cuatro relaciones que utilizas cotidianamente, discute con tu profesor y compañeros cuáles son las variables dependientes, las variables independientes y las cantidades constantes.

Relación	Variable dependiente	Variable independiente

2. El uso racional del agua es importante para nuestra vida y para generaciones futuras, ahorrar agua en actividades cotidianas debe ser nuestro deber, por ejemplo: al darnos una ducha consumimos 300 litros en promedio, en un tiempo estimado de 5 minutos, esto es, 60 litros por minuto, llena la tabla siguiente indicando en un periodo de una semana el tiempo que duras en tu aseo personal y el consumo de agua respectivo, al final de la semana calcula el total de litros de agua utilizados y sugiere algunas formas de economizar con el vital líquido, discutiéndolo en tu grupo.

Tiempo (en minutos)	Agua utilizada (en litros)
Domingo	
Lunes	
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	
	Total:

1.2. Relaciones y funciones[9]

Función es una relación entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno del segundo conjunto[10, 11, 12], estos conjuntos se llaman dominio y contradominio. El gran matemático Euler[13], llamado por Laplace como "El maestro de todos nosotros[14]", es quien introduce el término en el vocabulario matemático, pareciéndose al concepto de fórmula, término relacionado con variables y constantes. La definición moderna se le atribuye al alemán Peter Dirichlet[15] quien introduce el concepto de función como una expresión, una regla o ley que define una relación entre una variable (variable independiente) y otra variable (variable dependiente).

Si observamos a nuestro alrededor, y tratamos de definir lo que ocurre, podríamos hacerlo en términos matemáticos, tal vez quedar definido mediante los siguientes axiomas[16]:

a) Todo evento en la naturaleza puede ser representado mediante ecuaciones o funciones y viceversa, toda ecuación o función puede ser la representación de algún evento en la naturaleza.
b) Todo evento en la naturaleza tiene patrones.

Desde la antigüedad el hombre ha intentado buscar estas relaciones; comenzó colocando marcas en relación con el número de años o de animales que poseía. Herón de Alejandría en el siglo II D.C. encontró una fórmula que calcula el área de un triángulo en función de sus lados. Tratando de no malinterpretar a Platón[17] podría decirse que llegó a la conclusión de que los números son el lenguaje para expresar las ideas, tal vez aventurándonos pero sin poder afirmarlo podríamos pensar que ya tenían una noción de lo que es una función, de la misma forma se podría afirmar que los mayas, egipcios[18] o chinos entre otras civilizaciones ya manejaban el concepto o solamente uno cercano a él, el de relación.

Galileo[19] al relacionar el movimiento de los cuerpos celestes en función de su posición, pretendió relacionar los conceptos, formulando leyes, así dio un gran paso hacia la concepción de lo que es una función. Poco después de Galileo, Descartes muestra la relación que existe entre una gráfica y una ecuación y viceversa. Sin embargo, la definición de función se ha ido modificando con el tiempo, desde la construcción de tablas de raíces y potencias hasta como se emplea ahora. Se considera que Leibniz introduce este término, seguido por Bernoulli[20] quien en septiembre de 1694 escribe una carta en respuesta a Leibniz; lo que describe como función en el sentido más actual:

… una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes[21]…

En 1748 el concepto de función tomó énfasis gracias a la publicación "Introduction in analysin infinitorum" de Euler donde define función como:

"…una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como cualquiera que lo sea de dicha cantidad y de números o cantidades constantes[22]…"

Así se da el crédito a Euler de precisar el concepto de función y del estudio de funciones elementales. Sin embargo, es Peter Dirichlet quien introduce el concepto moderno de función.

Las funciones son empleadas para modelar observaciones, por ejemplo la memoria humana[23], virus de computadora, análisis de datos: meteorología, datación por carbono, puntajes del C.I.

En tu curso Representación simbólica y angular del entorno estuviste en contacto con dos funciones importantes: la función exponencial y la logarítmica así como sus aplicaciones.

Antes de seguir es importante definir primeramente el producto cartesiano de dos conjuntos.

Producto cartesiano: es el conjunto formado por todas las parejas ordenas tales que como primer elemento de las parejas se tome cada uno de los elementos del primer conjunto y como segundo elemento de las parejas ordenadas cada uno de los elementos del segundo conjunto.[24]

Por ejemplo sean A= {1, 2} y B={a, b, c},

A× B={(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)}

Observe que por ser un conjunto se coloca entre llaves { } y se separan sus elementos que están formados por seis nuevas parejas ordenas, por comas; es decir, formamos un producto cartesiano de seis parejas.

Si calculamos B × A tendremos que:

B×A= {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1,), (c,2)}

Observa que en el producto cartesiano no presenta la propiedad *conmutativa*.

En el producto cartesiano[25], al conjunto de todos los primeros elementos de las parejas ordenadas se le llama *dominio*, y al conjunto formado por los segundos elementos de todas las parejas ordenadas se llama *contradominio* o *codominio* (también llamado impropiamente rango).

Una *relación*[15] es un subconjunto de un producto cartesiano que asocia a los elementos del dominio con los del contradominio.

En nuestra vida cotidiana hacemos uso de varias relaciones, por ejemplo, cuando de acuerdo al apellido de los alumnos les asignamos un número natural para hacer la lista de asistencia, así podría quedar un ejemplo de ella:

A={(1, Jesús Carreño), (2,Emiliano Ávila), (3,José Luis Molina),
(4, Leopoldo Chávez),…}

En esta relación el dominio es un subconjunto de los números naturales:

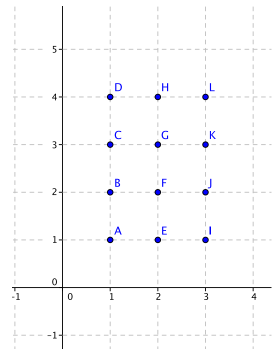
Dom={1,2,3,4,…*n*}

donde *n* representa el número de lista del alumno.

El contradominio está formado por el nombre del alumno al que se le asignó un número en la lista, el contradominio se forma, con el nombre y apellido paterno de los alumnos y la imagen es igual al contradominio.

Por ejemplo si A={1,2,3} y B={1,2,3,4}, el producto cartesiano A×B
A×B={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)}
El dominio correspondiente es:
Dominio ={1, 2, 3} y el contradominio ={1, 2, 3, 4}
Nótese que el producto cartesiano no es conmutativo.

De lo anterior, podemos concluir que el producto cartesiano entre dos conjuntos es una operación que asigna a cada elemento del primer conjunto con todos y cada uno de los elementos del segundo conjunto, formando un nuevo conjunto, el conjunto de las parejas ordenadas, dicho conjunto puede ser representado gráficamente.



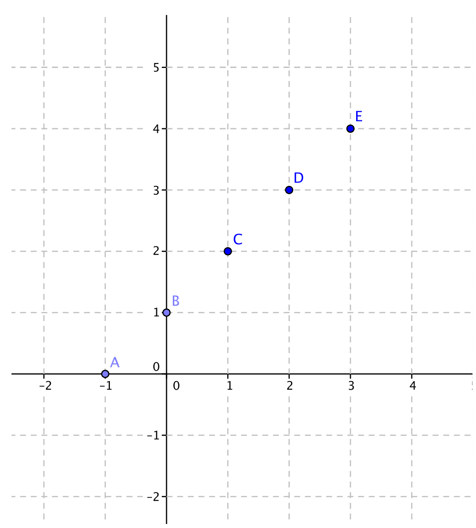
Gráfica de una relación

Es conveniente tener una representación gráfica de las relaciones, nos ayuda a ver objetivamente cómo se comportan las variables, esto se puede hacer representando en el eje horizontal los valores de las variables independientes X y en el eje vertical Y los valores de las variables dependientes, además su extrapolación permite ver la tendencia de las variables y poder determinar el dominio y contradominio.

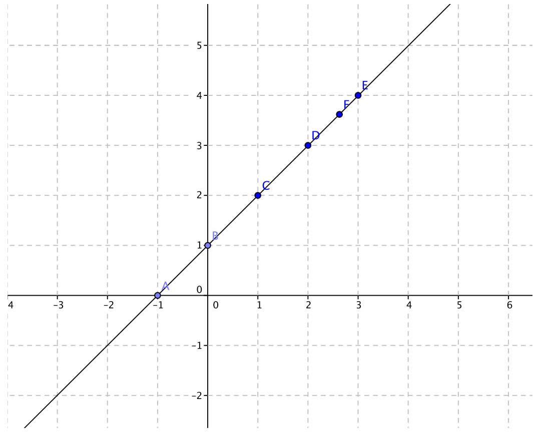
Cuando tenemos una expresión algebraica a la que le asignamos diferentes valores a una literal, la expresión tomará determinados valores, por ejemplo la expresión $x + 1$ la llamamos y, y escribimos $y = x + 1$, si le damos valores $x \in [-1,3]$ a la variable x llamada variable independiente, la variable dependiente y, tomará los valores que se muestran en la siguiente tabla de valores:

x	$y = f(x)$
-1	0
0	1
1	2
2	3
3	4

escribiremos las parejas ordenadas colocando como primer elemento al valor de la variable independiente x y su segundo elemento el valor correspondiente de la variable dependiente y, {(-2,8),(-1,3),(0,0),(1,-1),(2,0),(3,3)} cuya representación gráfica es la siguiente:



Si trabajamos con los números reales en ℝ×ℝ la gráfica quedará representada por todos los puntos que satisfagan a la relación $y = x + 1$ y la gráfica se traza con una línea continua.



El dominio de la relación $y = x + 1$ es $\mathbb{R}$, el contradomio está en $\mathbb{R}$, la imagen se obtiene despejando x y analizando qué valores reales puede tomar y, esto es:

$y = x + 1$

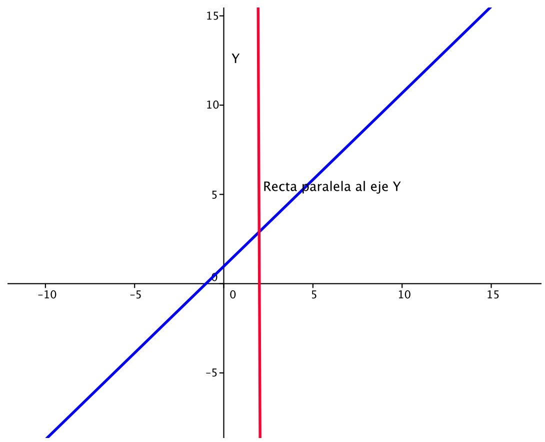
$x = y - 1$ despejando x

Para que x sea un valor real, esto sucede cuando $\{\, y \in (-\infty, \infty)\}$.

Definiremos ahora una función[14], como una relación en la que a cada elemento del dominio le corresponde una y solo una imagen o conjunto de parejas ordenadas, donde no existen dos diferentes que tengan el mismo primer elemento.

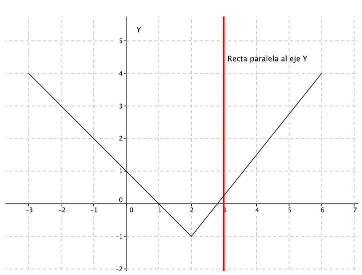
Así por ejemplo sea A={(a,1),(b,2),(c,3),(d,2)}, los primeros elementos a, b, c y d son diferentes entre sí, respecto a los segundos no se tiene esa limitación, no importa que el elemento 2 se encuentre en la segunda y cuarta pareja, por lo tanto, se puede decir que es una función si no existen dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer elemento.

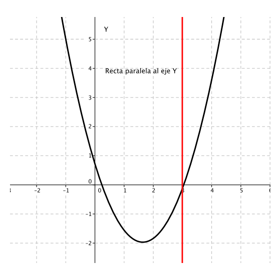
Para identificar si una relación es una función de forma gráfica, podemos trazar rectas verticales paralelas al eje Y, si corta a la gráfica de la relación en más de un punto se dice que es una relación, dicho de otra manera, si solo corta en un punto la gráfica de la relación representa una función.



Observe que para cada valor de x solo existirá un valor de y, por lo tanto es una función.

Las gráficas siguientes muestran dos funciones, se comprueba utilizando el método del trazado de la recta paralela al eje Y:

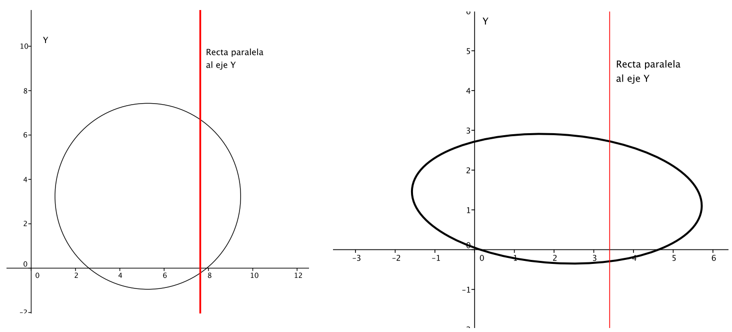




Más adelante se hablaremos de algunas de estas funciones, cómo obtener su gráfica y su ecuación.

Las siguientes gráficas nos permiten afirmar que no son la gráfica de una función, ya que si trazamos una recta paralela al eje Y, las corta en más de un punto, esto es, que dos parejas ordenadas diferentes tienen el mismo primer valor.

NOTA: Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.



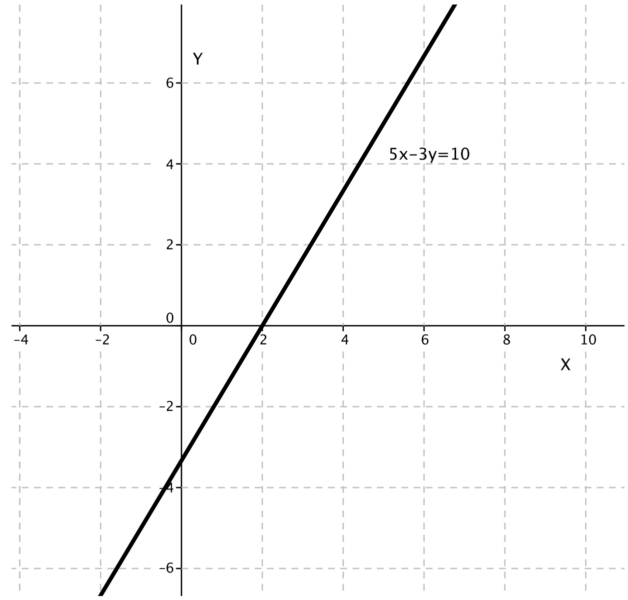
Gráfica de una relación

Investiguemos si la siguiente relación es una función, encontremos el dominio, el contradomio, y tracemos su gráfica del conjunto de pares ordenados que cumplen la condición: $\{(x,y)\ \ x,y\epsilon\mathbb{R}\ 5x-3y=10\,\}$.

Despejamos la variable y

$$y=\frac{5x-10}{3}$$

Observemos que la variable y tiene un valor dentro de los números reales para cualquier valor de la variable x, por lo tanto el dominio son las $x\epsilon\mathbb{R}$ y el contradominio es $y\epsilon\mathbb{R}$, es una función, siendo su gráfica la siguiente línea recta:



Encontremos el dominio y el contradominio de la relación $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$

Es una función racional[26] $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, su dominio queda definido por los valores numéricos que corresponden a $Q(x) \neq 0$ ya que se debe de considerar que el denominador debe de ser distinto de cero, dado que no existe la división entre cero, simplemente el dominio omite las raíces de $Q(x)$.

Manipulando la ecuación, factorizando el denominador y simplificando tendremos:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{x}{x(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Considerando que $f(x)$ no está definida cuando el denominador es cero, por lo que el dominio es el conjunto de las x tales que $x \neq 1$.

El contradominio se puede obtener haciendo $y = \frac{x}{x^2-x}$

$$y = \frac{x}{x(x-1)}$$

$$y = \frac{1}{x-1}$$

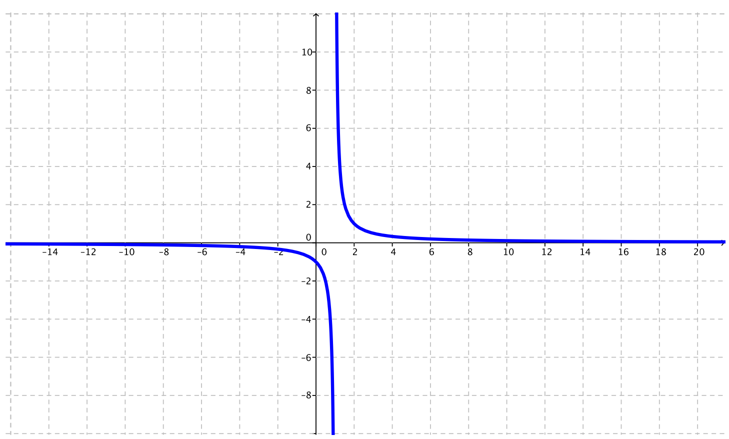
Despejando $\boldsymbol{x}$ y observando los valores reales que puede tomar $\boldsymbol{y}$ tendremos:

$$y(x-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{y} + 1$$

Observa que $\boldsymbol{y}$ debe ser distinto de cero para que existan valores reales de $\boldsymbol{x}$, por lo que se concluye que $y \neq 0$.

Su contradominio es: $\{y \epsilon \mathbb{R} / \ y \neq 0\}$



El siguiente ejemplo es muy interesante dado que tenemos una relación donde hay radicales y debemos tomar un tiempo para realizar un minucioso análisis.

Encontrar el dominio, contradominio, lugar geométrico que representa:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

Tenemos una función racional, analicemos el denominador $\sqrt{x+1}$ que el único valor que está indeterminado es cuando el radicando toma valores negativos, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo, por lo tanto analizaremos qué valores sí son posibles, y esto ocurre cuando:

$$x+1>0$$

$$x>-1$$

Por lo que el dominio son todas las $\boldsymbol{x}$ que pertenecen a los números reales que son mayores que -1

$\{x/x\epsilon\mathbb{R}$ x>-1$\}$ ó $x\epsilon$(-1,+∞)[1]

Para obtener el contradominio despejamos la $\boldsymbol{x}$ y observamos qué valores reales puede tomar la $\boldsymbol{y}$ para que $\boldsymbol{x}$ exista,

$$y=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

$$y\left(\sqrt{x+1}\right)=2$$

$\sqrt{x+1}=\frac{2}{y}$ elevando al cuadrado en ambos miembros tenemos:

$$x+1=\frac{4}{y^2}$$

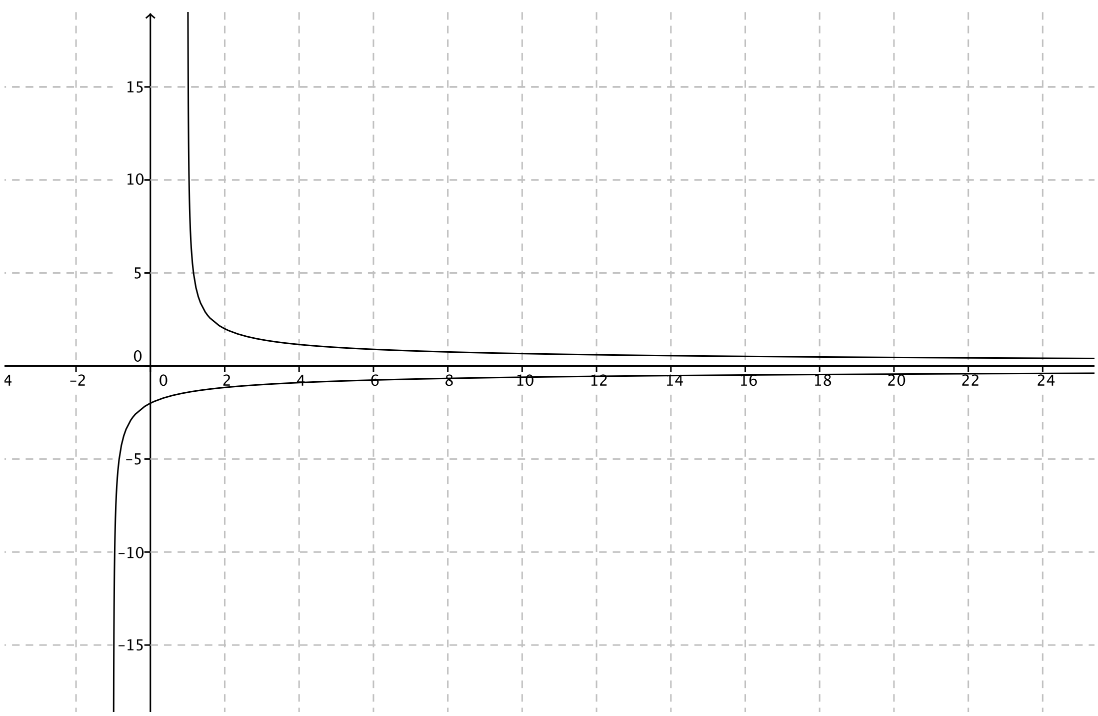
$$x=\frac{4}{y^2}-1$$

Por lo que el contradominio son todas las $\boldsymbol{y}$ que pertenecen a los números reales tales que $\boldsymbol{y}$ debe ser distinta de 0 ($y \neq 0$).

Si hacemos una tabla de valores podemos obtener la gráfica, recuerda que x>-1

Es importante considerar los dos signos de la raíz cuadrada.

x	y
0	± 1
1	± 1.41
2	± 1.15
3	± 1



Gráfica de $y=\frac{2}{\pm\sqrt{x+1}}$

Calcularemos ahora el dominio y el contradominio de la siguiente función:

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Cuando tenemos una función con raíz cuadrada en el numerador, debemos observar que para que existan valores reales el radicando debe ser mayor o igual a cero, esto es positivo.

Analizando el radicando $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Factorizando $(x-1)(x-2) \geq 0$

Tenemos que considerar dos casos:

Caso I:

Cuando los dos factores son positivos

x-1≥0 y x-2≥0

x≥1 y x≥2 eso se cumple cuando x≥2

Caso II:

x-1 ≤0 y x-2 ≤0

$x \leq 1$ y $x \leq 2$, esto se cumple para x≤1

Uniendo las dos soluciones de cada caso tendremos que

xϵ(-∞, 1] ∪ [2, +∞) o bien 2≤x≤1

Para calcular el contradominio despejamos $\boldsymbol{x}$ y observamos qué valores reales puede tomar $\boldsymbol{y}$

$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$y^2 = x^2 - 3x + 2$

$y^2=x^2-3x+2$ completando el trinomio cuadrado perfecto

$y^2-2+\frac{9}{4}=x^2-3x+\frac{9}{4}$ reduciendo y factorizando

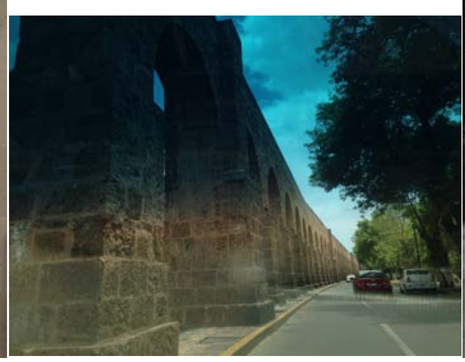
$y^2+\frac{1}{4}=(x-\frac{3}{2})^2$ sacando raíz cuadrada en ambos miembros

$$\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}=x-\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{y^2+\frac{1}{4}}$$

Contradominio=$\mathbb{R}$

Tienes como reto trazar su lugar geométrico considerando los dos signos de la raíz, utiliza una hoja de papel milimétrico y compara tus resultados con los de tus compañeros.


Las distintas formas geométricas pueden ser representadas mediante funciones, disfruta las imágenes de lugares que identifican a la ciudad de Morelia en Michoacán por su acueducto y el uso de arcos

Para resolver:

1. En equipo investiga mediante los métodos mostrados, si las siguientes relaciones son funciones, encuentren el dominio, contradomio y tracen su gráfica:

a) $\{(x,y)/x,y\epsilon\mathbb{R}\ 8x^2-19y^2=64\}$

b) $\{(x,y)\ /x,y\epsilon\mathbb{R}\ x^2-16x-12=0\}$

c) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

d) $y=3x-4$

e) $y=\frac{1}{x}$

f) $y=x^2-25$

g) $y=x^3$

h) $y=x^2+5x+6$

i) $y=x-5$

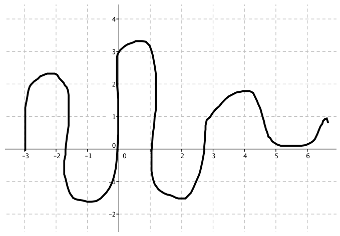
j) $y=|x-3|$

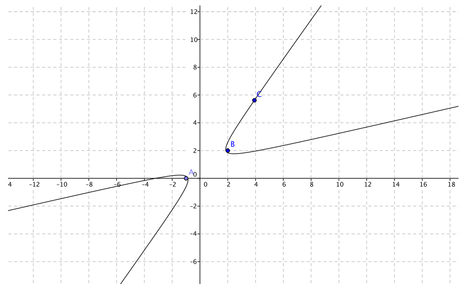
k) $y=\sqrt[3]{x}$

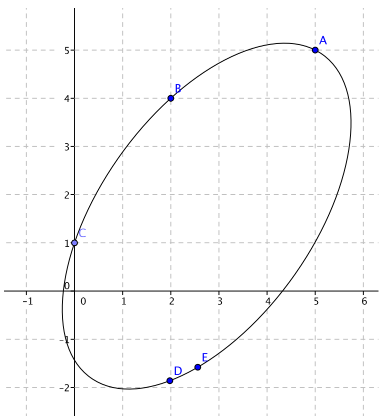
l) $y=2x-1$

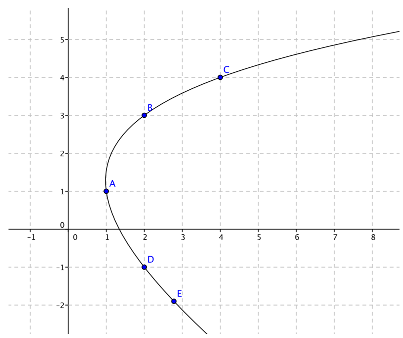
m) $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$

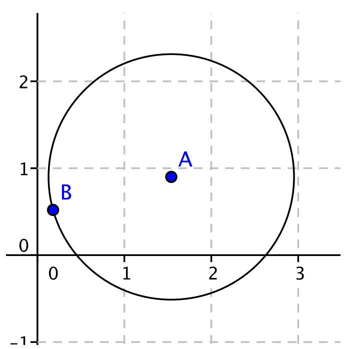
2. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función

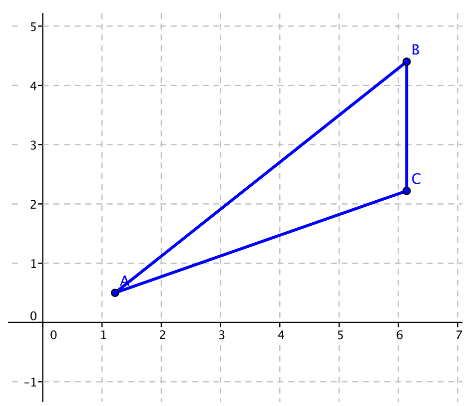












3. En los siguientes pares ordenados identifica el dominio, el contradominio e identifica si representan una función o una relación.

Pares ordenados	Dominio	Contradomino	Relación o función
$(2,1),(1,2),(2,2),(3,1)$			
$(1,2),(2,3),(4,8),(-1,3),(0,5)$			
$(0,0),(-2,-2),(1,0)$			
$(-5,8),(3,-5),(6,7),(0,7),(1,1)$			

4. Organicen con ayuda de su profesor grupos de cinco elementos, investiguen formas de ahorro del agua, propongan formas de optimizarla, por ejemplo: colocar una cubeta en la regadera antes de que salga el agua caliente y el uso que le podrían dar. Indiquen las estrategias para economizar agua, y redacta un breve ensayo con apoyo de tu profesor de Comunicación en los ámbitos escolar y profesional, para que te oriente en la redacción del mismo, comparte con el resto de la escuela para que tomen conciencia del desperdicio y posibles estrategias en el cuidado de nuestro ambiente, ya que todos vivimos en la misma casa, el planeta tierra.
También pueden mostrar de forma gráfica el consumo personal de agua por persona y calcular cuantos litros consumimos en promedio en nuestra vida, tomando como esperanza de vida los 80 años.
Puedes publicarlo en tu periódico mural y compartirlo con tu familia.

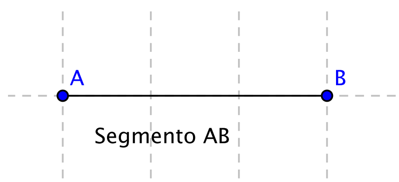
Nota curiosa:

¿Sabes que puedes obtener de los desechos orgánicos composta?

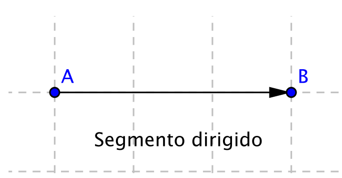
El uso de la composta evita poner fertilizantes, generamos menos basura. Los alimentos orgánicos no solo ayudan a la salud sino que si los comercializas obtienes buenos dividendos.

1.3. Distancia entre dos puntos

En geometría plana o euclidiana, un segmento es la distancia más corta entre dos puntos en un plano, y lo denotamos mediante la notación $\overline{AB} = \overline{BA}$, se lee segmento AB o segmento BA. En tus cursos de física utilizaste el concepto de vector, como una cantidad cuyas características necesarias para quedar descritas son: magnitud, dirección y sentido, ejemplos de ellos son la fuerza, aceleración, velocidad. Por ejemplo empujar un auto en reposo con una fuerza horizontal, es posible que logre moverlo dependiendo de la fuerza aplicada en esa dirección, pero si al mismo auto se le aplica una fuerza vertical hacia arriba lo que lograríamos es elevarlo de la superficie en que se encuentre con una magnitud adecuada.



Un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma magnitud del $\overline{AB}$, con la diferencia que nos indica que comienza en el punto A y va hacia el punto B, los segmentos dirigidos pueden representarse geométricamente como un vector mediante una flecha y cumplen las propiedades algebraicas de los vectores.



En $\overrightarrow{AB}$ la flecha encima indica que es un segmento dirigido, el sentido es de A hacia B.

Utilizaremos el plano cartesiano para calcular la distancia entre dos puntos.

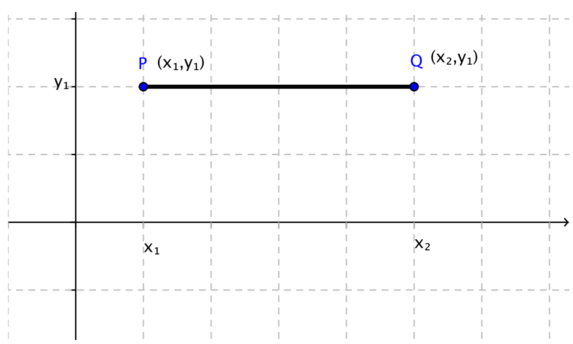
Distancia entre dos puntos situados en un segmento horizontal

Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_1)$ dos puntos cualquiera en el plano con la misma ordenada y_1, por lo tanto es un segmento horizontal, para calcular la distancia entre dichos puntos restamos sus abscisas, esto es:

$$\overline{PQ} = x_2 - x_1 \text{ o } \overline{PQ} = x_1 - x_2$$

Observa que de las dos ambas se obtiene la distancia pero con signos distintos, si consideramos la distancia entre dos puntos como una magnitud positiva, la distancia puede ser expresada como el valor absoluto[1] de la diferencia de sus abscisas, esto es:

$$\overline{PQ} = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$



Calculemos la distancia entre los puntos situados en un segmento horizontal cuyos extremos son R(1,3) y S(6,3).

El segmento $\overline{RS}$ es horizontal ya que los puntos tienen la misma ordenada 3, usando la fórmula tenemos:

$\overline{RS}=|x_2 - x_1|$

$\overline{RS}=|6\text{-}1|$

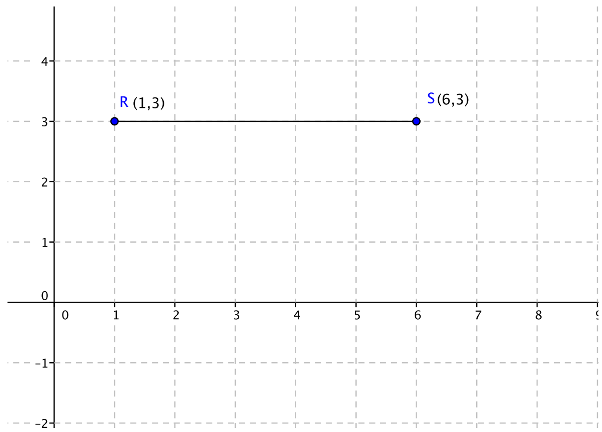
$\overline{RS}$=|5|=5

Observa que no importa si consideras $R(x_1, y_1)$ y $S(x_2, y_1)$ o viceversa

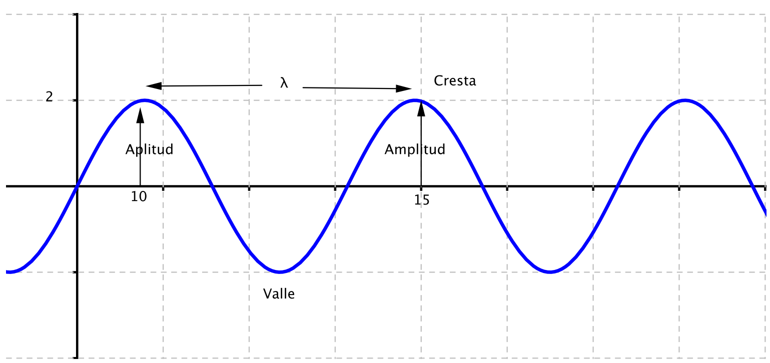
$\overline{RS}=|x_1 - x_2|$

$\overline{RS}$=|1-6|

$\overline{RS}$=|-5|=5



Una cuerda de guitarra se hace vibrar y se desea calcular la longitud de onda que se produce entre dos de sus crestas cuyas coordenadas son los puntos A(10mm, 2mm) y B(15mm, 2mm), como se muestra en la siguiente figura:



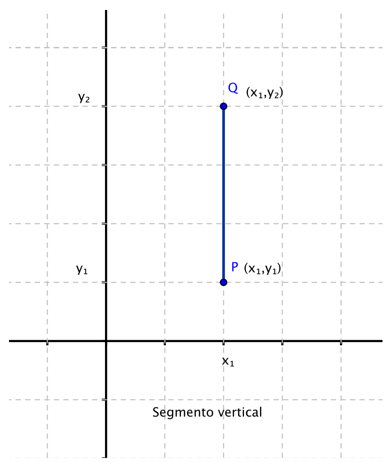
Tenemos que la distancia a calcular λ es la que corresponde a un segmento horizontal, por lo tanto:

$$\lambda=|x_2 - x_1|=|15\text{mm}-10\text{mm}|=5\text{mm}$$

Nota: en una onda estacionaria, la distancia entre dos puntos idénticos cualesquiera, como las crestas se llama longitud de onda y se le representa con la letra griega λ.

Distancia entre dos puntos situados en un segmento vertical

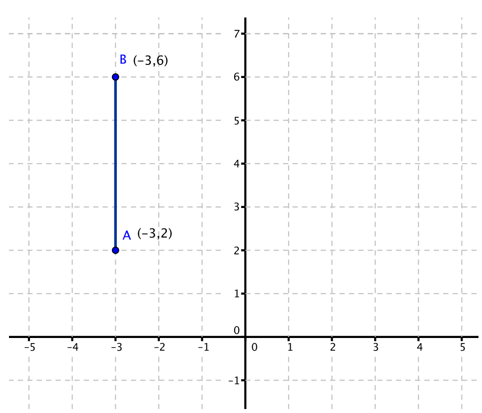
Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_1, y_2)$ dos puntos cualquiera en el plano con la misma abscisa x_1, esta condición representa un segmento vertical.



La distancia entre dos puntos de un segmento vertical se calcula restando sus ordenadas:

$$\overline{PQ}=|y_2 - y_1| \quad \text{o} \quad \overline{PQ}=|y_1 - y_2|$$

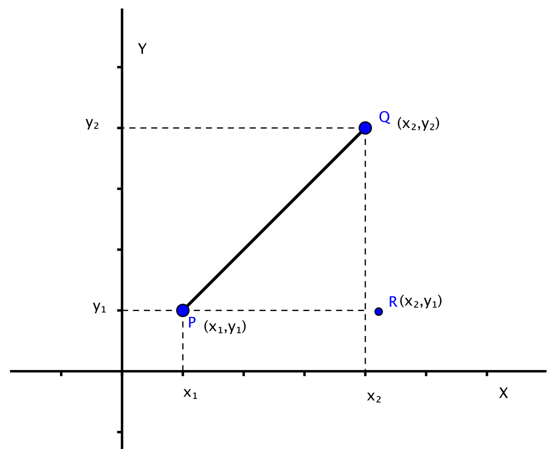
Con el siguiente ejemplo se mostrará la forma de calcular la distancia entre los puntos que pertenecen a un segmento vertical, sean A(-3,2) y B(-3,6) los extremos



$\overline{AB}=|y_2 - y_1| = |6-2| = 4$

Distancia entre dos puntos situados en un segmento inclinado

Consideremos un segmento que no es horizontal ni vertical, esto es inclinado, consideremos el segmento en el primer cuadrante (solo por comodidad, pero es lo mismo en cualquier cuadrante). Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera.



Se forma el triángulo ΔPQR si trazamos las proyecciones de P y Q sobre los ejes, calculamos la distancia horizontal $\overline{PR}$ y la vertical $\overline{QR}$, lo hacemos de la forma vista anteriormente $\overline{PR} = |\, x_2 - x_1 \,|$ y distancia $\overline{QR} = |\, y_2 - y_1 \,|$, el segmento $\overline{PQ}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo ΔPQR, aplicando el teorema de Pitágoras[1] tenemos:

$$(\overline{PQ})^2 = (\overline{PR})^2 + (\overline{QR})^2$$

$$(\overline{PQ})^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Note que cualquier número elevado al

$$(\overline{PQ})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

cuadrado es positivo, podemos cambiar

$$(\overline{PQ})^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

los valores absolutos por paréntesis

$$\sqrt{(\overline{PQ})^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

raíz cuadrada en ambos miembros.

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ fórmula para distancia entre dos puntos

Calculemos la distancia entre los puntos A(-2,-1) y B(3,4).

Cualquiera de los puntos puede ser (x_1, y_1) o (x_2, y_2), en nuestro ejemplo tomaremos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2), así:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{\left(3 - (-2)\right)^2 + \left(4 - (-1)\right)^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(3 + 2)^2 + (4 + 1)^2}$$

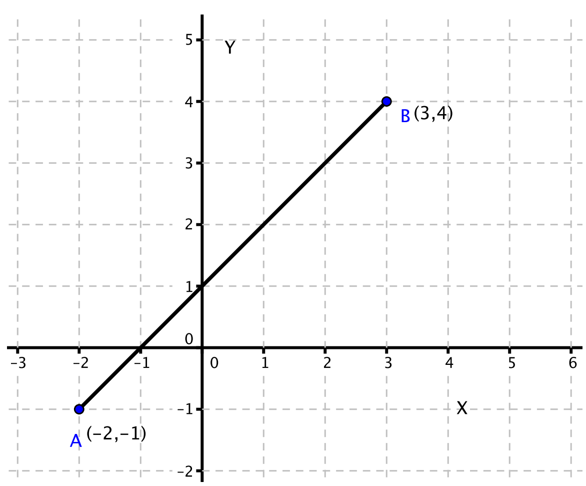
$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(5)^2 + (5)^2}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{25 + 25}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{50}$$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{25 \times 2}$$

$$d_{\overline{AB}} = 5\sqrt{2}u$$



Ejemplo, calcular la distancia entre los puntos C(-3,5) y D(2,-1)

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

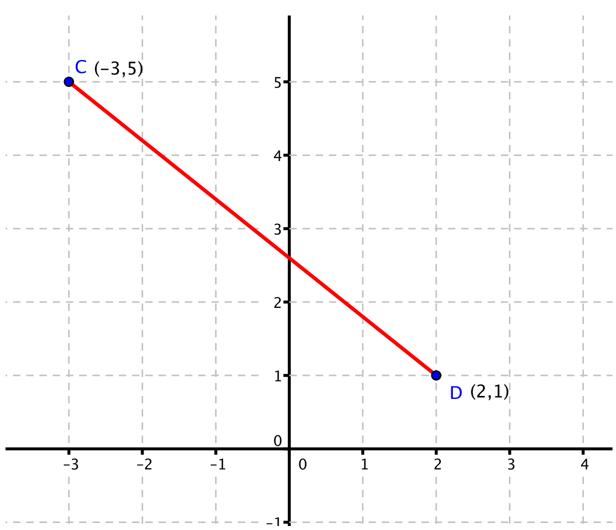
$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{\left(2-(-3)\right)^2 + (1-5)^2}$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{(2+3)^2 + (-4)^2}$$

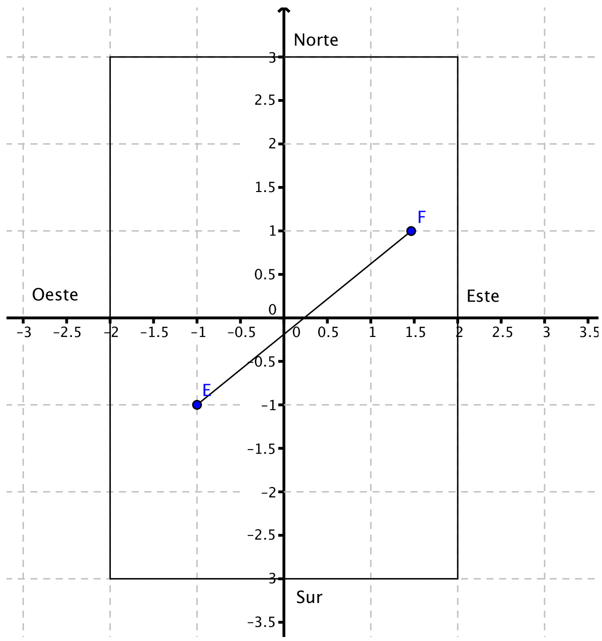
$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{(5)^2 + (16)}$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{25+16}$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{41}u$$



Un antropólogo desea calcular la distancia entre dos objetos encontrados dentro de una tumba, para lo cual cuadriculó la superficie y asignó coordenadas a los objetos encontrados como se indica:



$E(-1,-1)$ y $F(1.5,1)$

Calculemos la distancia entre los puntos E y F:

$$d_{\overline{EF}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{\overline{EF}} = \sqrt{\left(1.5 - (-1)\right)^2 + (1 - (-1))^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{(1.5 + 1)^2 + (1 + 1)^2}$$

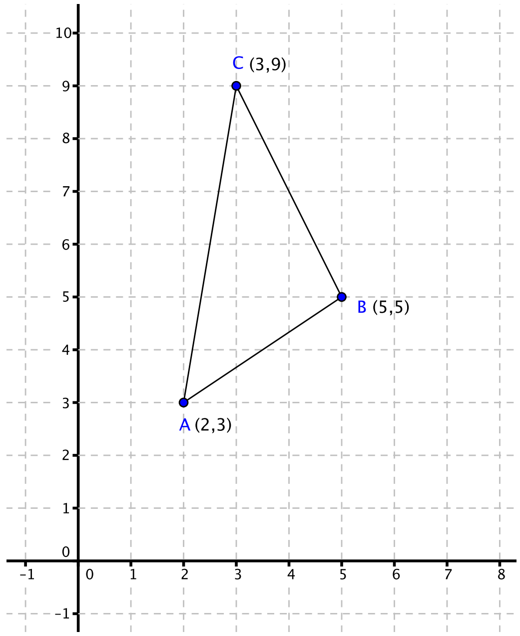
$$d_{\overline{EF}} = \sqrt{(2.5)^2 + (2)^2}$$

$$d_{\overline{EF}} = \sqrt{6.25 + 4}$$

$$d_{\overline{EF}} = \sqrt{10.25}$$

$$d_{\overline{EF}} = 3.20\ u$$

Se desea calcular cuántos metros de malla son necesarios para cercar un terreno de forma triangular cuyos vértices son los puntos A(2,3), B(5,5) y C(3,9)



El perímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados, comenzaremos por calcular las distancias de los 3 lados del triángulo.

Calculemos la distancia de $\overline{AB}$

$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(5-3)^2}$

$=\sqrt{(3)^2+(2)^2}$

$=\sqrt{9+4}$

$=\sqrt{13}=3.60$

Calculemos la distancia $\overline{BC}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-5)^2+(9-5)^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(4)^2}$

$=\sqrt{4+16}$

$=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$ reduciendo la raíz

$=4.47$

Calculemos la distancia $\overline{CA}$

$\overline{CA}=\sqrt{(3-2)^2+(9-3)^2}$

$=\sqrt{(1)^2+(6)^2}$

$=\sqrt{1+36}$

$=\sqrt{37}=6.08$

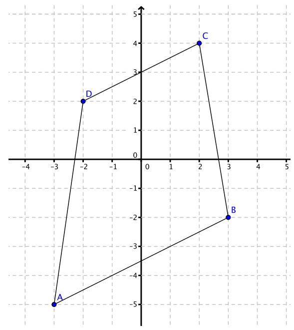
El perímetro del triángulo ΔABC es

$P=\sqrt{13}+2\sqrt{5}+\sqrt{37}=14.16$ ∴ se necesitan 14.16m de malla

El triángulo es escaleno ya que sus tres lados tienen medidas distintas.

Calcular el perímetro del cuadrilátero que pasa por los puntos P(-3,-5),

Q(3,-2), R(2,4), S(-2,2).



Calculemos las medidas de los segmentos $\overline{PQ},\ \overline{QR},\ \overline{RS}, \overline{SP}$

$\overline{PQ}$=$\sqrt{(3-(-3)^2+(-2-(-5)^2}$

=$\sqrt{(3+3)^2+(-2+5)^2}$

=$\sqrt{(6)^2+(3)^2}$

=$\sqrt{36+9}$

=$3\sqrt{5}$

=6.70

$\overline{QR}$=$\sqrt{(2-3)^2+(4-(-2)^2}$

=$\sqrt{(-1)^2+(4+2)^2}$

=$\sqrt{1+(6)^2}$

=$\sqrt{1+36}$

=$\sqrt{37}$

=6.08

$\overline{RS}$=$\sqrt{(2-(-2)^2+(4-2)^2}$

=$\sqrt{(2+2)^2+(2)^2}$

=$\sqrt{(4)^2+4}$
=$\sqrt{16+4}$
=$5\sqrt{2}$
=4.47

$\overline{SP}=\sqrt{(-2-(-3)^2+(2-(-5)^2}$
$=\sqrt{(-2+3)^2+(2+5)^2}$
$=\sqrt{(1)^2+(7)^2}$
$=\sqrt{1+49}$
$=2\sqrt{2}$
=7.07
El perímetro del cuadrilátero es igual a la suma de sus lados
$P=\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{SP}$=6.70+6.08+4.47+7.07=24.32u

Comprueba que el triángulo formado por los vértices A (1,1), B(6,1) y C(6,4) es un triángulo rectángulo.

Calculemos las longitudes de sus tres lados:

$\overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(1-1)^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{(5)^2+(0)^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{25}$

$\overline{AB}$=5

$\overline{BC}=\sqrt{(6-6)^2+(4-1)^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{0+(3)^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{9}$

$\overline{BC}=3$

$\overline{AC}=\sqrt{(6-1)^2+(4-1)^2}$

$\overline{AC}=\sqrt{(5)^2+(3)^2}$

$\overline{AC}=\sqrt{25+9}$

$\overline{AC}=\sqrt{34}$

Si los lados cumplen con el teorema de Pitágoras[27] entonces el triángulo es rectángulo:

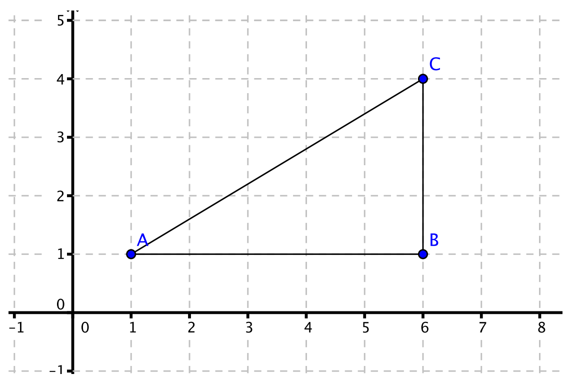
Hipotenusa^2=cateto^2 + cateto^2

$(\sqrt{34})^2 = (5)^2 + (3)^2$

$34 = 25 + 9$

$34 \equiv 34$ con lo que queda comprobado que el

triángulo es rectángulo.



Enseguida probaremos que las coordenadas $A(0,1)$, $B(0,5)$ y $C(\sqrt{12},3)$ corresponden a un triángulo equilátero.

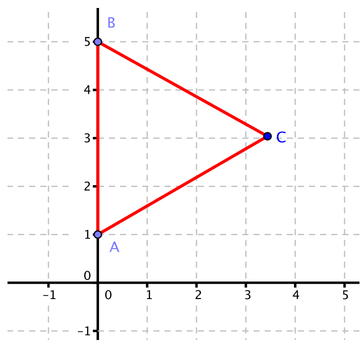
Considerando que una de las características del triángulo equilátero es que los tres lados son iguales, determinamos las tres distancias de sus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-0)^2+(5-1)^2} = \sqrt{(0)^2+(4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{12}-0)^2+(3-5)^2} = \sqrt{(\sqrt{12})^2+(-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{12}-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{(\sqrt{12})^2+(2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

Considerando las distancias de los segmentos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ se cumple la condición de los tres lados iguales, condición necesaria y suficiente para probar que los puntos del ΔABC son vértices de un triángulo equilátero.



Probaremos ahora que el triángulo formado por los vértices A(1,1), B(5,-2),

C (-3,-2) es un triángulo isósceles.

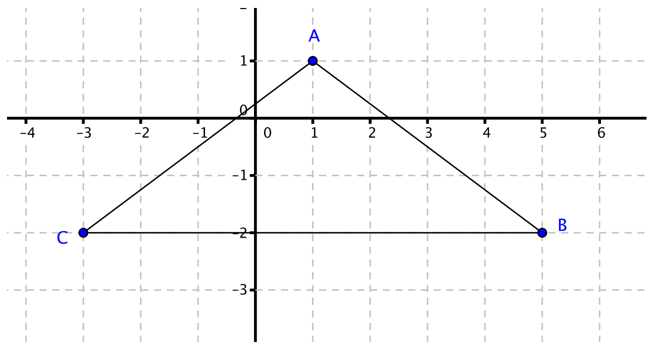
Considerando que por definición el triángulo isósceles debe de presentar dos lados iguales, por lo que debemos de calcular primeramente las distancias de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5u$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3-5)^2+(-2-(-2)\,)^2} = \sqrt{(-8)^2+(0)^2} = \sqrt{64} = 8u$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-3-1)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5u$$

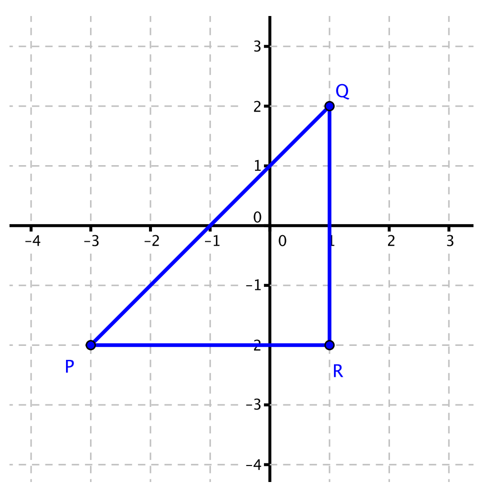
El ΔABC sí es un triángulo isósceles, ya que cumple la condición, tiene dos lados iguales $\overline{AB} = \overline{CA}$



Determinar el área del triángulo rectángulo ΔPQR cuyas coordenadas son

P (-3,-2), Q(1,2) y R(1,-2).

Recordemos que para calcular el área de un triángulo $A = \frac{bh}{2}$ ubicamos las coordenadas del triángulo rectángulo en el plano cartesiano, para identificar los segmentos que forman la base y la altura (también podemos descartar el lado mayor, que representa la hipotenusa del triángulo rectángulo).



En la gráfica observamos que la base la forma la longitud del segmento $\overline{PR}$ y la altura es la longitud del segmento $\overline{QR}$, calculemos ambas longitudes de los segmentos (o calcule las 3 longitudes de los lados del triángulo y descarte la mayor que es la hipotensa).

$$\overline{PR} = \sqrt{(1 - (-3)\ )^2 + (-2 - (-2)\ )^2}$$
$$\overline{PR} = \sqrt{(1 + 3)^2 + (-2 + 2)^2}$$
$$\overline{PR} = \sqrt{(4)^2 + (0)^2}$$
$$\overline{PR} = \sqrt{16}$$
$$\overline{PR} = 4$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (-2 - 2)^2}$$
$$\overline{QR} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$$
$$\overline{QR} = \sqrt{16}$$
$$\overline{QR} = 4u$$

La base es el segmento $\overline{PR}$=4u

La altura es el segmento $\overline{QR}$=4u

El área es $A = \frac{bxh}{2} = \frac{(4u)\ (4u)}{2} = \frac{16}{2} = 8u^2$

Calcular el área de un círculo cuyo radio está dado por el segmento $\overline{PQ}$ de coordenadas P(-1,-2) y Q(2,-1).

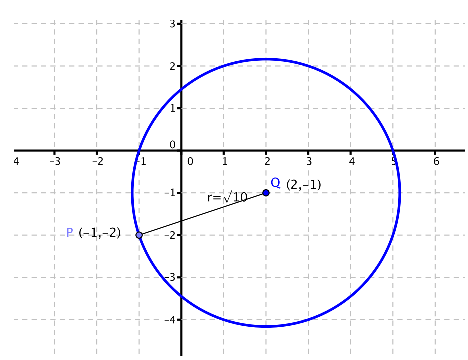
Calculemos el radio, que es la distancia de Q a P.

$$d_{PQ}=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{PQ}=\sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - (-2))^2}$$

$$d_{PQ}=\sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 + 2)^2}$$

$$d_{PQ}=\sqrt{(3)^2 + (1)^2}$$



$d_{PQ}=\sqrt{10u}$

usemos π=3.14 y sustituiremos en A=πr^2

A=(3.14)($\sqrt{10u}$)^2

A= (3.14)(10u)

A=31.4 u^2

Si la longitud de un segmento es $\sqrt{32}$ y las coordenadas de uno de sus extremos son B(6,5), indicar la abscisa del otro extremo si su ordenada es 2.

Si llamamos A al otro punto en el extremo del segmento, sus coordenadas serán A(2,y), conocemos $\overline{AB}=\sqrt{32}$ y B(6,5)

Usando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-\ y_1)^2}$

$\sqrt{32}=\sqrt{(6-2)^2+(5-\ y)^2}$

$\sqrt{32}=\sqrt{(4)^2+(5-y)^2}$

32= 16 + (5-y)^2 elevando al cuadrado ambos miembros

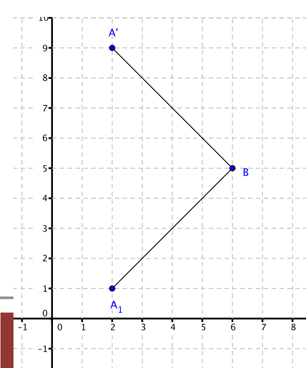
32-16= (5-y)^2 despejando

16=(5-y)^2 sacando raíz cuadrada en ambos

$\sqrt{16}=\sqrt{(5-y)^2}$ miembros

$\pm$4 =5-y resolviendo la ecuación

y= 5$\pm$4



y_1= 5+4 =9 y_2=5-4=1

Existen dos soluciones

A(2,1) y A'(2,9)

La distancia entre dos genes[28] ligados[29] es de 10 u.m.[30] Uno de los genes se encuentra localizado en el punto de coordenadas B(10,6) y hay dos genes a la misma distancia cuya abscisa es 2, encontrar las coordenadas de los dos genes A y A' .

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

10=$\sqrt{(2 - 10)^2 + (y - 6)^2}$

10=$\sqrt{(-8)^2 + (y - 6)^2}$

10=$\sqrt{(64 + (y - 6)^2}$ elevando al cuadrado ambos miembros

100=64 +$(y-6)^2$

100-64=$(y-6)^2$

36=$(y-6)^2$ sacando raíz cuadrada en

ambos miembros

$\sqrt{36}$=$\sqrt{(y - 6)^2}$

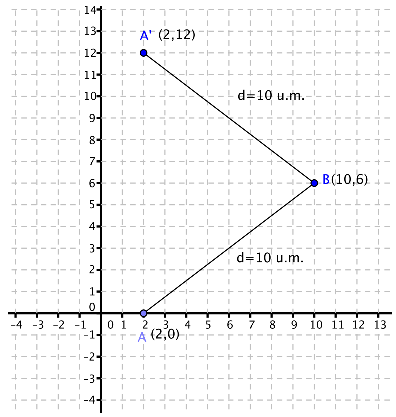
$\pm$6 =(y-6)

$\pm 6 + 6 = y$

y_1=12

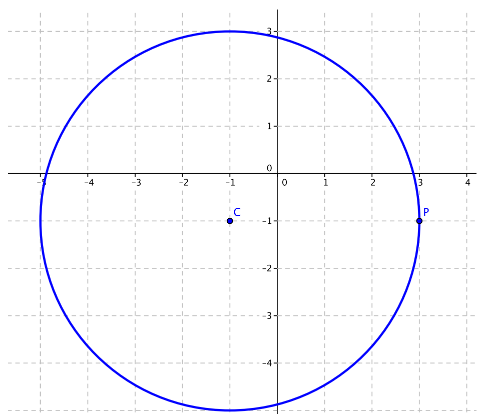
y_2=0

∴ A(2,0) y A'(2,12)



Calcular el área y el perímetro de una circunferencia cuyo centro es el punto C(-1,-1) y pasa por el punto P(3,-1).

Es conveniente comenzar por hacer una gráfica, ya que nos da una idea de los elementos que tenemos y lo que necesitamos.



Para calcular el perímetro y el área comenzamos por calcular el radio, que es la distancia del centro a cualquier punto, en este caso el punto P

$$r = \sqrt{(3+1)^2 + (-1+1)^2}$$
$$r = \sqrt{16} = 4u$$

El área de una circunferencia se calcula mediante la fórmula $A = \pi r^2$, sustituyendo estos valores y tomando $\pi = 3.14$ tenemos:

$$A = (3.14)(4u)^2$$

$$A = (3.14)(16u^2)$$

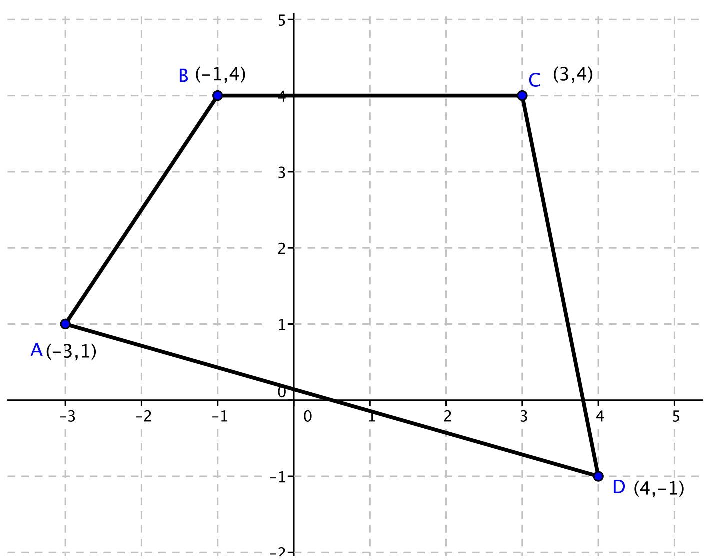
$$A = 50.24u^2$$

El perímetro se calcula mediante la fórmula $P = 2\pi r$, sustituyendo tenemos:

$$P = 2(3.14)(4u)$$

$$P = 25.12u$$

Un terreno tiene la forma que se muestra en la siguiente figura, el plano del terreno se hizo coincidir con un plano cartesiano obteniendo la siguiente figura:



Calculamos las distancias entre cada uno de los puntos

$$d_{AB} = \sqrt{(-1+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(3+1)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{16} = 4$$

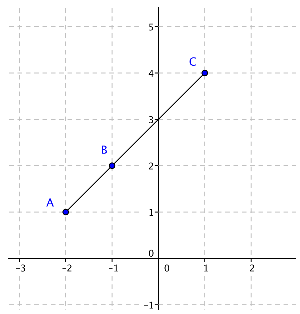
$$d_{CD} = \sqrt{(3-4)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$d_{DA} = \sqrt{(4+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

$$P = \sqrt{13} + 4 + \sqrt{26} + \sqrt{53} = 19.98u$$

Demostrar usando distancia entre dos puntos que los puntos A(-2,1), B(-1,2) y C(1,4) son colineales.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico donde se encuentran localizados los puntos, para demostrar que son colineales usando distancia entre dos puntos tomaremos como apoyo el axioma que dice: "la distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une" por lo tanto $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$



$$d_{AB} = \sqrt{(-1+2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(1+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(1+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Sustituyendo en $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$ tenemos:

$$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} \equiv 3\sqrt{2}$$

Nota: hay otras formas para demostrar lo anterior, más adelante cuando se vea la definición de pendiente tendrás otra herramienta para probar lo mismo.

El cálculo de distancias inaccesibles es una aplicación de distancia entre dos puntos

Para resolver:

En parejas resuelvan los siguientes ejercicios trazando el lugar geométrico correspondiente, compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la estrategia que siguieron para llegar a la solución, describan por escrito el procedimiento que utilizaron en cada ejercicio y léanlo en voz alta para ver si sus compañeros comprenden las indicaciones de sus procedimientos, cuida tu ortografía.

1. Calcular la longitud de los segmentos cuyos extremos son los puntos:

a) A(1,4), B(4,4)

b) C(2,1), D(2,5)

2. Calcular la distancia del origen de coordenadas al punto:

a) A(3,6)

b) B(-2,4)

3. Calcular el perímetro del triángulo cuyos vértices son:

a) A(-1,-4), B(3,2), C(0,5)

b) A(-6,0), B(0,3), C(3,0)

4. Calcular el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los siguientes puntos:

a) A(1,2), B(0,-2), C(5,-1), D(7,4)

b) A(0,0), B(4,0), C(4,3), D(0,3)

5. Comprueba que los vértices que se indican pertenecen a un triángulo rectángulo

a) A(2,1), B(4,3), C(-1,4)

b) A(-5,0), B(0,0), C(0,7)

6. Indica si los triángulos formados por los vértices dados son isósceles, escaleno o equilátero:

a) A(-2,6), B(3,0), C(6,3)

b) A(-4,10), B(-4,-4), C(3,3)

7. Calcula el área de los siguientes triángulos rectángulos cuyos vértices son los siguientes puntos:

a) A(2,1), B(4,3), C(-1,4)

b) A(-5,0), B(0,0), C(0,7)

8. Calcula el área del círculo de diámetro, el segmento cuyos extremos son los puntos siguientes, (considere π=3.14):

a) A(0,4), B(3,7)

b) A(2,1), B(4,3)

9. Calcula el área de la circunferencia cuyo radio es el segmento formado por los puntos dados:

a) A(0,4), B(3,7)

b) A(2,1), B(5,7)

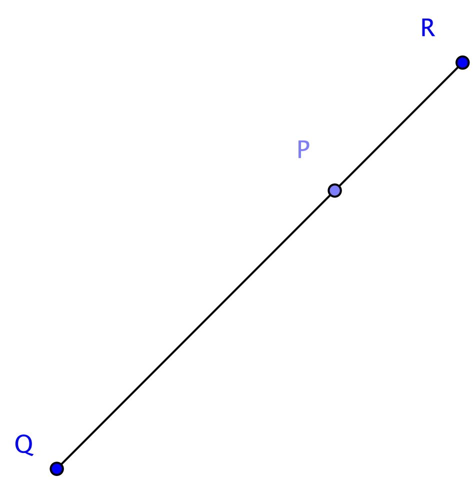
10. Si la longitud de un segmento es 5 y las coordenadas de uno de sus extremos es B(0,-2). Calcular la ordenada del otro extremo si su abscisa es 0 (dos soluciones).

11. Si la distancia de un punto al origen de coordenadas es 7 y la abscisa del punto es 5, calcular su ordenada. Dos soluciones.

1.4. Coordenadas de un punto que divide un segmento en una razón dada

Como lo indica el título encontraremos las coordenadas de un punto cuando nos indican en cuántas partes está dividido. Razón en matemáticas significa división, cociente de dos números, por ejemplo $\frac{4}{7}, \frac{1}{2}$.

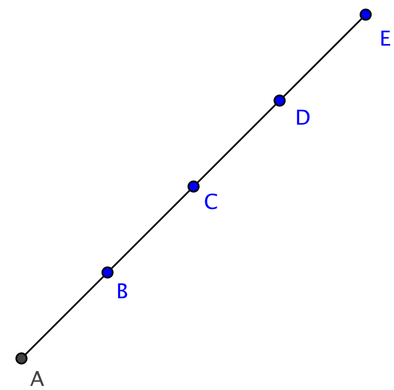
Sea el segmento $\overline{QR}$ y P el punto que lo divide como se muestra en la siguiente figura:



Es muy importante notar que estamos considerando que el segmento comienza en Q y termina en R.

La razón r se define como $r = \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}}$ esto es la distancia desde donde inicia el segmento al punto buscado P, entre la distancia del punto P al punto donde termina R.

Por ejemplo si un segmento es dividido en 4 partes iguales como se muestra en la siguiente figura podemos calcular la razón de los puntos que lo dividen como se muestra enseguida:



las razones de los puntos B, C y D son:

$$r_B = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}$$

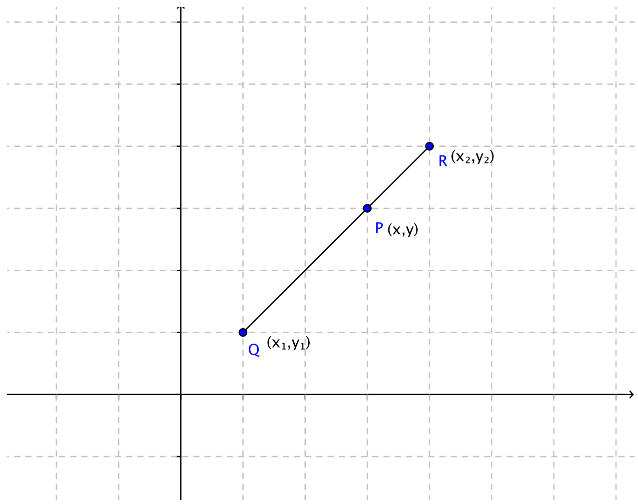
$$r_c = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$r_D = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{3}{1} = 3$$

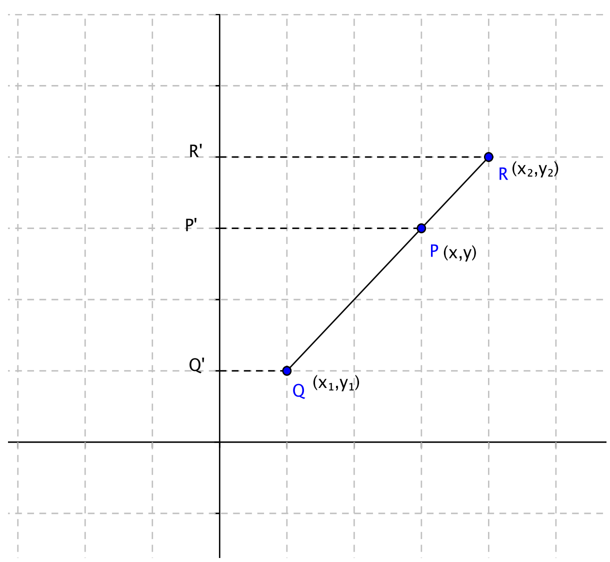
Es importante hacer notar que cuando la razón es r=1 corresponde al punto medio de un segmento.

Consideraremos ahora una generalización del problema para obtener la fórmula que nos permita calcular las coordenadas del punto que divida a un segmento en una razón dada.

Sean $Q(x_1, y_1)$ y $R(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento que comienza en Q y $P(x, y)$ las coordenadas del punto que buscamos que lo divide en una razón dada, definimos $r = \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}}$.



Trazamos las proyecciones de los puntos sobre los ejes, tomaremos el caso cuando sean las proyecciones sobre el eje Y:



Observa que se forman segmentos proporcionales sobre los ejes esto es:

$$\frac{\overline{QP}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{Q'P'}}{\overline{P'R'}}$$

podemos calcular las distancias de los segmentos verticales como vimos anteriormente restando las ordenadas:

$$\overline{Q'P'} = y - y_1$$

$$\overline{P'R'} = y_2 - y$$

sustituyendo tendremos:

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

recordemos en este punto que estamos tratando de encontrar las coordenadas del punto $P(x, y)$, así que despejamos y en la ecuación anterior

$$r(y_2 - y) = y - y_1$$

$$ry_2 - ry = y - y_1$$

$$ry_2 + y_1 = y + ry$$

$$ry_2 + y_1 = y(1 + r)$$

$$\frac{y_1 + ry_2}{1 + r} = y$$

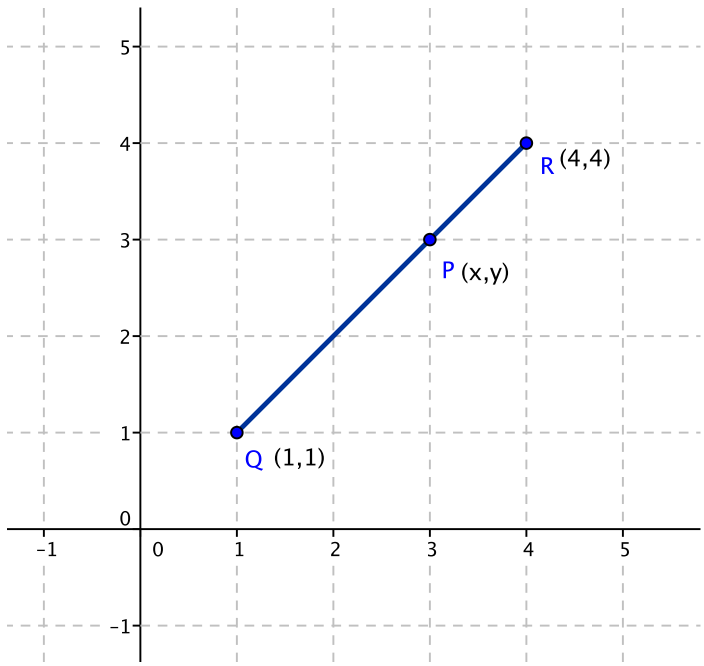
$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

esta fórmula nos sirve para calcular la ordenada del punto P, de manera análoga trazando las proyecciones sobre el eje de las abscisas y obtenemos las coordenadas de la abscisa de P obteniendo:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

de esta manera podemos calcular directamente las coordenadas del punto $P(x, y)$.

Por ejemplo calculemos las coordenadas del punto que divide al segmento $\overline{QR}$ cuyos extremos son $Q(1,1)\ y\ R(4,4)$ y tiene una razón $r = 2$.



$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

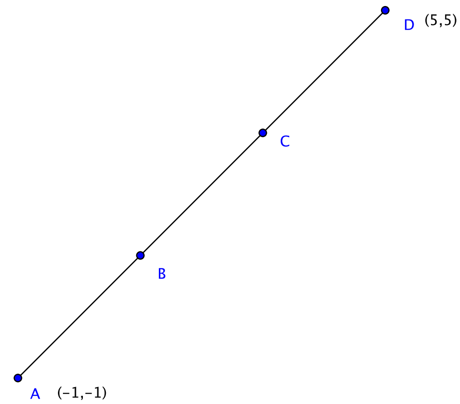
$$x = \frac{1 + (2)(4)}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{1 + (2)(4)}{1 + 2} = 3$$

por lo tanto las coordenadas son $P(3,3)$, como se puede observar en la figura anterior.

Encontrar las coordenadas de los puntos que dividen a un segmento en tres partes iguales cuyos extremos son los puntos $A(-1,-1)$ y $B(5,5)$



Como el segmento se divide en tres partes iguales existen dos puntos B y C cuyas razones son :

$$r_B = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$$

$$r_c = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{2}{1} = 2$$

Así las coordenadas del punto B son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-1 + \left(\frac{1}{2}\right)(5)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$x = \frac{-1 + \left(\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{-1 + (\frac{1}{2})(5)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

$\therefore\ B(1,1)$

Análogamente encontramos las coordenadas del punto C con $r = 2$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{-1 + (2)(5)}{1 + (2)}$$

$$x = \frac{-1 + 10}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{-1 + (2)(5)}{1 + (2)} = 3$$

Entonces las coordenadas de C son $C(3,3)$.

Cuando se necesite calcular las coordenadas del punto medio de un segmento recordemos que $r = 1$, si lo sustituimos en las ecuaciones obtenidas para encontrar las coordenadas de un punto con una razón dada en este caso 1, tendremos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$x = \frac{x_1 + (1)x_2}{1 + (1)}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

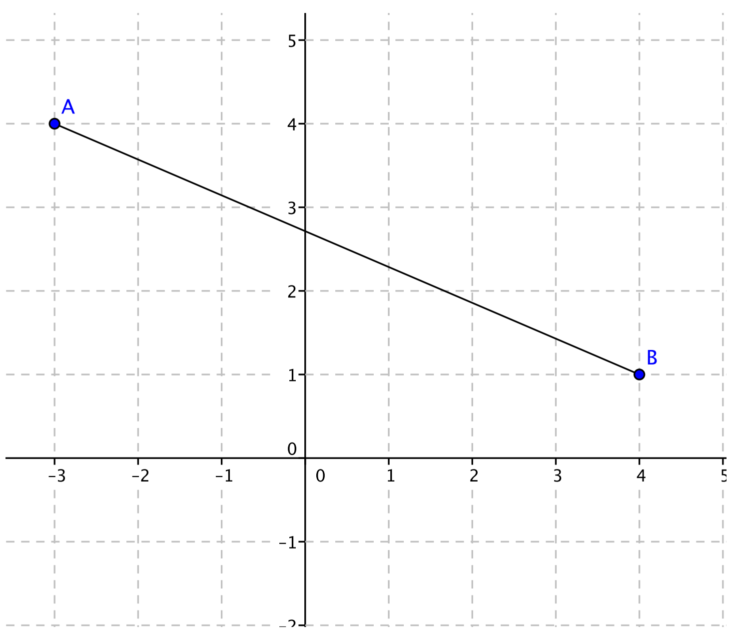
$$y = \frac{y_1 + (1)y_2}{1 + (1)}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Por lo tanto si denotamos el punto medio de un segmento con P.M. sus coordenadas son:

$$P.M.\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Por ejemplo, calcular las coordenadas del punto medio de un segmento cuyos extremos son los puntos A(-3,4) y B(4,1).



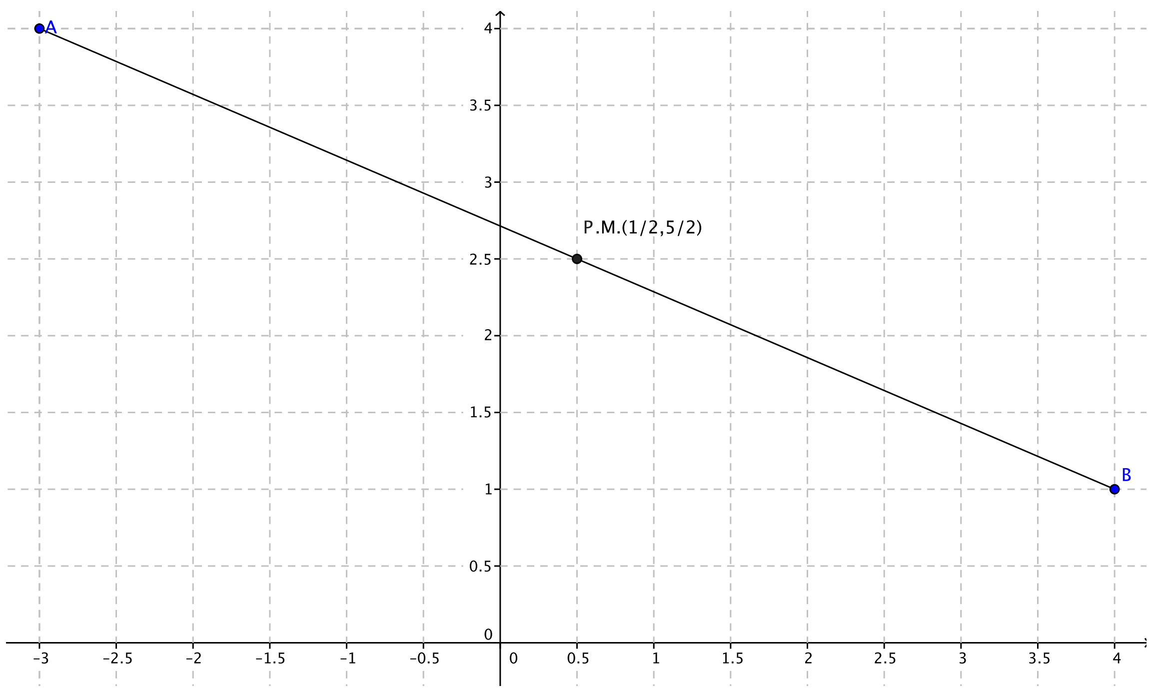
Encontremos sus coordenadas sustituyendo en la fórmula anterior

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$x = \frac{-3 + 4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$y = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Las coordenadas del punto medio son:

$$P.M.\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



Los puntos medios de cada lado de un triángulo son : $\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ y $\left(0,\frac{7}{2}\right)$, encontrar los vértices del triángulo.

Analizando detenidamente los datos que tenemos; conocidos son los puntos medios de cada lado y desconocidos las coordenadas de los vértices, que denotaremos como:

$$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)\ y\ C(x_3,y_3)$$

Para calcular las abscisas:

$$\frac{1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$1=x_1+x_2 \text{ ecuación 1}$$

$$0=\frac{x_2+x_3}{2}$$

$$0=x_2+x_3 \text{ ecuación 2}$$

$$-\frac{3}{2}=\frac{x_1+x_3}{2}$$

$$-3=x_1+x_3 \text{ ecuación 3}$$

despejando x_1 y 2 de las ecuaciones 2 y 3 y los sustituimos en la ecuación 1

$$1=-3-x_3-x_3$$

$$x_3=-2$$

$$x_2=2$$

$$x_3=-2$$

Para calcular las ordenadas:

$$\frac{3}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$3=y_1+y_2 \text{ ecuación 1}$$

$$\frac{7}{2}=\frac{y_2+y_3}{2}$$

$$7=y_2+y_3 \text{ ecuación 2}$$

$$2 = \frac{y_1 + y_3}{2}$$

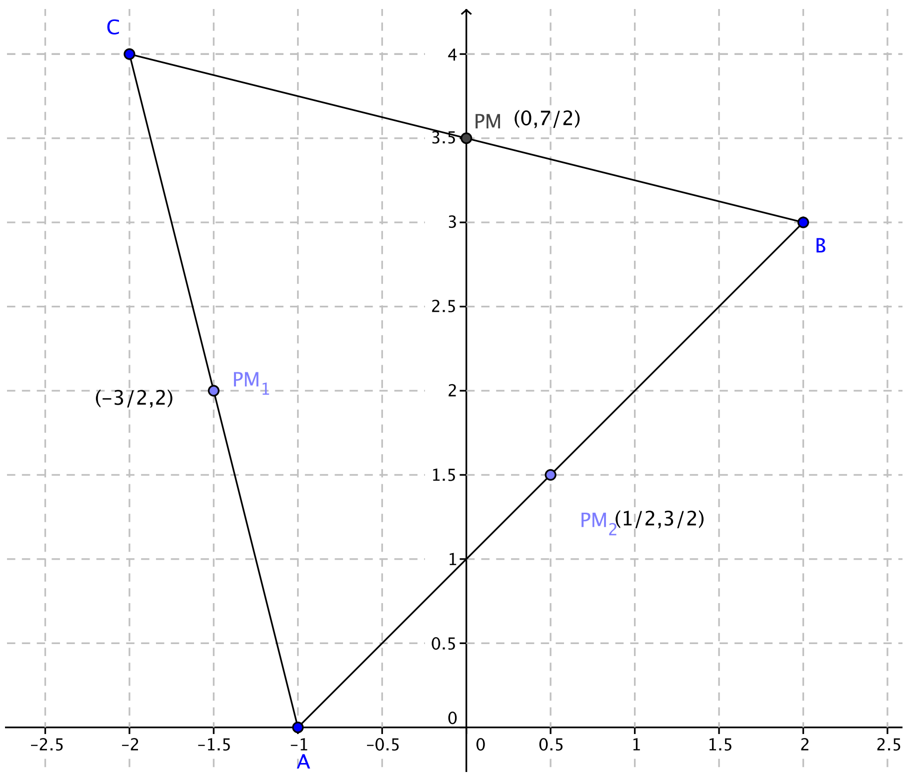
$$4 = y_1 + y_3 \text{ ecuación 3}$$

despejando y_1 y y de las ecuaciones 2 y 3 y los sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 3, y_3 = 4$$

Por lo tanto las coordenadas de los vértices son:

$$A(-1,0), B(2,3), C(-2,4)$$



Para resolver:

En parejas resuelvan los ejercicios siguientes, compartan los resultados con sus compañeros, así como la estrategia utilizada para llegar a la solución. Traza el lugar geométrico de cada ejercicio.

1. Encontrar las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento $\overline{AB}$, cuyos extremos son $A(1,-2)$ y $B(5,2)$.

2. Encontrar las coordenadas del punto P que divide al segmento cuyos extremos son $R(-2,-1)$ y $S(3,2)$, en una razón $r = -3$.

3. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $C(1,1)$ y $D(8,-2)$.

4. Calcular el área de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $A(-2,2)$ y $B(6,2)$.

5. Las coordenadas de los vértices del triángulo ΔABC son : $A(2,1)$, $B(5,3)$, $C(1,5)$, calcula la longitud de la mediana de C.

6. Dado el segmento Q(2,3), R(8,9), hallar las coordenadas del punto que divide al segmento en la razón que se indica:

a) P razón r=2

b) M razón r=3

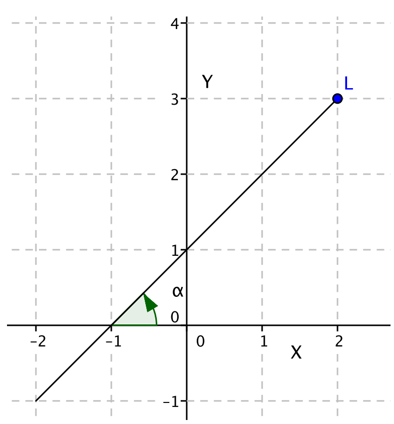
c) N razón r=$\frac{1}{2}$

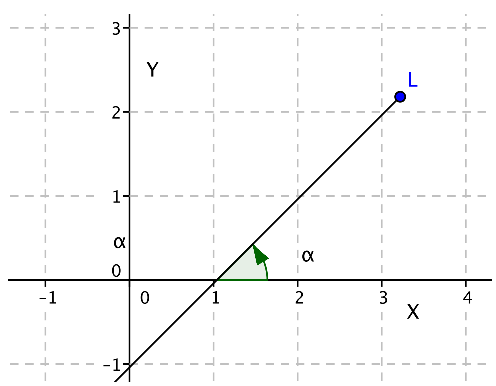
d) W razón r=-2

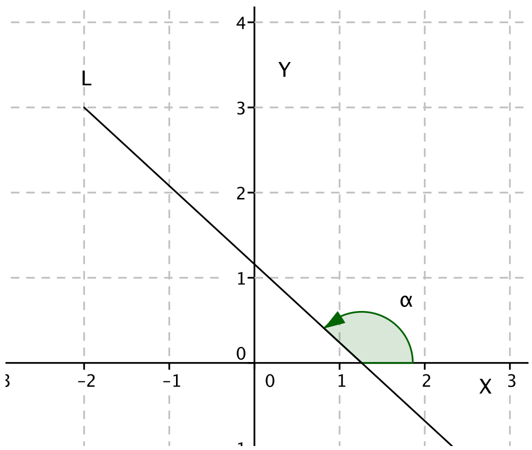
1.5. Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

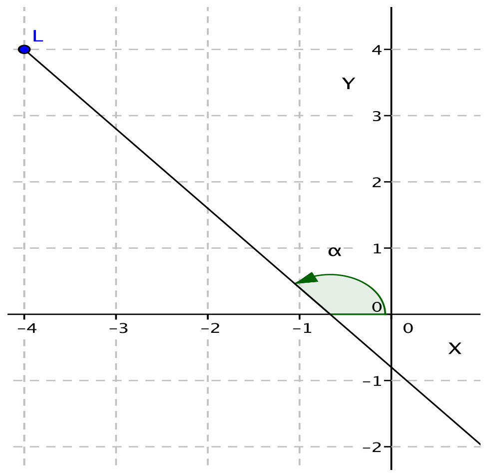
En tu curso de física se describió el movimiento de un cuerpo, si hacemos la gráfica posición contra tiempo de un móvil, la variación de la posición respecto del tiempo $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ es la velocidad, geométricamente lo que se obtiene es la pendiente de la gráfica de dicho movimiento, aquí se muestra un ejemplo de la física, sin embargo, es muy utilizada en economía, probabilidad, óptica, etc., en tus cursos de cálculo diferencial la retomarás ya que es de suma importancia.

Comencemos por definir lo que es la pendiente de una recta, una recta puede tener infinitas posiciones, pero cuando no está horizontal o vertical decimos que está inclinada, esta medida de su inclinación la llamamos pendiente. La inclinación de la recta la denotaremos con α, y es una medida del ángulo que forma la recta respecto de la horizontal (eje X en el extremo positivo), recordemos que un ángulo[1] es considerado positivo medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj observe las figuras siguientes:









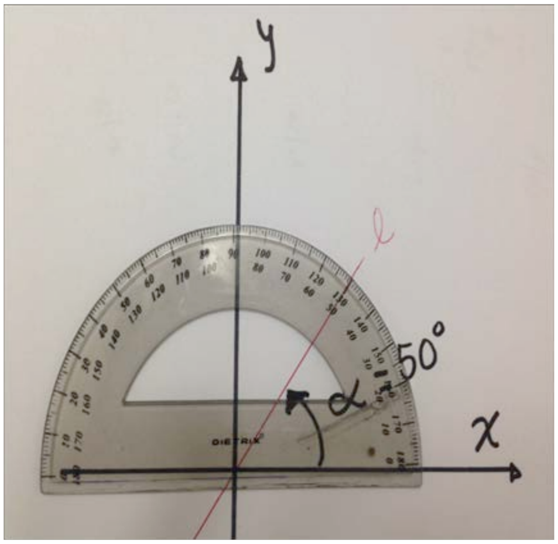
La inclinación de una recta es su ángulo de inclinación. Si la recta es horizontal tiene una inclinación de 0° o de 180°, si es vertical su inclinación es de 90°. La pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación[31], aquí es importante hacer una pausa y aclarar que no es lo mismo la pendiente de una recta que la inclinación, ya que la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación y el ángulo es la inclinación de la recta.

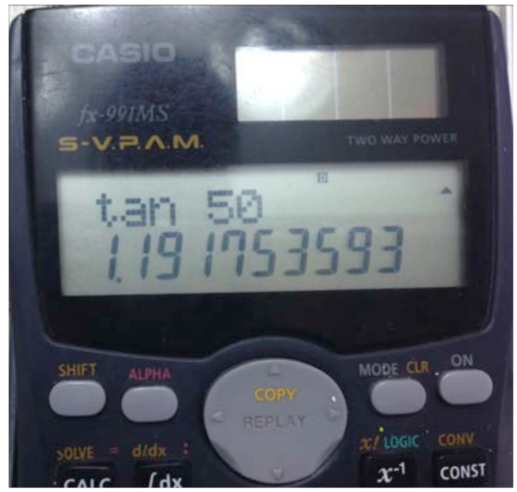
Denotaremos con la letra minúscula **m** a la pendiente de una recta y por la definición anterior podemos expresarla mediante la expresión:

$$\mathbf{m=\tan \boldsymbol{\alpha}}$$

A continuación describiremos las distintas formas de calcular la pendiente de una recta, una de ellas es cuando tenemos trazada la recta en un plano cartesiano, podemos usar un transportador, medir el ángulo de inclinación $\boldsymbol{\alpha}$ y usar la calculadora científica para calcular su tangente.

Por ejemplo si tenemos la gráfica de una recta, usamos el trasportador y medir el ángulo de inclinación:





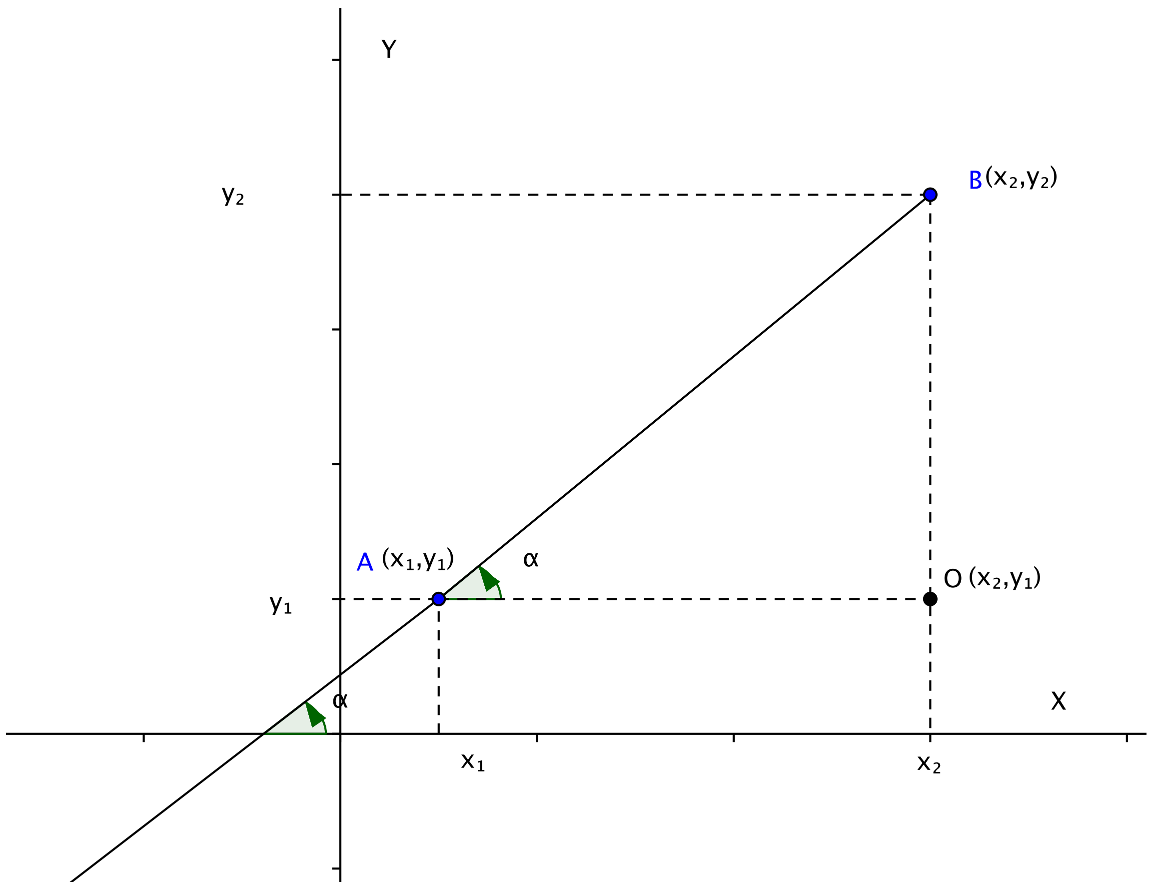
usando el transportador

Por definición m=tan α

m=tan 50°

m=1.19 la pendiente de la recta cuya inclinación es 50º vale 1.19

Otra forma de obtener la pendiente de una recta es dados dos puntos por los que pasa una recta. Sean A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2) dos puntos cualesquiera situados en una recta inclinada.



En el triángulo ΔAOB calculemos m=tan α

Nótese que $\overline{BO}$ es un segmento vertical y su magnitud es y_2-y_1

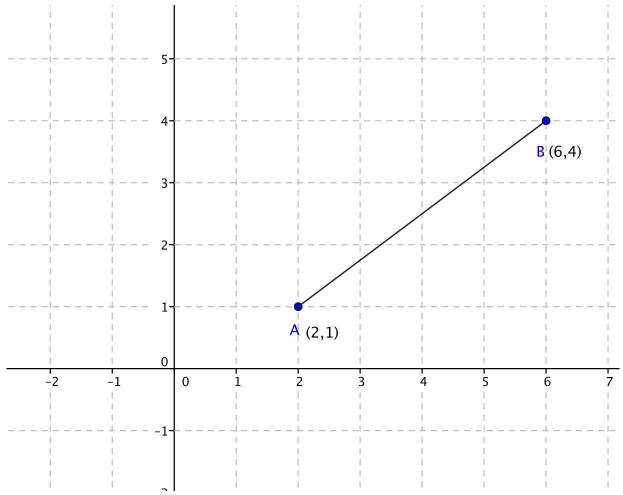
y que $\overline{AO}$ es un segmento horizontal cuya magnitud es x_2-x_1

Sustituyendo lo anterior en m tendremos:

m=tan $\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ Fórmula para calcular la pendiente cuando se conocen dos puntos de la recta.

Calcularemos la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(2,1) y Q(6,4).

Usando la fórmula y sustituyendo: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-1}{6-2} = \frac{3}{4}$

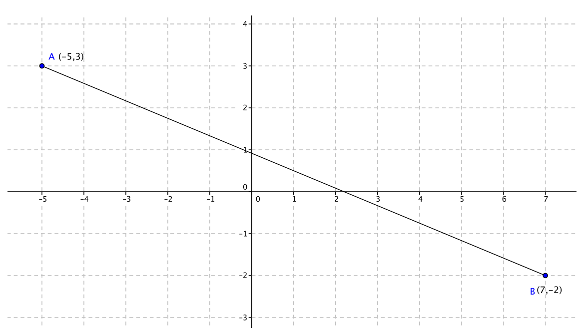


Retomando, la pendiente se puede calcular aplicando la función tangente al ángulo de inclinación, o cuando tenemos dos puntos que pertenecen a la recta, como mostraremos en el siguiente ejemplo:

Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos D(5,3) y S(7,-2)

Usando la fórmula para la pendiente dados dos puntos que pertenecen a la recta: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

m=$\frac{-2-3}{7+5} = \frac{-5}{12}$



Observa la inclinación de la recta y el signo.

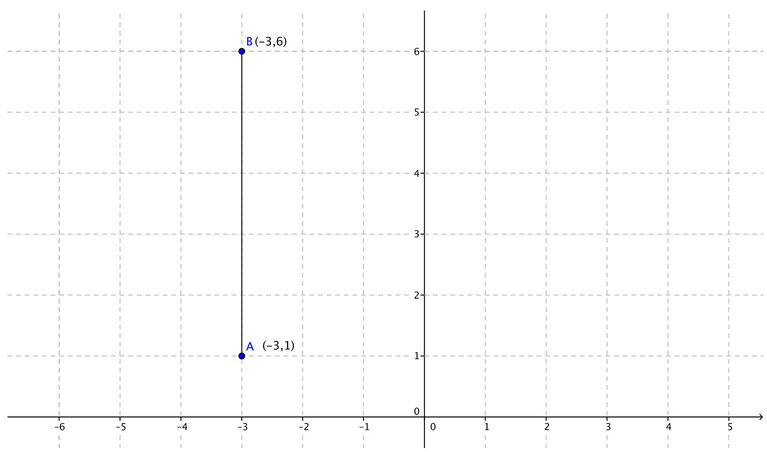
Calcula la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos A(-3,1) y B(-3,6).

Los datos que tenemos son dos puntos que pertenecen a una recta por lo tanto:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m=\frac{6-1}{-3+3}$$

$$m = \frac{5}{0}$$



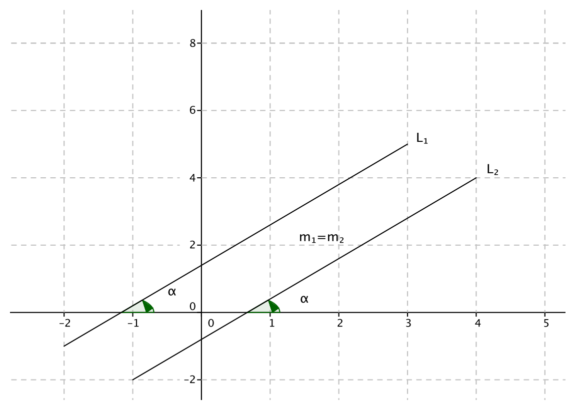
Cuando tenemos una recta vertical el denominador es cero ya que las abscisas son iguales, observa que el ángulo de inclinación es de 90º, y como se vio en tu curso anterior de Representación simbólica y angular del entorno[1] m=tan 90° = ∞, por lo que podemos concluir que

$$m_{AB} = \infty$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Si dos rectas tienen el mismo ángulo de inclinación α son paralelas, como la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación, entonces las pendientes de dichas rectas son iguales, lo anterior representa la condición necesaria y suficiente para indicar que dos o más rectas son paralelas.

Si dos rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales

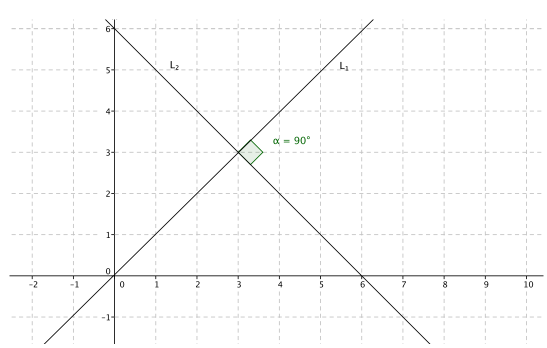


Estas condiciones son llamadas de paralelismo[32].

Si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a: - 1, esto es si una es la recíproca y de signo contrario de la otra, esto es:

$\ell_1 \perp \ell_2 \leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

Por lo tanto $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

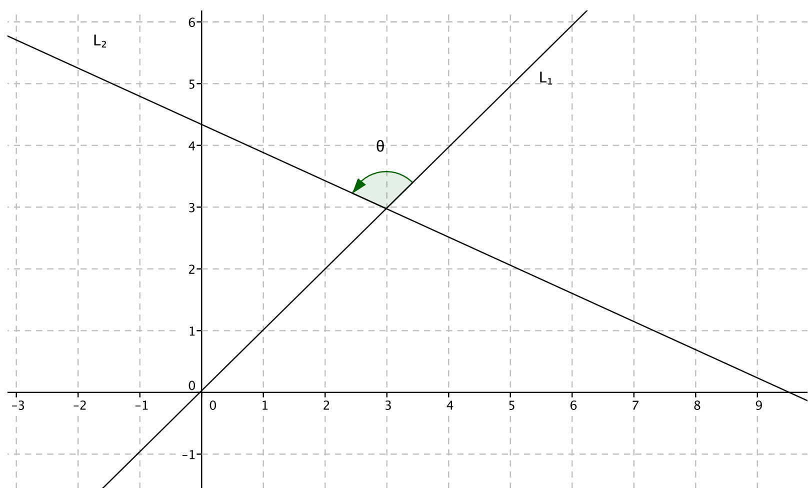


Cuando dos rectas se cortan se forman cuatro ángulos, dos pares de ellos son iguales por ser opuestos por el vértice , por lo tanto podemos calcular uno de ellos y su ángulo adyacente es suplementario.

Con la letra griega θ representaremos el ángulo formado por dos rectas que se cortan y se puede calcular mediante la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

donde m_2 es la pendiente final y m_1 la de la recta inicial esto es en el sentido positivo del ángulo[1] como se puede observar en la siguiente figura

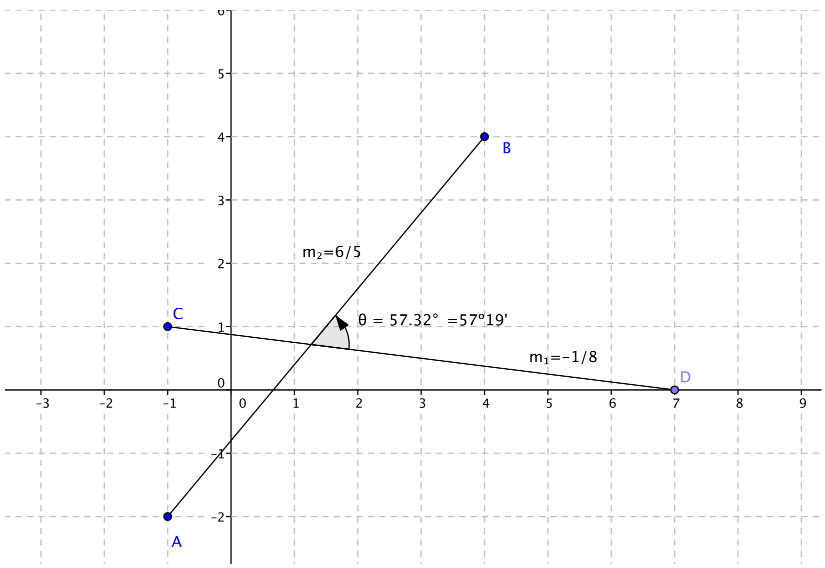


A continuación mostraremos varios ejemplos donde es de suma importancia realizar primeramente la gráfica para identificar el sentido positivo del ángulo formado entre dos rectas que se cortan, veamos los siguientes ejemplos:

Sean A (-1,-2) y B(4,4) dos puntos que pasan por la recta ℓ_1 , y C(-1,1) y

E(7,0) los puntos que pertenecen a la recta ℓ_2.

Al realizar la gráfica de las dos rectas que se cortan nos permite analizar cuál de ellas representa a la recta inicial y cual a la final para considerar el ángulo en el sentido positivo esto es en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se observa en las siguiente figura:



Calculemos $m_{AB=}\frac{4+2}{4+1}$ $m_{CD}=\frac{0-1}{7+1}$

$m_{AB}=\frac{6}{5}$ $m_1=\frac{-1}{8}$

$m_2=\frac{6}{5}$ $m_1=\frac{-1}{8}$

Sustituyendo en la fórmula para calcular el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan tenemos:

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{6}{5}+\frac{1}{8}}{1+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{6}{5}\right)}$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{53}{40}}{\frac{17}{20}}=\frac{53}{34}$$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{53}{34})$ en la calculadora se escribe shift o segunda función tan (53/34)=

$\theta = 57.32°$

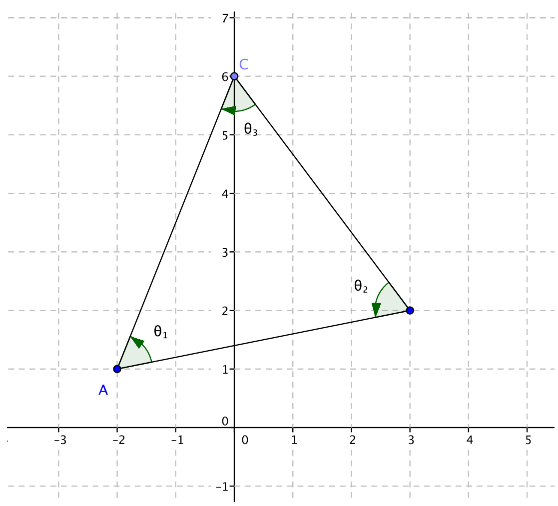
$\theta = 57° \, 19'$

teclea DMS o °′″ para convertir a grados, minutos y segundos.

Una vez encontrado el ángulo θ se pueden conocer los otros tres ángulos, ya que el opuesto a su vértice es igual y los otros dos son el suplemento de θ, ya que son dos ángulos adyacentes[33], por lo que valdrán 180°-57°19′=122°41′

Para seguir practicando calcularemos la medida de los ángulos interiores del triángulo ΔABC cuyos vértices son las coordenadas A(-2,1), B(3,2) y C(0,6).

La gráfica nos ayuda para identificar la pendiente inicial y la final, como se muestra en la siguiente gráfica:



Obsérvese que los ángulos están siendo considerados en sentido positivo, esto es, en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Calculemos las pendientes :

$m_{AB}=\frac{2-1}{3+2}=\frac{1}{5}$ $\quad m_{BC}=\frac{6-2}{0-3}=-\frac{4}{3}$ $\quad m_{CA}=\frac{6-1}{0+2}=\frac{5}{2}$

Para calcular θ_1:

$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ aquí $m_1=m_{AB}$ y $m_2=m_{AC}$

$$\tan\theta_1=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{5}}{1+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\frac{23}{10}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{23}{10}}{\frac{3}{2}}=\frac{23}{15}$$

$$\tan\theta_1=\frac{23}{15}$$

$$\theta_1=tan^{-1}\left(\frac{23}{15}\right)$$

$$\theta_1=56°53'$$

Análogamente calculemos θ_2:

$\tan\theta_2=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$ aquí $m_1=m_{BC}$ y $m_2=m_{AB}$

$$\tan\theta_2=\frac{\frac{1}{5}-(\frac{-4}{3})}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}=\frac{\frac{23}{15}}{\frac{11}{15}}=\frac{23}{11}$$

$$\theta_2=tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)=64°26'$$

θ_3 se puede calcular de la misma forma, o bien como la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale[34] 180°

$$\theta_3=180°-(56°53'+64°26')=180°-121°19'=58°41'$$

1.6. La línea recta

Elementos y su ecuación

En la naturaleza podemos encontrar muchos fenómenos que tienen una relación lineal; la temperatura y la presión son lineales, la luz viaja en línea recta, un tipo de movimiento es el rectilíneo uniforme, se pueden hacer análisis de un circuito electrónico por medio de la recta de carga[35]. En economía se puede analizar un mercado con las rectas de la oferta y la demanda. Cuando representamos una relación de proporcionalidad directa entre dos variables su representación gráfica es una línea recta. También es usada la línea recta en el modelado, diseño y construcción, como estos hay muchos ejemplos más en ciencias interesantes como la astronomía, estadística, biología celular, incluso en historia encontramos relaciones lineales del espacio tiempo[36].

Desde diferentes enfoques podemos visualizar a la línea recta:

1) Desde uno de los postulados de Euclides: dados dos puntos diferentes pasa una y solo una recta.
2) Como una ecuación
3) Como un lugar geométrico donde los puntos tienen la misma pendiente

La abordaremos desde el punto 3), comenzaremos definiendo a la línea recta como el lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $P(x, y)$ y $P1(x_1, y_1)$ del lugar, el valor de la pendiente m calculado a partir de la fórmula

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}, \qquad \text{con} \qquad x_1 \neq x_2$$

resulta siempre constante

despejando tenemos: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Teorema: la recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1,y_1)$ y tiene la pendiente dada **m**, tiene por ecuación: y-y_1 =m(x-x_1).

Comencemos a resolver algunos ejemplos con ésta fórmula conocida como forma punto pendiente.

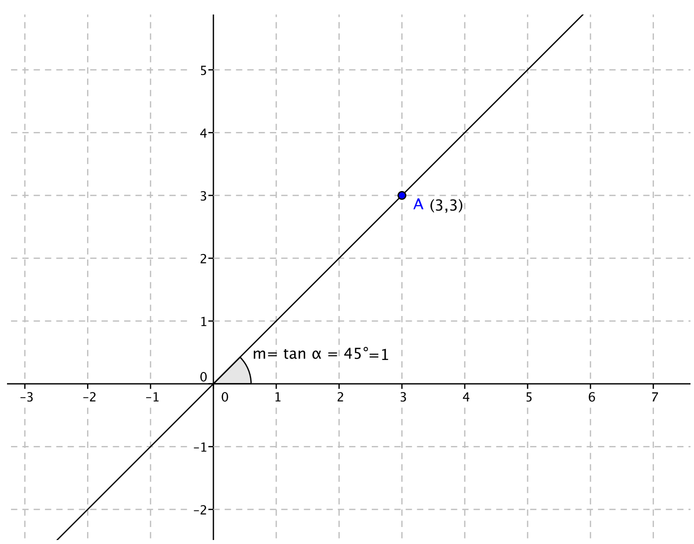
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por A(3,2) y cuyo ángulo de inclinación es α=45°.

Recordemos que la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación, por lo que m=tan 45°=1, así con la pendiente calculada y el punto dado A(3,3) usamos la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1(x - 3)$$

$$x - y = 0 \text{ Ecuación de la recta}$$



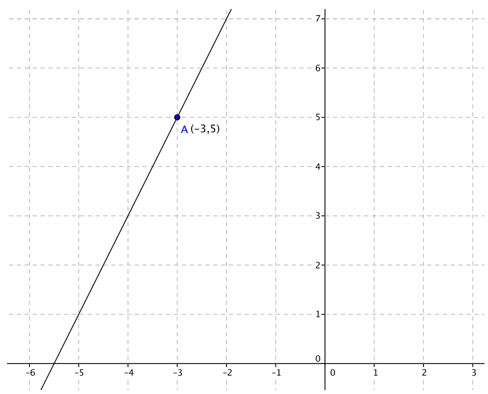
Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto B(-3,5) y que tiene una pendiente con valor de 2

Conocemos un punto que pertenece a la recta B(-3,5) y su pendiente m=2

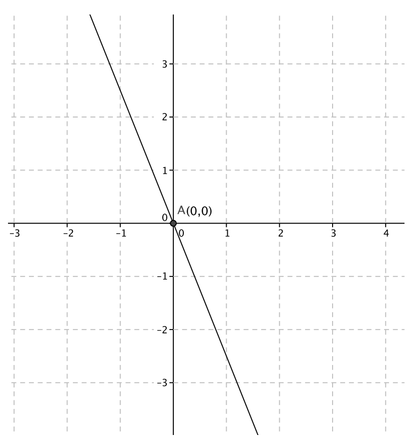
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 2(x + 3)$$

$2x - y + 11 = 0$ Ecuación de la recta



Calcularemos ahora la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene una pendiente $m = -\frac{2}{5}$



El origen de coordenadas corresponde al punto A(0,0) por lo que tenemos un punto y su pendiente, que sustituidos en la ecuación siguiente nos ayuda a encontrar la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

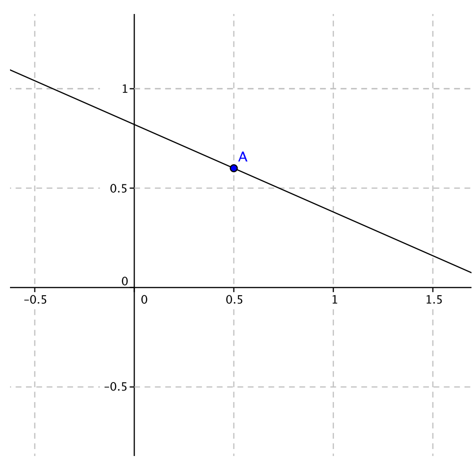
$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 0)$$

$$3y = -2x$$

$2x + 3y = 0$ Ecuación de la recta buscada

Por último pondremos un ejemplo donde las coordenadas y la pendiente son números racionales.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$ y cuya pendiente es $m = -\frac{4}{9}$



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$20x + 45y - 37 = 0$$

Ecuación de la recta conocidos dos puntos

En los ejemplos anteriores obtuvimos la ecuación de la recta cuando conocíamos un punto y su pendiente, otro caso particular es el siguiente: cuando se conocen dos de sus puntos.

Teorema: La recta que pasa por los dos puntos $P_1(x_1, y_1)\ y\ P_2(x_2, y_2)$ tiene por ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Observa que en la ecuación anterior $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es la pendiente, tu puedes elegir entre hacer dicho cálculo por separado, y con un punto y la pendiente obtener la ecuación de la recta, o bien en la ecuación anterior elegir cuál es el punto uno y dos, y sustituirlos, a continuación mostraremos algunos ejemplos.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por A(-4,2) y B(6,3).

Tenemos conocidos dos puntos por lo que podemos sustituir en:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

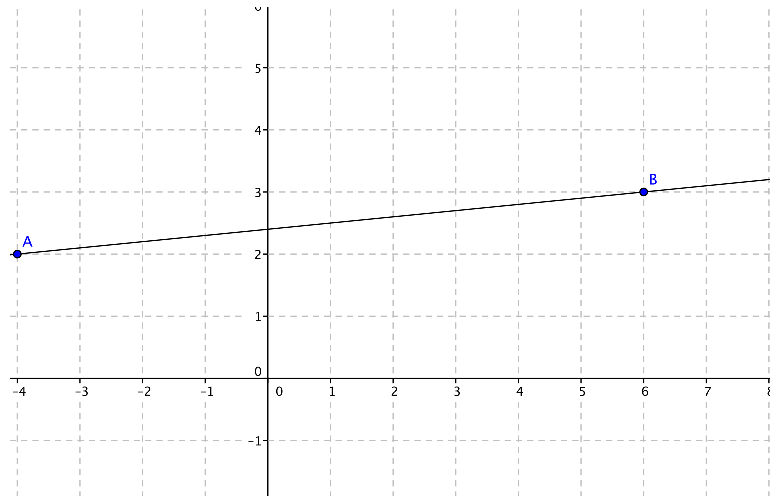
$$y - 2 = \frac{3-2}{6+4}(x - (-4))$$

$$y - 2 = \frac{1}{10}(x + 4)$$

$$10(y - 2) = x + 4$$

$$10y - 20 = x + 4$$

$x - 10y + 24 = 0$ Ecuación de la recta



Otra forma sería calcular la pendiente con la fórmula m=$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, y usar uno de los puntos, se obtiene el mismo resultado.

$$m=\frac{3-2}{6+4}=\frac{1}{10}$$

y con uno cualquiera de los puntos, en este caso tomaremos B(6,3)

$$y-3=\frac{1}{10}(x-6)$$

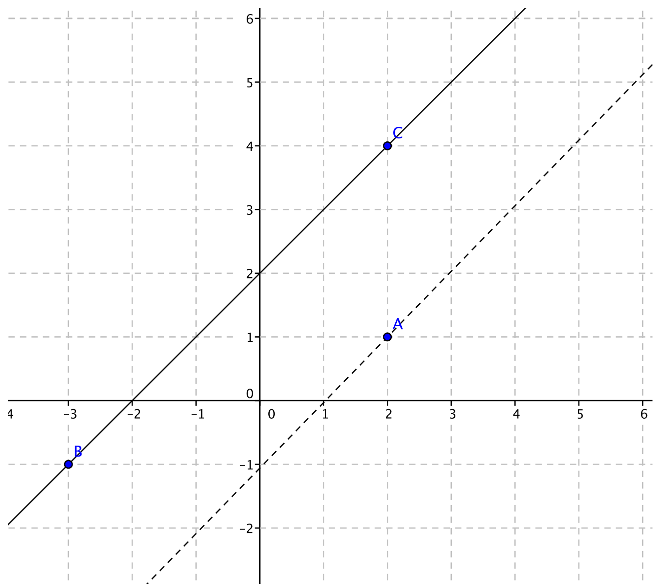
$$10y-30=x-6$$

$$x-10y+24=0$$

Ahora tienes dos opciones para encontrar la ecuación de una recta.

A continuación utilizaremos las condiciones de paralelismo para encontrar ecuaciones de la recta, veamos los siguientes ejemplos.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,1) y es paralela a la recta que pasa por los puntos B(-3,-1) y C(2,4)



Llamaremos ℓ_1 a la recta que pasa por CD y ℓ_2 a la recta que pasa por el punto A (2,1).

Como $\ell_1 \parallel \ell_2$ las pendientes son iguales, así que comencemos por calcular la pendiente m_1.

$$m_1=\frac{4+1}{2+3}=1 \therefore m_2=1$$

sustituyendo en $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ A(2,1) y m_2, tenemos:

$$y-1=1(x-2)$$

$x - y$-1=0 Ecuación de la recta ℓ_2

Ahora utilizaremos la condición de perpendicularidad con el siguiente ejemplo.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por A (3,-2) y que es perpendicular con la recta que pasa por B(-3,-2) y C(2,4).

Comenzaremos calculando m_{BC}

$m_{BC=}\frac{4+2}{2+3}=\frac{6}{5}$ por lo tanto por la condición de perpendicularidad

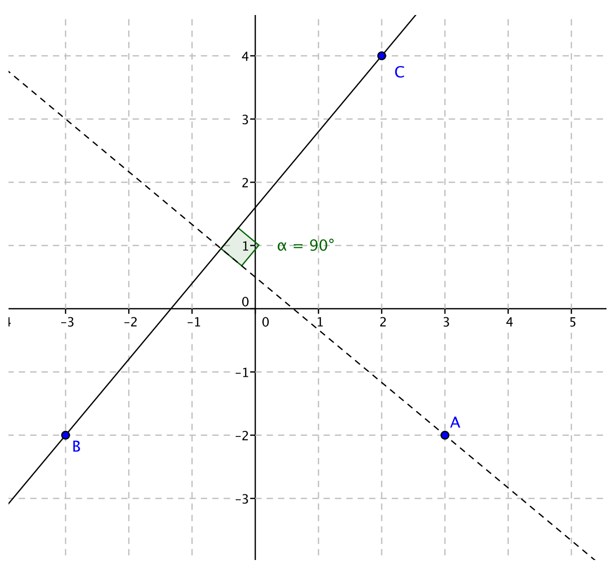
$m_A= -\frac{5}{6}$

Sustituimos en la ecuación de la recta de la forma punto pendiente:

$$y+2=-\frac{5}{6}(x-3)$$

$$6y+12=-5x+15$$

$$5x+6y-3=0$$



Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos

A (-1,-1) y B(4,5).

Una mediatriz es una recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

Calculemos las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$

$$x=\frac{X_1+X_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2} \qquad y=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$P\left(\frac{3}{2},2\right)$$

Calculemos ahora la pendiente del segmento $\overline{AB}$

$M_{AB=}\frac{5+1}{4+1}=\frac{6}{5} \therefore m_{mediatriz}=-\frac{5}{6}$

usando la fórmula punto pendiente tenemos:

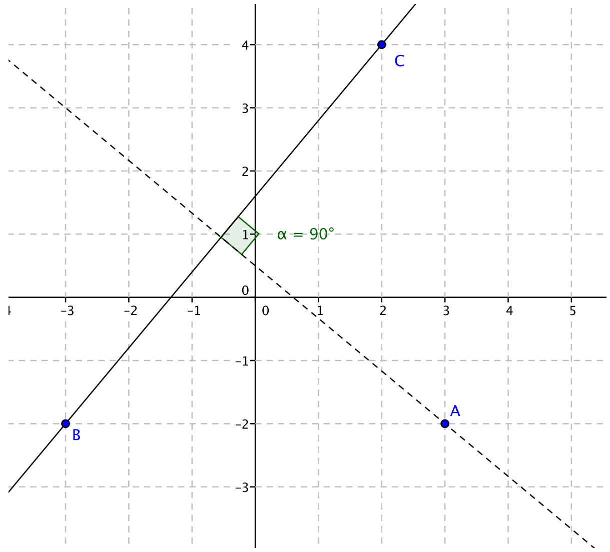
$$y-2=-\frac{5}{6}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$6y-12=-5x+\frac{15}{2}$$

$$12y-24=10x+15$$

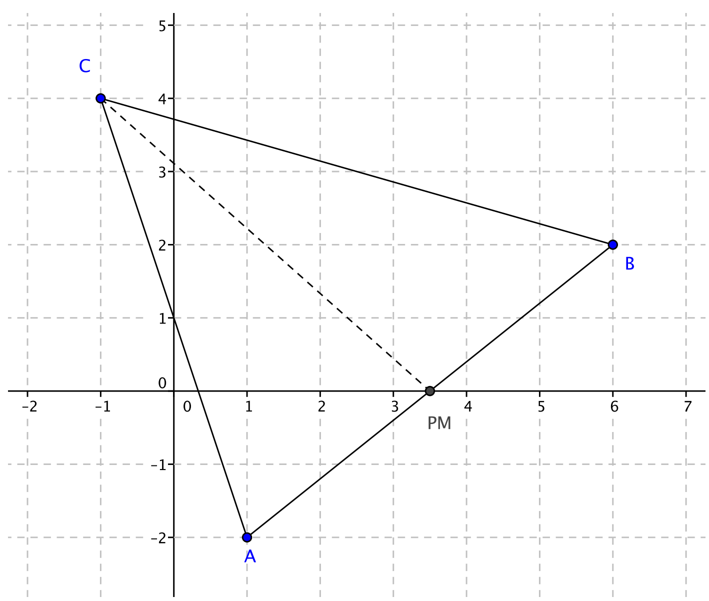
$$10x-12y+39=0$$

Ecuación de la mediatriz.



Sean A(1,-2), B(6,2) y C(-1,4) los vértices de un triángulo, hallar la ecuación de la mediana del lado AB:

La mediana es un segmento que va del punto medio de un segmento al vértice de su lado opuesto, en nuestro ejemplo el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el vértice opuesto a dicho segmento el punto C(-1,4).



Coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$:

A(1,-2) y B(6,2)

$x=\frac{X_1+X_2}{2}$ $\quad$ $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

$x=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}$ $\quad$ $y=\frac{-2+2}{2}=0$

Punto medio $(\frac{7}{2},0)$

Ahora encontraremos la ecuación de la recta que pasa por este punto medio $(\frac{7}{2},0)$ y por el vértice C(-1,4). Calcularemos primeramente la pendiente de $\overline{C-PM}$, usando un punto, puede ser C o PM y la pendiente, podemos encontrar la ecuación de la mediana.

La pendiente: $m_{C-PM}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m=\frac{0-4}{\frac{7}{2}+1}=\frac{-8}{9}$$

Usaremos C(-1,4) y m=$-\frac{8}{9}$

Sustituyendo en $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-4=-\frac{8}{9}(x+1)$$

$$9y-36=-8x-8$$

$$8x+9y-28=0$$

Ecuación de la mediana

La gráfica es muy importante ya que nos ubica cuáles puntos conocidos y cuáles los desconocidos, así como la pendiente que debemos calcular.

Hallar la ecuación de la recta ℓ_3 que tiene una pendiente m=$\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas ℓ_1: 7x+4y=13 y ℓ_2: 5x-2y=19.

Recordemos que al resolver un sistema de ecuaciones de 2×2 geométricamente estamos encontrando el punto de intersección o punto común de las dos rectas, algunos métodos son el método de igualación, sustitución, reducción o determinantes; usaremos el método de igualación que consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones e igualar los resultados.

$$\begin{cases} 7x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 19 \end{cases}$$

x=$\frac{13-4y}{7}$ $\quad$ x =$\frac{19+2y}{5}$

Igualando $\frac{13-4y}{7} = \frac{19+2y}{5}$

Despejando 5(13-4 y)=7(19+2 y)

65-20 y =133+14 y

65-133=14 y +20 y

-68=34 y

- $\frac{68}{34} = y$

y =-2

Sustituyendo y=-2 en cualesquiera de los despejes de x, tenemos:

x=$\frac{13-4y}{7}$

$x = \frac{13-4(-2)}{7} = \frac{13+8}{7} = \frac{21}{7} = 3$

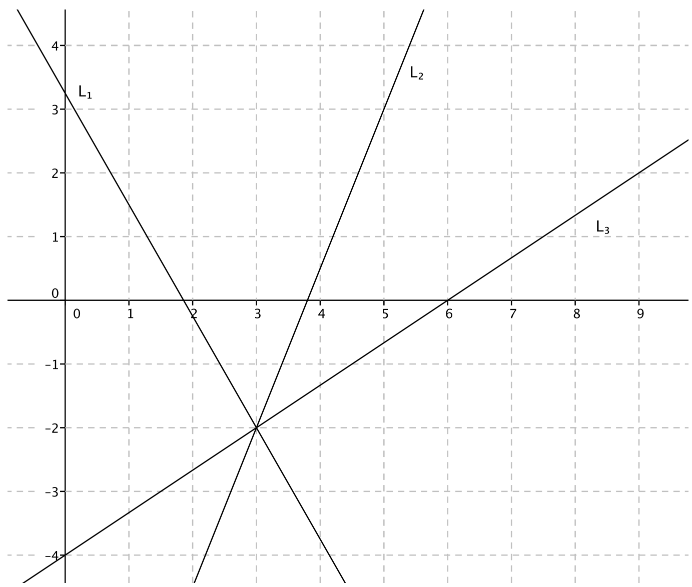
Por lo tanto el punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 es (3,-2), dado este punto y la pendiente de la recta 3, m=$\frac{2}{3}$ tenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y\text{-(-2)}=\frac{2}{3}(x-3)$$

$$3\,y + 6 = 2\,x\text{-}6$$

$2\,x$-3 y -12=0 ecuación de ℓ_3



Para trazar las rectas, una forma práctica es identificar dónde cortan a los ejes, esto es dónde cortan al eje **X** (hacemos y=0), y dónde cortan al eje **Y** (hacemos x=0), veamos un ejemplo:

Indicar las intersecciones de la recta 5 x +10 y+20=0 con los ejes de coordenadas.

Hacemos y =0 en la ecuación 5x+10(0)+20=0

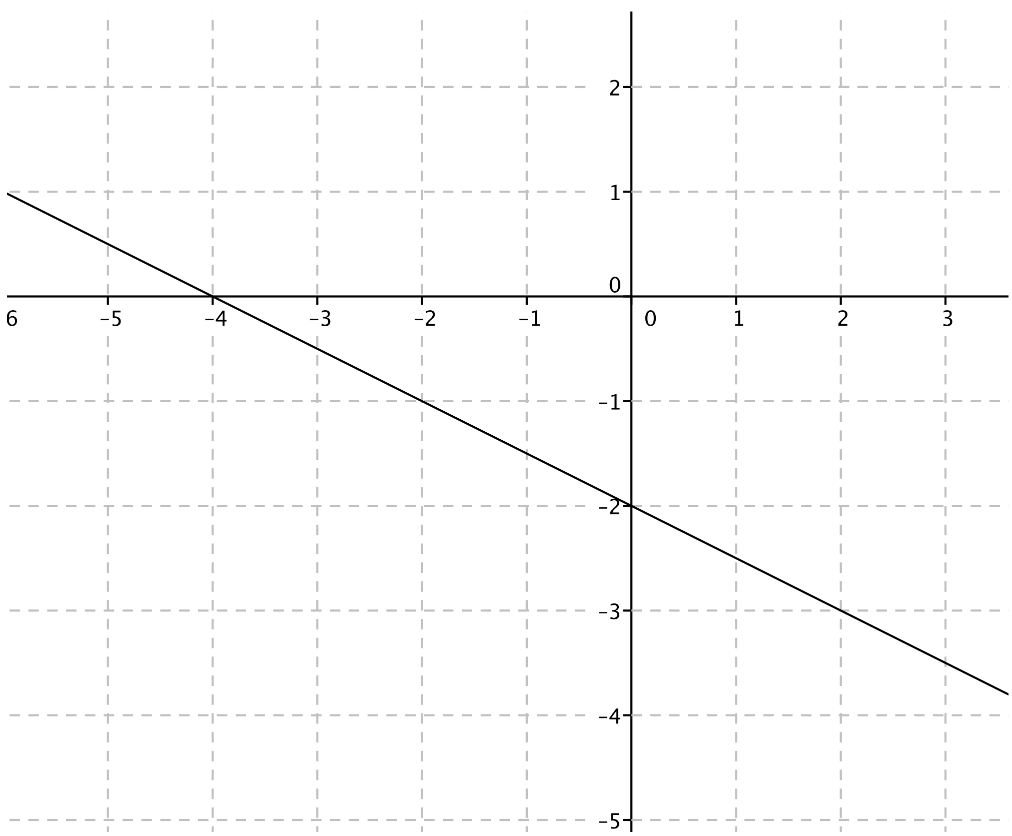
5x=-20

x =-4 ∴ (-4,0) son las coordenadas donde corta al eje **X**

Hacemos x =0 en la ecuación 5(0)+10 y +20=0

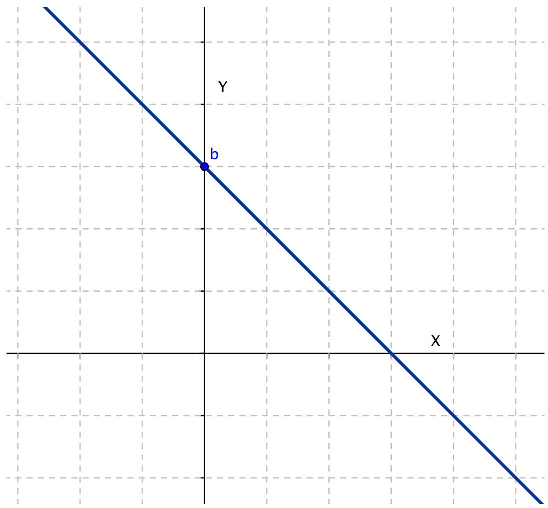
10 y =-20

y =-2 ∴ (0,-2) son las coordenadas donde corta al eje **Y**



Ecuación de la recta forma pendiente ordenada al origen

Hemos visto algunos ejemplos de cómo obtener la ecuación de la recta cuando se conocen un punto y la pendiente y dos puntos, veamos ahora cómo encontrarla cuando lo que se conoce en dónde corta al eje de las Y (ordenada al origen b) y su pendiente m.



Al conocer dónde corta al eje **Y** (ordenada al origen b) se conoce la coordenada de dicho punto, ya que su abscisa es cero, esto es (0,b) y conocemos la pendiente m podemos sustituir en la ecuación punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ y tendremos}$$

$$y - \text{b} = \text{m}(x - 0)$$

$$y - \text{b} = \text{m}\, x$$

$$y = \text{m}\, x + \text{b} \quad \text{Forma pendiente ordenada al origen}$$

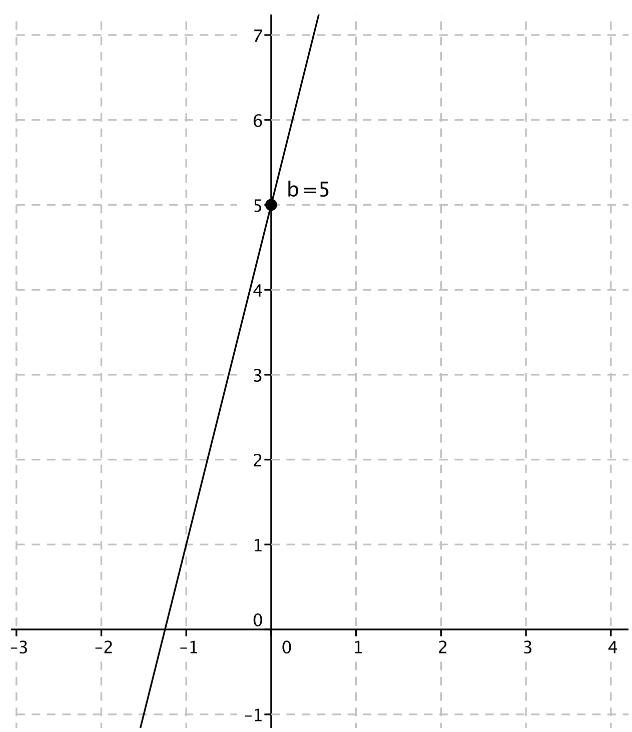
Aunque siempre puedes usar la forma punto pendiente, podemos encontrar directamente la ecuación con los datos que tenemos, ordenada al origen y pendiente, resolvamos algunos ejemplos para utilizar dicha fórmula:

Hallar la ecuación de la recta cuya ordenada al origen es b=5 y su pendiente es m=4

Sustituyendo en: $y = mx + b$

$$y = 4x + 5$$

$4x - y + 5 = 0$ Ecuación de la recta



Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de $6x+2\ y\ -6=0$.

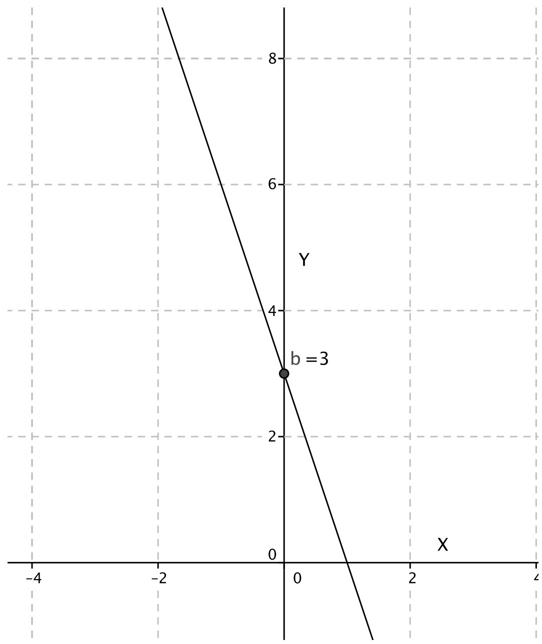
Para encontrar los elementos pedidos llevemos la ecuación a la forma: $y = mx + b$

$$6x+2\ y\ -6=0$$

$$y = -3\ x\ +3$$

Por lo tanto:

m=-3 y b=3



Forma simétrica de la ecuación de la recta

Recordemos que b representa a la ordenada al origen o punto de intersección donde la recta corta al eje **Y**, de la misma forma hay un punto de intersección de la recta con el eje **X**, que llamaremos abscisa al origen y la denotaremos con la letra a, observe la figura:

Estos dos cortes en realidad también son dos puntos que pertenecen a la recta (0, a) y (0,b), si utilizamos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y calculamos la pendiente de la recta tendremos m=$-\frac{b}{a}$ tomando un punto cualesquiera y dicha pendiente, los podemos sustituir en $y - y_1 = m(x - x_1)$ y tendremos: y-b=$-\frac{b}{a}$(x-0)

a y- a b= -bx

bx + a y= a b dividiendo todo entre ab

$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ esta es la ecuación de la recta en su forma simétrica.

Resolvamos algunos ejemplos:

Hallar la ecuación de la recta que corta a los ejes **X** y **Y** en 6 y -2 respectivamente.

Observe que a =6 y b=-2

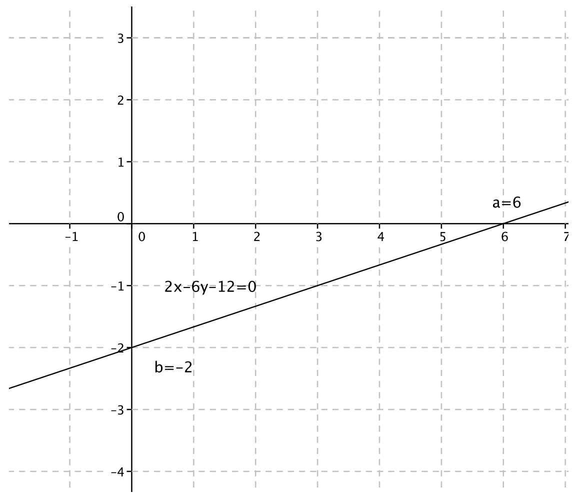
Sustituyendo en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenemos

$\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} = 1$

$\frac{2x-6y}{12} = 1$

$2x - 6y = 12$

$2x - 6y - 12 = 0$ Ecuación de la recta



A partir de la ecuación de la recta podemos regresar a la forma simétrica y obtener la abscisa y ordenada al origen como veremos en el siguiente ejemplo.

Hallar las intersecciones con los ejes de la recta cuya ecuación es:

$$7x - 2y + 14 = 0$$

Llevemos la ecuación a la forma simétrica dividiendo entre el término independiente ya que necesitamos que sea igual a 1

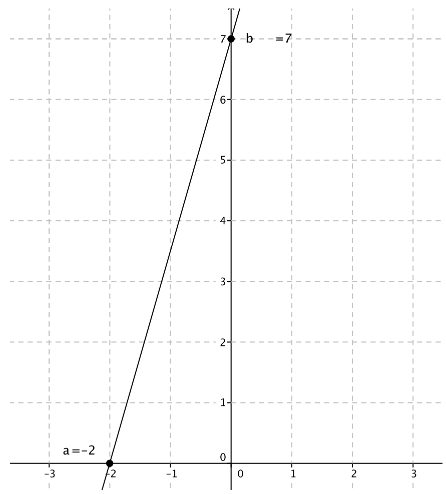
$$7x - 2y = -14$$

$$\frac{7x - 2y}{-14} = \frac{-14}{-14}$$

$$\frac{7x}{-14} + \frac{2y}{14} = 1$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} = 1$$

$$\therefore a = -2 \text{ y } b = 7$$



Ecuación general de la recta

En los ejemplos anteriores se pidió encontrar la ecuación de la recta, y se llegó a la forma $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C ∈ ℝ, esta es llamada la forma general de la ecuación de la recta. Un ejercicio interesante es a partir de la ecuación general de la recta obtener las formas particulares de la ecuación de la recta, comenzaremos por obtener la forma simétrica, para esto dividimos la ecuación entre – C para que el término independiente sea igual a 1:

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = \frac{-C}{-C}$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

que es la forma simétrica, de aquí se deduce:

$$a = \frac{-C}{A} \quad \text{y} \quad b = \frac{-C}{B}$$

Ahora obtengamos la forma pendiente ordenada al origen:

En $Ax + By + C = 0$ despejamos y:

$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ forma pendiente ordenada al origen, se deduce:

m=$\frac{-A}{B}$ y se comprueba que b= $\frac{-C}{B}$

De lo anterior se puede resumir que si tenemos la ecuación general de la recta

$$Ax + By + C = 0$$

Su pendiente, abscisa al origen y ordenada al origen son respectivamente:

$$m = \frac{-A}{B} \quad , \quad a = \frac{-C}{A} \quad \text{y} \quad b = \frac{-C}{B}$$

A continuación resolveremos algunos ejercicios donde aplicaremos lo anterior.

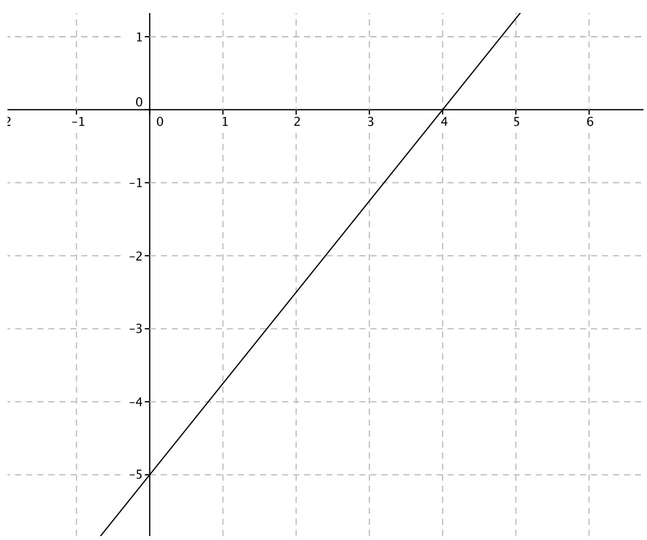
Hallar el valor de la pendiente, la abscisa al origen y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación $5x - 4y - 20 = 0$.

La ecuación $5x - 4y - 20 = 0$ y Ax +By + C=0 se corresponden ∴

A=5, B=-4 y C=-20, sustituyendo en m =$\frac{-A}{B}$, a =$\frac{-C}{A}$ y b=$\frac{-C}{B}$

Tenemos:

m=$\frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$ a=$\frac{-(-20)}{5}$=4 y b=$\frac{-(-20)}{-4} = -5$



Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1,-1) y es paralela con la recta:

$$5x - 4y - 20 = 0$$

Para graficar obtenemos a y b y tendremos a =4 y b=-5 además m=$\frac{5}{4}$ como la recta pasa por (1,-1) y es paralela con $5x - 4y - 20 = 0$

tienen la misma pendiente ∴ su pendiente es m=$\frac{5}{4}$

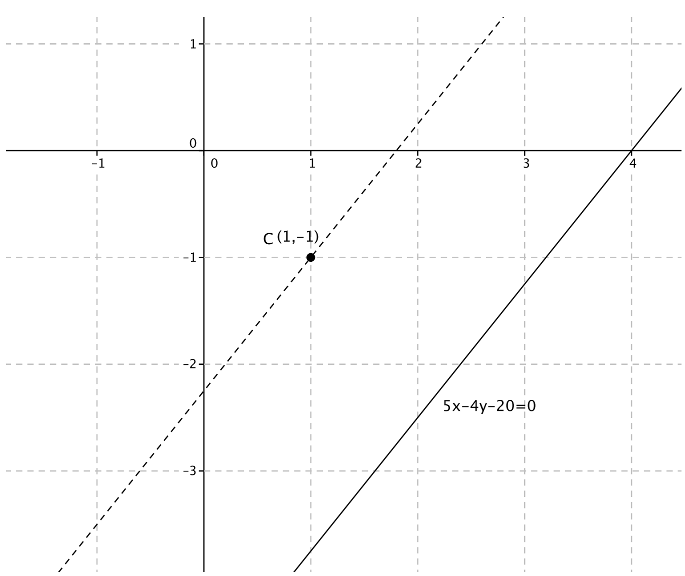
Usando la fórmula para la ecuación de la recta en la forma punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

$$4y + 4 = 5x - 5$$

$5x - 4y - 9 = 0$ Ecuación buscada

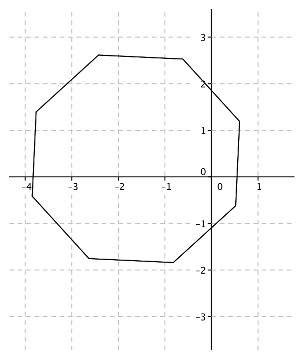


1.7. Problemario

1. Grafica los siguientes puntos en un plano cartesiano, une los puntos indicando el polígono que se forma: A(1,-2), B(3,0), C(1,2) y D(-1,10)

2. Indica si los siguientes puntos representan una relación o una función: A(2,4), B(7,9), C(3,4) y D(6,5)

3. Indica si la siguiente gráfica representa una función



4. Indica el dominio y contradominio de la función: $3y - 5x + 15 = 0$ y traza el lugar geométrico.

5. Calcular la distancia entre los puntos M (1,1) y N(4,5)

6. Hallar las coordenadas de los puntos C y D que trisecan al segmento cuyos extremos son los puntos A(4,7) y B(-2,4)

7. Calcular el valor de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(3,0) y B(0,3)

8. Hallar el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es igual a $\frac{1}{2}$

9. Encuentra el ángulo θ que se forma cuando dos rectas se cortan, si conocemos dos de los puntos que pertenecen a cada una de ellas, $\ell_1: A(-7,-2)\ y\ B(3,5)$, $\ell_2: C(4,-3)\ y\ D(-3,3)$

10. Demuestra usando pendientes si las rectas $\overleftrightarrow{AB}\ y\ \overleftrightarrow{CD}$ son paralelas o perpendiculares si A(3,0), B(0,-5), C(2,-4) y D(5,1)

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1,-1) y B(3,2). Traza su gráfica

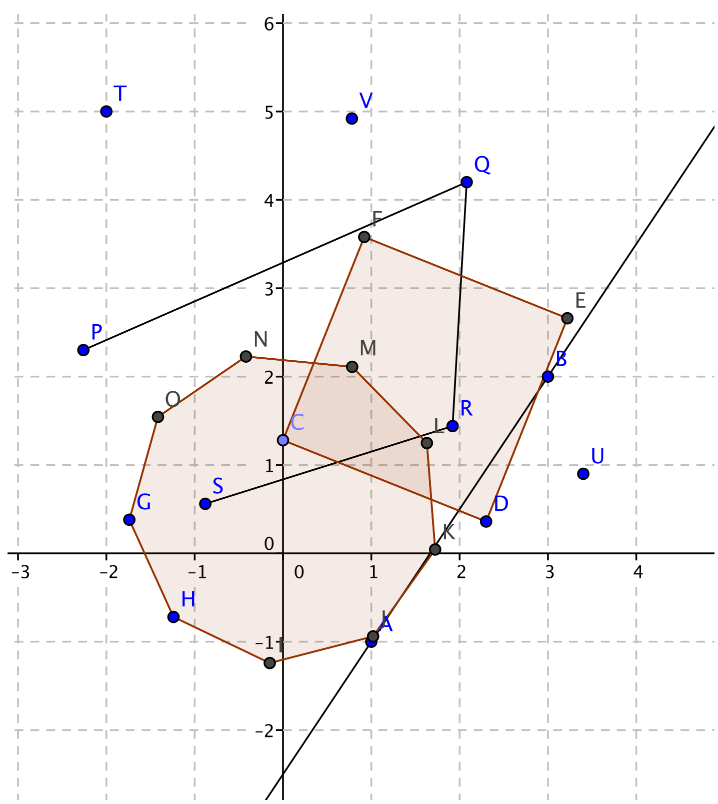
1.8. Autoevaluación

1. Calcular el perímetro del cuadrilátero que pasa por los puntos P(-3,-5), Q(3,-2), R(2,4), S(-2,2)

2.Prueba que las coordenadas $A(0,1)$, $B(0,5)$ y $C(\sqrt{12},3)$ son los vértices de un triángulo equilátero

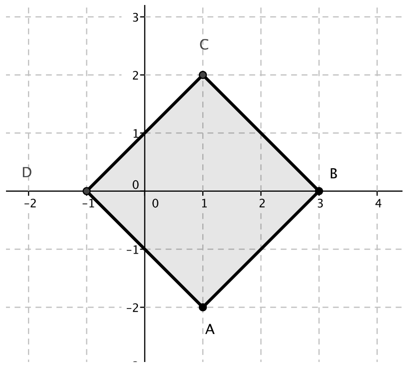
3. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1), B(4,4) y C(0,6)

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (6,4) y (7,-3)

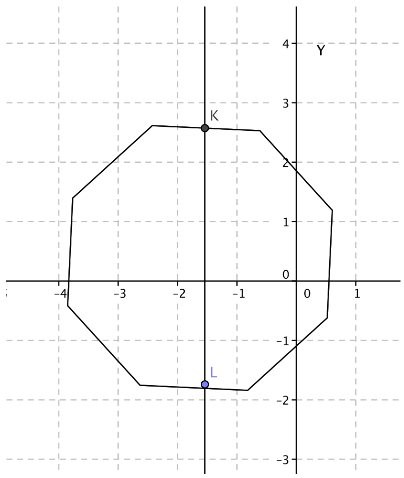


1.9. Soluciones del problemario

1. El polígono representado es un cuadrado



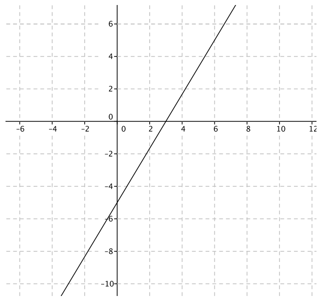
2. Una función ya que no hay dos parejas distintas con el mismo primer valor



3. La prueba de la recta vertical paralela al eje Y, muestra que no es una función, ya que hay dos puntos diferentes con el mismo primer valor de la abscisa.

4. Dom={x/x$\epsilon\mathbb{R}$}

Cod={y/y$\epsilon\mathbb{R}$}



5. $d_{MN} = 5$

6. C(2,6) y D(0,5)

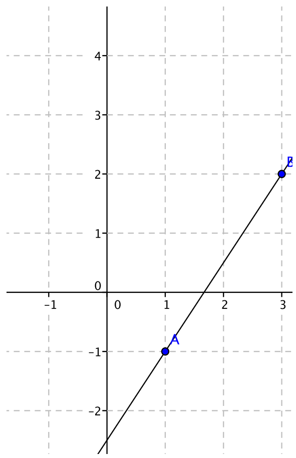
7. m=-1

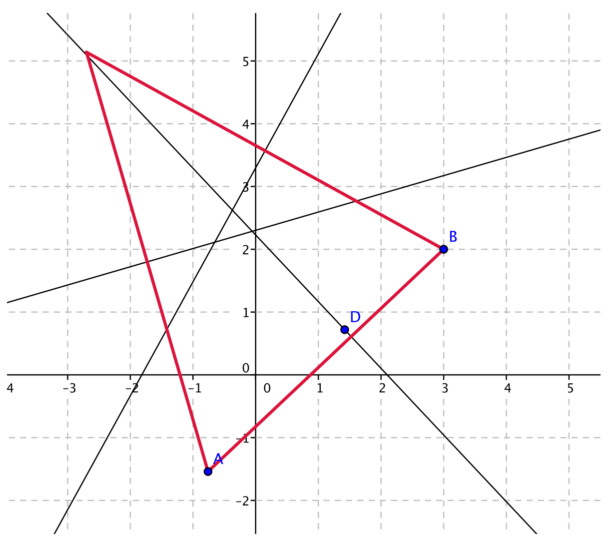
8. $m = \tan \propto \therefore \propto = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26°33'$

9. $75°35'$

10. $m_{AB} = m_{CD} = \frac{5}{3} \therefore son\ paralelas$

11. $3x - 2y - 5 = 0$





1.10. Soluciones de autoevaluación

1. P=24.32u

2. $d_{AB} = 4$

   $d_{BC} = 4$

   $d_{AC} = 4 \therefore es\ equilátero$

3. Podemos usar cualquiera de los tres lados como base, usemos $\overline{AB}$.

Calculando la distancia entre los puntos A y B

$d_{AB}=\sqrt{(4-1)^2+\ (4-1)^2}=\sqrt{18}$

Si consideramos $\overline{CP}$ como la altura del triángulo, tendremos que calcularla; para ello calculamos primero la distancia entre los puntos A y C, que es la hipotenusa del ΔAPC:

$d_{AC}=\sqrt{(6-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

Calculemos ahora el ángulo formado entre las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$

que llamaremos θ_1

$\tan\theta_1=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{-5-1}{1+(1)(-5)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

$\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=56°18'$

Usemos ahora la función trigonométrica seno[1] de θ_1

$\text{sen}\ \theta_1=\frac{\overline{CP}}{\sqrt{26}}$

$\text{sen}\ 56°18'=\frac{\overline{CP}}{\sqrt{26}}$

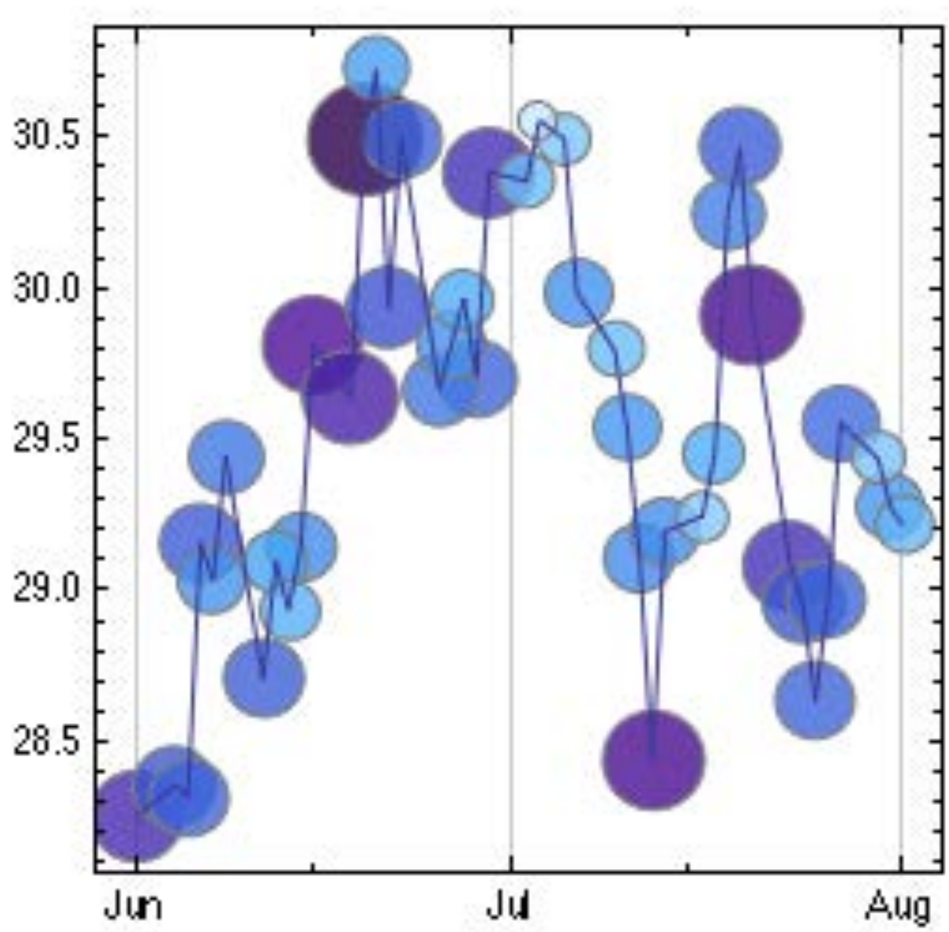
$\overline{CP}=\sqrt{26}\ \text{sen}\ 56°18'$

$\overline{CP} = 4.24$

Recordemos que lo que queremos calcular es el área del triángulo, ya tenemos la base $\overline{AB} = \sqrt{18}$, y la altura $\overline{CP} = 4.24$

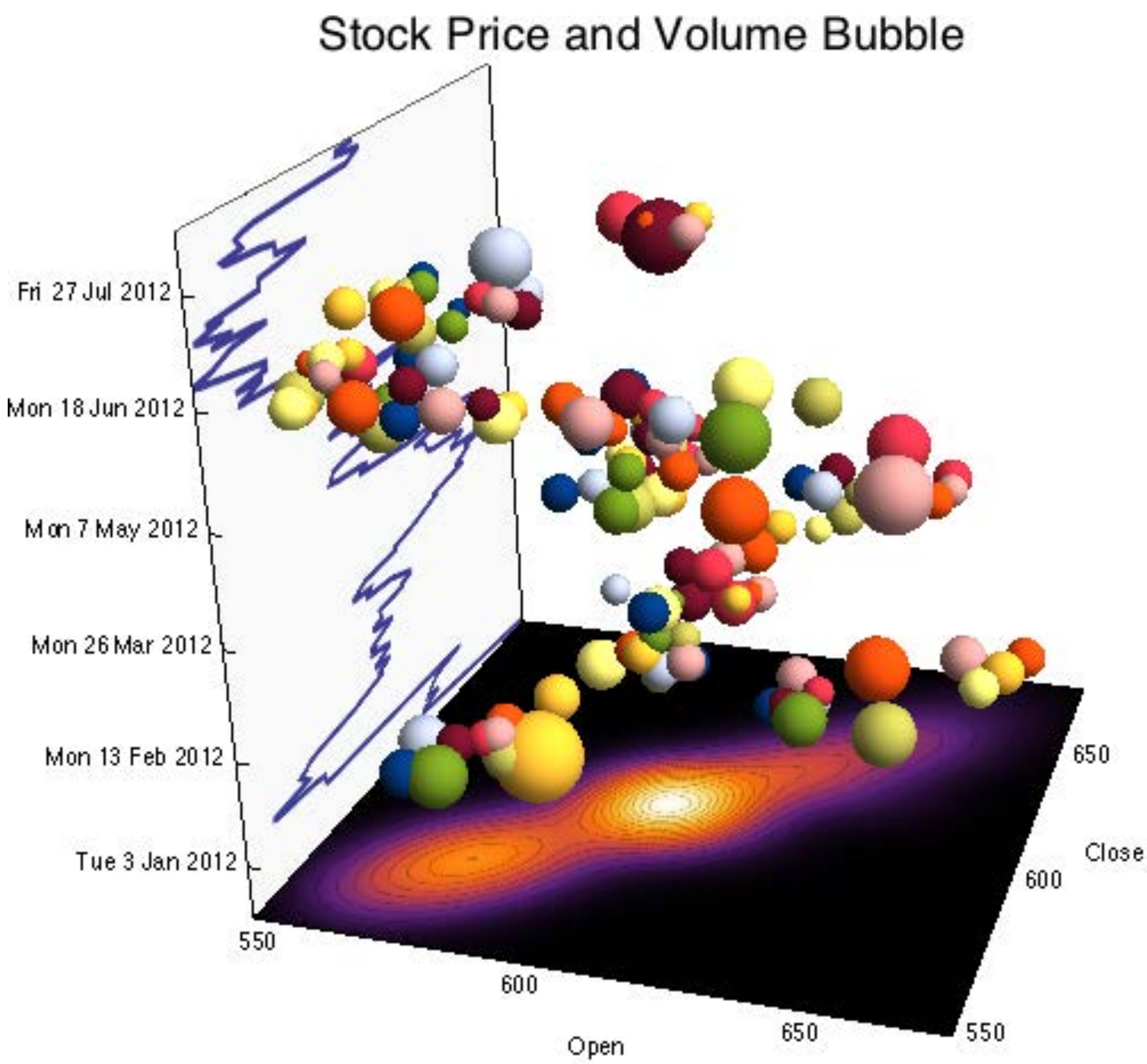
A=$\frac{bh}{2} = \frac{(\sqrt{18})(4.24)}{2} = 8.99\ u^2$

4. $7x + y - 46 = 0$



1.11. Conclusiones

En nuestra vida cotidiana podemos concentrar muchas relaciones que se comportan de forma lineal, así crecimiento de bacterias, proporcionalidades directas tales como el consumo de agua, algunas compras de productos, vimos cómo podemos representarlas mediante gráficas y éstas pueden ayudar a realizar extrapolaciones de las mismas, para predecir posibles resultados. Te invitamos a profundizar en los temas vistos que serán de gran utilidad para tus próximos cursos.



Referencias

[1] Carreño García, J. Jesús & Ochoa Hernández, Silvia. (2014) Representación simbólica y angular del entorno. México: CONALEP/CIE.

[2] Levin Judith (2009) Hammurabi. USA: Infobase Publishing.

[3] Cardona Ángel (2012) Breve historia de la astronomía. España: Ediciones Nowtilus, S.L.
[4] Tapia Víctor (2010)Formas y geometría de rango superior. Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

[5] Kasner Edward, Newman James(2007) Matemáticas y la imaginación. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

[6] Xuan Thuan Trinh (1988) La Mélodie secrète. España: Ediciones de Intervención Cultural/Biblioteca Buridán

[7]Jean-Paul Collette(1993) Historia de las Matemáticas Vol. II. España: Siglo XXI de España Editores, S.A.

[8] Pérez, Miguel A. (2004) Una historia de las matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes. España: Editorial visión libros

[10] Engler Adriana, et al.(2010) *funciones*. Argentina:UNL

[11] A. Bak Thor,Lichtenberg Jonas(1972)*Functions of one several variables*. España:Reverté

[12] Prawda W. Juan(1995)*Métodos y modelos de investigación de operaciones*.México: LImusa

[13] Biografías y Vidas.revista electrónica.
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/euler.htm

[14] Euler(1988),*Introduction to analysis of the infnite*,Book I, trad. John Blandon,New York:Springer-Verlag

[15] Enciclopedia Británica.
http://www.britannica.com/EBchecked/topic/165066/Peter-Gustav-Lejeune-Dirichlet

[16] Axioma: proposición tan obvia, clara y sencilla que se admite sin demostrar

[17] http://www.e-torredebabel.com/Historia-de-la-filosofia/Filosofiagriega/Platon/TeoriadelasIdeas.htm recuperado 13 de junio de 2011.

[18] Ignacio Barradas (COMO VES)* (Fecha publicación:30/3/2005)revista electrónica (p.1)

[19] Geral James Holton, Stephen G. Brush.(1996). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*.España:Reverté

[20] http://www.astroseti.org/articulo/4494/biografia-de-johann-bernoulli

[21] Euler, Introduction to analysis of the infinite, Book I, trns. <john Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988,p.3.

[22] Leonhard Euler.*Métodos de máximos y mínimos*.España:Universidad Autónoma de Barcelona

[23] Larson Ron, Hostetler Robert (2008) Pre-calculus. USA: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.

[24] Guerra T. Manuel (1994). *Geometría analítica.* México: McGraw-Hill

[25] Juan Manuel Silva &Adriana Lazo (2003). *Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo. México: Limusa*

[27] Rodríguez Núñez, Marisol& et. al. (2011). Representación gráfica de funciones. México: CONALEP/CIE

[28] Pierce Banjamín (2009). *Genética: un enfoque conceptual.* Madrid: Médica panamericana

[29] Cuando se encuentran en el mismo par de cromosomas homólogos

[30] Las distancias en los mapas genéticos se miden en unidades de mapa, que se abrevia u.m.

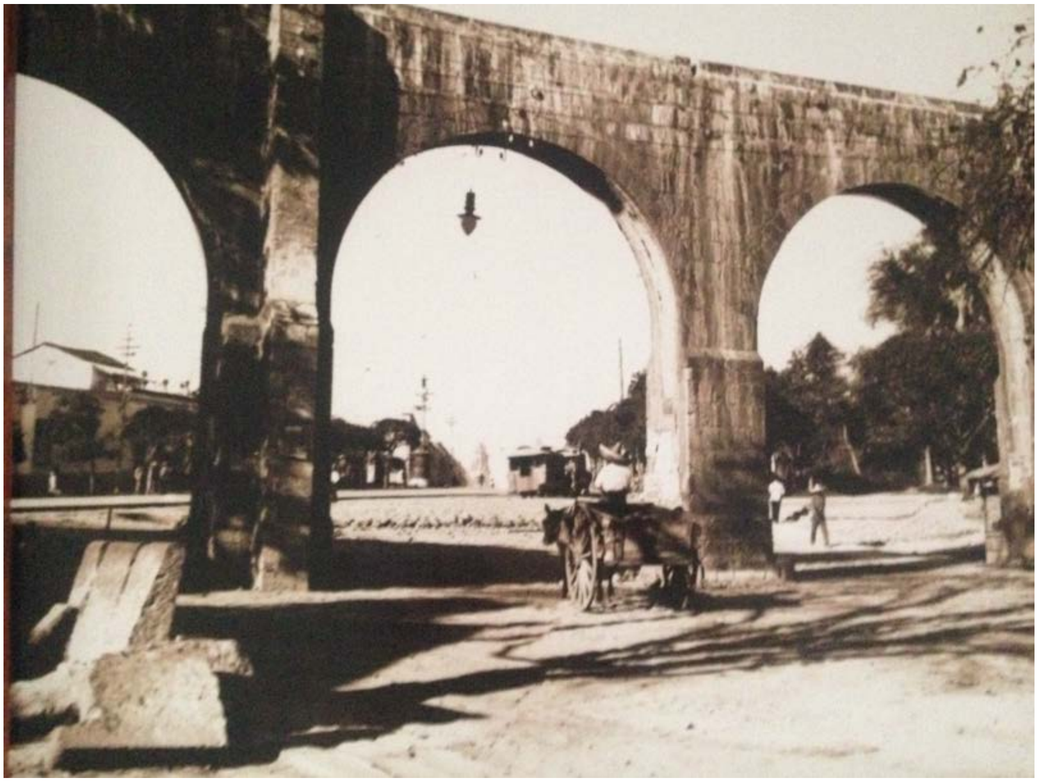
[31] May Moreno, José A. (2003). *Matemáticas 3: trigonometría y geometría analítica básicas. México: Progreso*

[32] Pimienta P., Julio H.; et al. (2006). *Matemáticas II: un enfoque constructivista. México: Pearson*

[35] Gabiola, Francisco J.; et al. (2007) Análisis y diseño de circuitos electrónicos analógicos. Teoría y Ejercicios Resueltos. Madrid:Visión Libros

[36] Rodriguez Núñez, Marisol & et. al. (2011). Representación gráfica de funciones. México: CONALEPMICH/CIE

Capítulo 2: Representación gráfica y uso de curvas canónicas



Introducción

Las cónicas que estudiarás en este curso fueron estudiadas desde la antigüedad por los Griegos, estas curvas se obtienen cuando se hacen cortes con un plano en un cono circular recto, las cónicas que se obtienen son la parábola, la elipse y la hipérbola, pero también se pueden obtener curvas degeneradas como la circunferencia o un punto. Comenzaremos con el estudio de la circunferencia utilizada desde tiempos remotos como fue la invención de la rueda, diseños de relojes, armas, en astronomía prediciendo el movimiento de estrellas, planetas o satélites ya que siguen órbitas elípticas que son un caso particular de la circunferencia, en sistemas de navegación, en la descripción del movimiento circular uniforme y uniformemente acelerado, si observas a tu alrededor notarás que en el deporte se usa en las bicicletas, en las canchas donde se marcan áreas especiales, en el diseño arquitectónico constantemente lo podemos observar.

La circunferencia[1] para los Griegos es la curva geométrica de mayor belleza, es casi imposible no imaginar sus aplicaciones, el hombre la ha usado desde el arte hasta la tecnología y cómo no mencionar la rueda. La circunferencia[2] se obtiene cuando a un cono recto se le hace un corte perpendicular a su eje, por un plano.

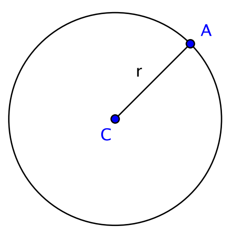
En el arte, arquitectura, diseño, está presente

Euclides[3] introduce la definición de circunferencia de manera intuitiva como un postulado: "Se puede trazar una circunferencia con centro y radio dado".

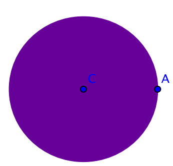
Hilbert la define como el lugar geométrico de puntos en el plano que satisfacen cierta congruencia .

En geometría plana, una circunferencia[4] es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de manera tal, que siempre equidista de un punto fijo llamado centro.

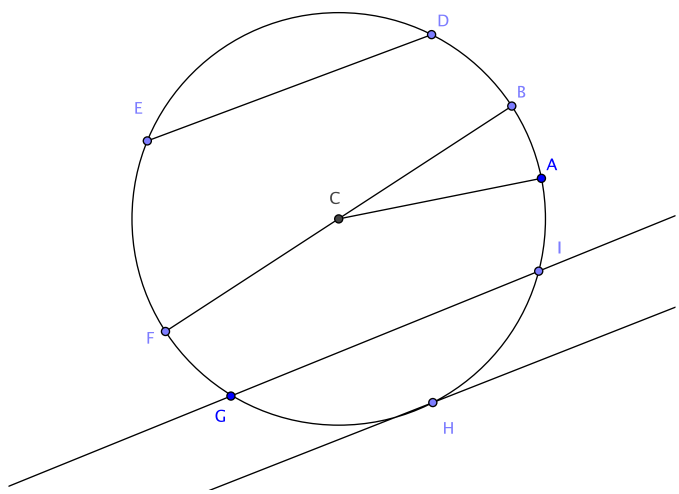
Usando la última definición a continuación se muestra una circunferencia de centro C y radio r



El conjunto de puntos interiores a la circunferencia se llama *círculo*.



2. Elementos de la circunferencia[1]



Radio: es un segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia $r = \overline{CA}$.

Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia $\overline{ED}$ y es perpendicular con el radio.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro y es igual a la medida de dos radios $\overline{FB}$.

Arco: línea curva formada por dos puntos de la circunferencia, que llamaremos extremos y todos los que se encuentran entre ellos, se denota con $\widehat{AB}$, y se lee arco AB.

Secante: recta que corta en dos puntos a una circunferencia $\overleftrightarrow{GI}$.

Tangente: recta que toca un punto de la circunferencia, el punto que toca se llama punto de tangencia H.

El perímetro de una circunferencia se calcula $P = 2\pi r$ y su área $A = \pi r^2$.

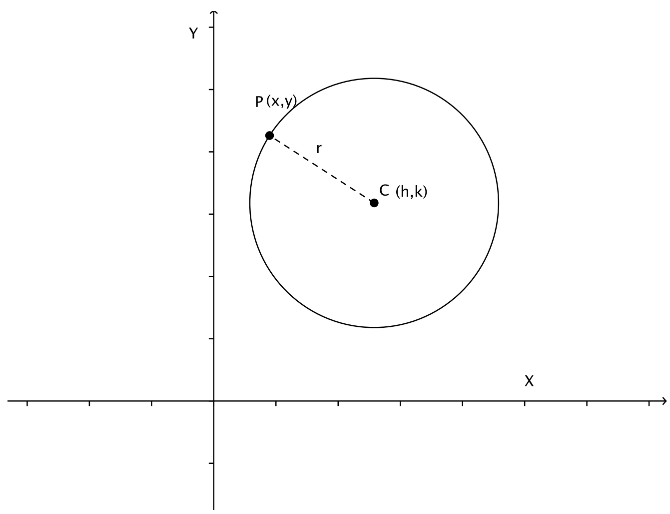
En tus cursos anteriores realizaste cálculos de áreas, perímetros de la circunferencia, nuestra visión del tema será ahora, cómo representar dicha figura mediante una ecuación.

2.1. Ecuación de la circunferencia

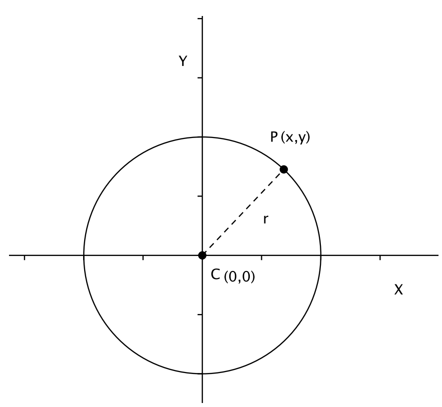
La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, de tal manera que está siempre a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, se utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos que se obtuvo en el capítulo anterior.

Considerando que los dos puntos quedan representados por el centro $C(h,k)$ y $P(x,y)$ un punto cualquiera que pertenece a la circunferencia, la longitud del segmento formado por estos dos puntos se denomina radio y lo denotaremos con la letra r.



Comenzaremos el caso particular que el centro se encuentra en el origen de las coordenadas y $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia.



La condición geométrica es $\overline{CP} = r$

Al sustituir en la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos que:

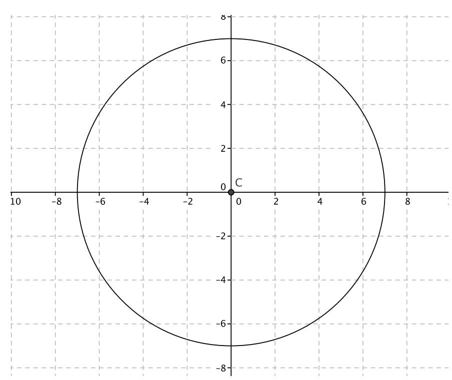
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Observe que en esta ecuación $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ representan a cualquier punto y que ésta fórmula solo puede usarse cuando la circunferencia tiene su centro en el origen de las coordenadas, veamos algunos ejemplos:

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen de coordenadas y tiene radio 7



$$x^2 + y^2 = r^2$$

Solo es suficiente sustituir el valor del radio

$$x^2 + y^2 = (7)^2$$

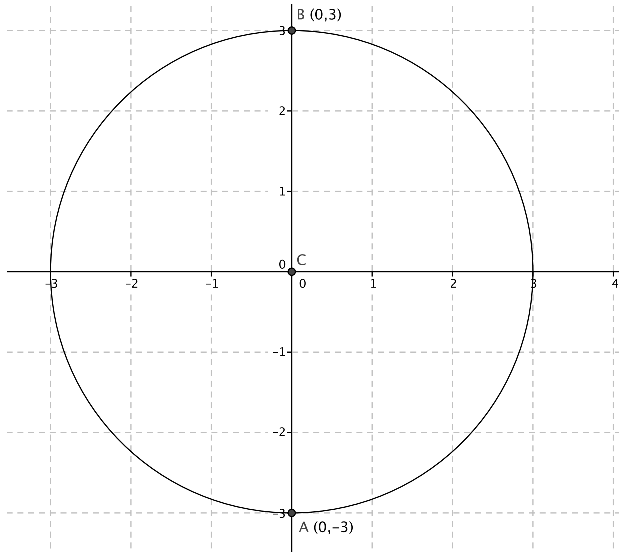
$$x^2 + y^2 = 49$$

Esta se conoce como la forma ordinaria

$$x^2 + y^2 - 49 = 0$$

Trasponiendo los términos obtenemos la forma general.

Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos A(0,-3) y B(0,3)



El diámetro es un segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro, por lo tanto es igual a dos veces el radio, calculemos dicha distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-0)^2 + (3+3)^2}$$
$$d = \sqrt{36} = 6$$
$$\therefore r = \frac{d}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

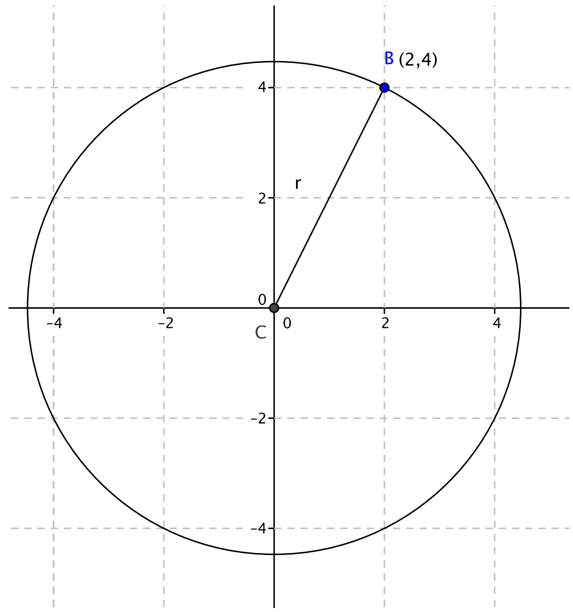
sustituyendo el valor del radio:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = (3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0$$

Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y pasa por el punto B(2,4)



El magnitud del radio es igual a la distancia del origen de coordenadas al punto B

$$r = d_{CB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2}$$

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

así la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$x^2 + y^2 - 20 = 0$$

Ecuación de la circunferencia buscada

Para practicar:

En equipos de tres resuelvan los siguientes ejercicios y comparen los resultados con el grupo.

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y tiene un radio igual a:

a) 3cm

b) $\sqrt{5}$

c) $2\sqrt{7}$

d) $\frac{3}{7}$

2. Calcular el perímetro de las circunferencias cuya ecuación es la siguiente:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 16$

c) $x^2 + y^2 = 49$

d) $x^2 + y^2 = 25$

e) $x^2 + y^2 = 20$

3. Utilizando regla y compás dibuja el lugar geométrico que representan las siguientes ecuaciones de la circunferencia:

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $x^2 + y^2 = 16$

$d) \ x^2 + y^2 = 25$

e) $x^2 + y^2 = 10$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro mide:

a) 10cm

b) 6 pulgadas

c) 24 km

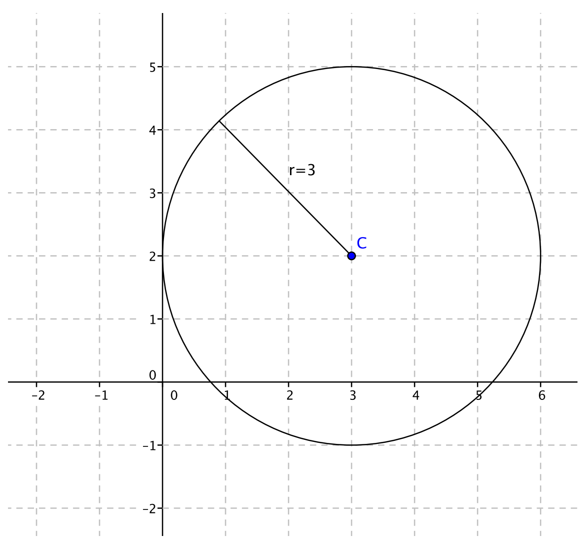
2.2. La ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen

Análogamente a la obtención de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen se procede de la misma manera para obtener la ecuación de la circunferencia cuando su centro se encuentra fuera del origen en un punto $C(h,k)$, y pasa por un punto $P(x,y)$ obteniendo la fórmula:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

conocida como la forma canónica u ordinaria de la ecuación de la circunferencia.

Hallaremos a continuación la ecuación de la circunferencia de radio 3 cuyo centro es el punto $C(3,2)$.



$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(3)^2$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=9 \text{ forma ordinaria}$$

Desarrollando los binomios:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0$$

Ordenando:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$$

que es la forma general de la ecuación de la circunferencia.

Ecuación general de la circunferencia

Si en la ecuación ordinaria de la circunferencia desarrollamos los binomios obtenemos la ecuación de la circunferencia en su forma general, veamos el procedimiento:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$
$$r^2 = x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2$$
$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

haciendo cambios de variables:

$$D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$$

Tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que es la ecuación general de la circunferencia.

En base a lo anterior podemos obtener el centro y el radio cuando conocemos la ecuación de una circunferencia, como veremos a continuación.

Obtener el centro y el radio de la circunferencia:

$$(x-4)^2+(y+5)^2=22$$

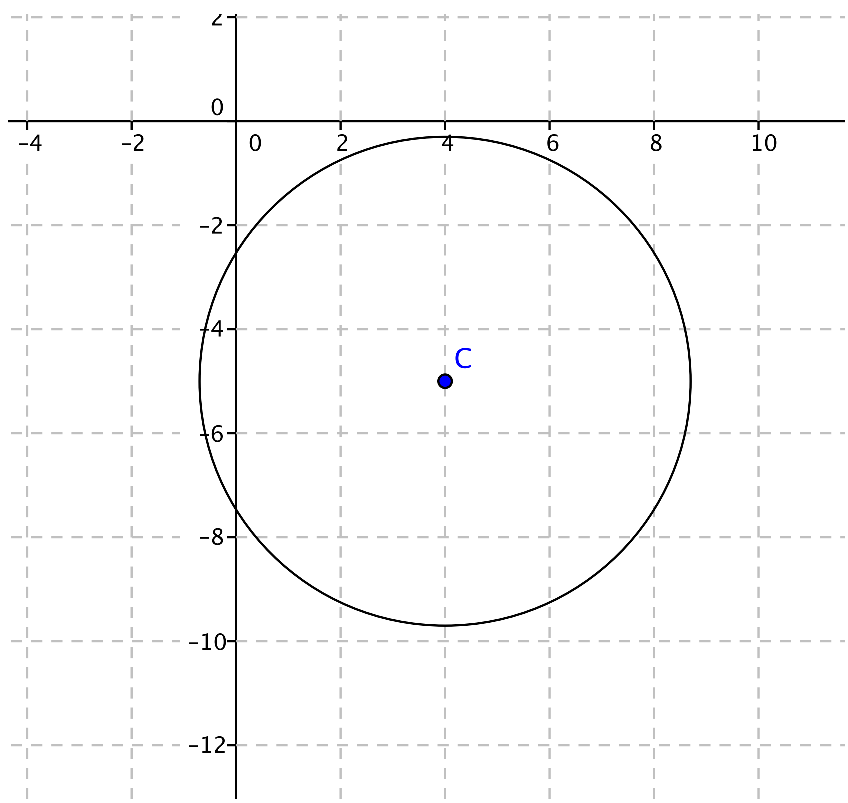
Si analizamos podemos ver que tiene la forma:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

por lo tanto deducimos que $h=4,\ k=-5$ y $r^2=22$

las coordenadas del centro son $C(h,k)$ y $r=\sqrt{22}$

El centro en el punto C(4,-5) y el centro es el radio $\sqrt{22}$



Ahora hallaremos el centro y el radio de la circunferencia a partir de su ecuación general con el siguiente ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 16x - 6y + 48 = 0$$

Comenzamos por agrupar las variables

$$x^2 + 16x + y^2 - 6y = -48$$

completamos los trinomios a cuadrados perfectos

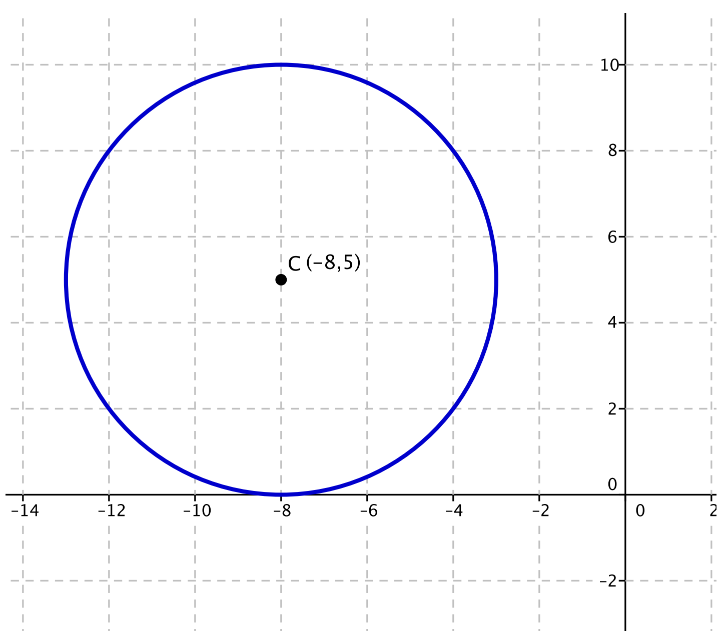
$$(x^2 + 16x + 64) + (y^2 - 6y + 9) = -48 + 64 + 9$$

Factorizamos los trinomios cuadrados perfectos

$$(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

una vez que llegamos a la forma ordinaria encontramos las coordenadas del centro y valor del radio que son:

$$C(-8{,}3) \text{ y } r = 5$$

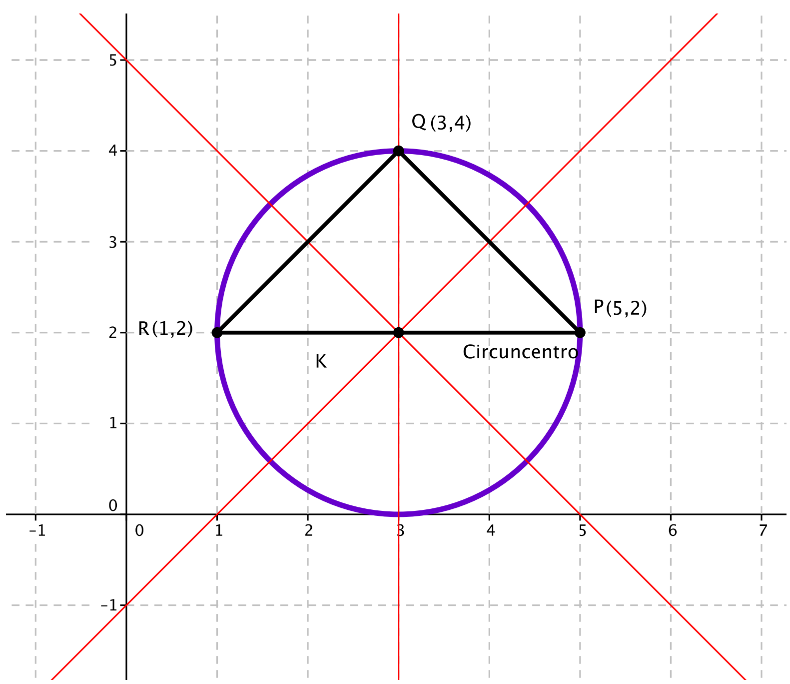


Un interesante problema es encontrar la ecuación de una circunferencia cuando conocemos tres puntos por los que pasa ejemplo que se puede aplicar cuando conocemos los tres vértices de un triángulo que está inscrito en el círculo, con el siguiente ejemplo veremos cómo podemos encontrar dicha ecuación mediante dos métodos distintos.

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(5,2), Q(3,4)$ y $R(1,2)$

Método I:

Las mediatrices de un triángulo[1] se intersectan en un punto llamado circuncentro, que es el centro de una circunferencia circunscrita, por lo tanto si encontramos el punto de intersección de las mediatrices estaremos encontrando el centro de la circunferencia, y el radio lo podemos calcular con distancia entre dos puntos, de los cuales conocemos tres.



Mediatriz del segmento $\overline{RP}$: recta perpendicular que pasa por el punto medio, comenzamos por encontrar las coordenadas del punto medio de $\overline{RP}$:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y+y_2}{2}$$

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \qquad y = \frac{2+2}{2}=2$$

P.M.(3,2)

la pendiente de $\overline{RP}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-1} = 0$$

es un segmento vertical dado que tienen las mismas ordenadas, por lo tanto es una recta vertical cuya ecuación es $x = 3$.

Mediatriz del segmento $\overline{QP}$:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y+y_2}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = 4 \qquad y = \frac{4+2}{2}=3$$

$$P.M.(4,3)$$

la pendiente de $\overline{RP}$:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-2}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1 \;\therefore\; m_{mediatriz} = 1$$

Ecuación de la recta forma punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1(x - 4)$$

$$y - 3 = x - 4$$

$$x - y - 1 = 0$$

Ecuación de la mediatriz

Son suficientes dos de las tres mediatrices para encontrar su intersección, el sistema formado es:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$x = 3$$

$$y = 2$$

Así el centro es $C(3,2)$, ahora calculamos la medida del radio: distancia del centro a cualquier punto.

$$d_{cq} = \sqrt{(3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Una vez con el centro y el radio podemos encontrar la ecuación de la circunferencia:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (2)^2$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ Forma ordinaria}$$

Desarrollando los binomios y reduciendo:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Ecuación general de la circunferencia.

Método II:

En la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sustituimos los valores de x y y de cada uno de los tres punto dados, obteniendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

Con $R(1,2)$:

$$(1)^2 + (2)^2 + D(1) + E(2) + F = 0$$

$$1 + 4 + D + 2E + F = 0$$

$$D + 2E + F = -5$$

Con $P(5,2)$:

$$5D + 2E + F = -29$$

Con $Q(3,4)$:

$$3D + 4E + F = -25$$

Formando el sistema:

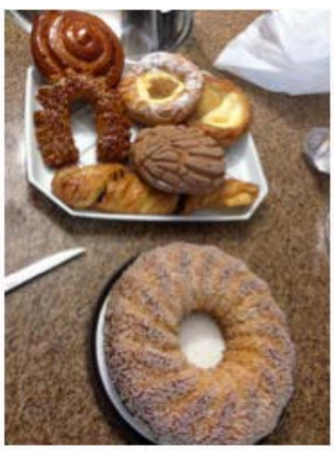
$$\begin{cases} D + 2E + F = -5 \\ 5D + 2E + F = -29 \\ 3D + 4E + F = -25 \end{cases}$$

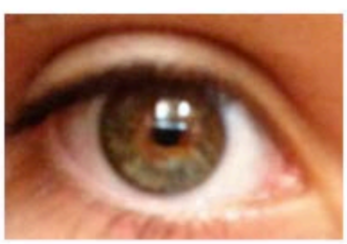
Resolviendo por reducción o determinantes:

$$D = -6, E = -4 \; y \; F = 9$$

Entonces la ecuación queda:

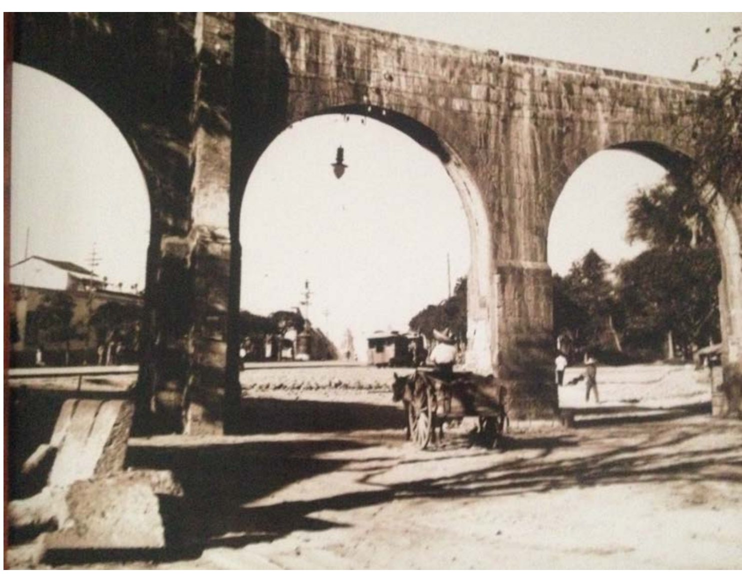
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$





2.3. Elementos de la parábola y sus diferentes tipos

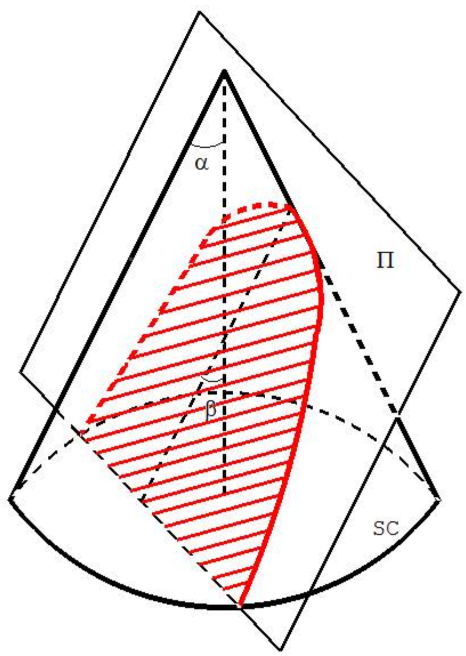
La parábola la podemos observar frecuentemente en nuestro entorno, su exquisita forma utilizada en la construcción desde tiempos remotos, nos permite disfrutar de arcos como los mostrados a continuación.



Su aplicación tan variada la utilizamos a diario en la recepción de ondas electromagnéticas al recibir señales en antenas de tipo parabólico, en los diseños de faros para autos, construcción de túneles, auditorios con dicha forma para maximizar la acústica y los receptores escuchen desde distintos puntos de ubicación.

La trayectoria que siguen los misiles, objetos lanzados horizontalmente que trasforman su trayectoria recta a parabólica debido a la gravedad, en el diseño de objetos artísticos, puentes, lentes para microscopios y telescopios.

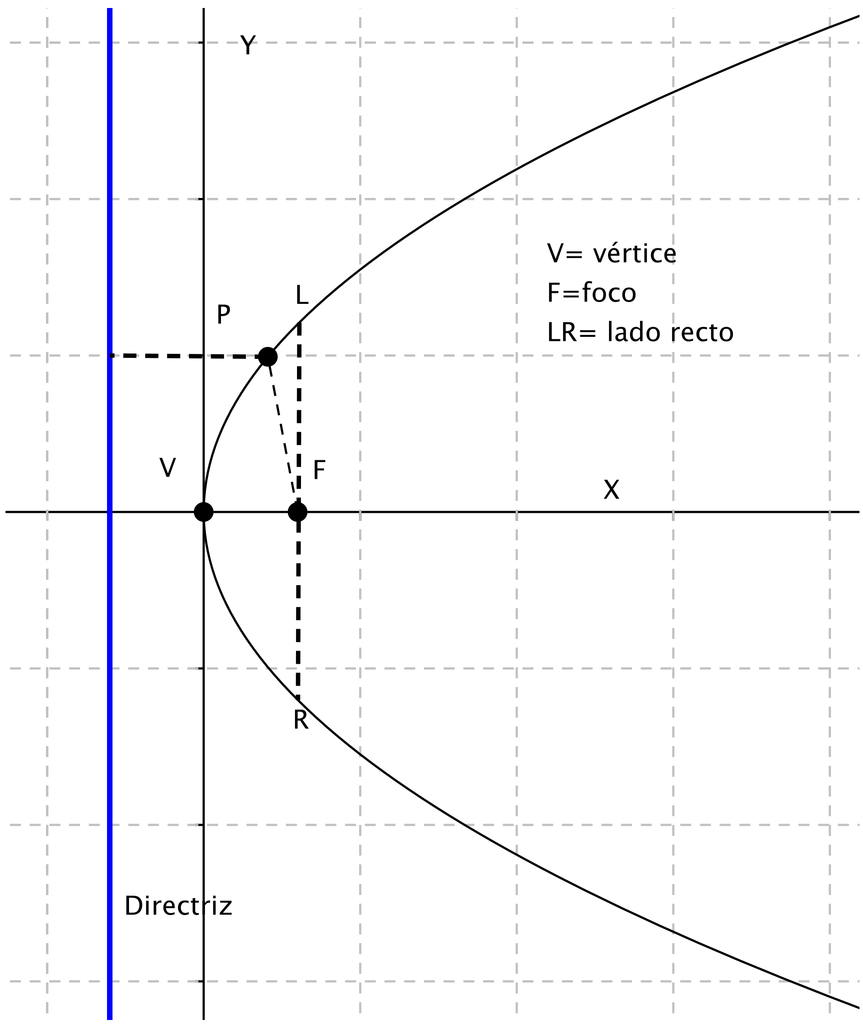
Desde el punto de vista geométrico podemos imaginar la parábola como una sección cónica al seccionar un cono con un plano[5].



La parábola[6] como lugar geométrico se define como la trayectoria que describe un punto, que se mueve en el plano de manera tal que, equidista de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz, que tienen una relación mediante el parámetro llamado excentricidad y denotaremos con la letra *e*.

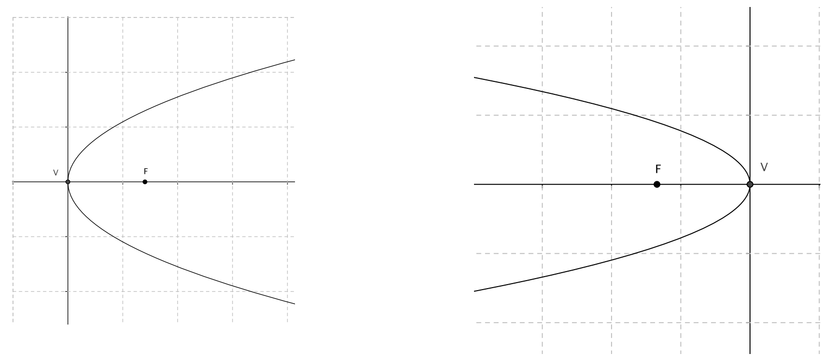
$$e = \frac{distancia\ del\ punto\ al\ foco}{distancia\ del\ punto\ a\ la\ recta\ fija} = 1$$

La parábola muestra simetría, siendo su eje perpendicular a la recta fija, y el punto donde corta a la parábola se llama vértice, los elementos de la parábola se muestran a continuación.

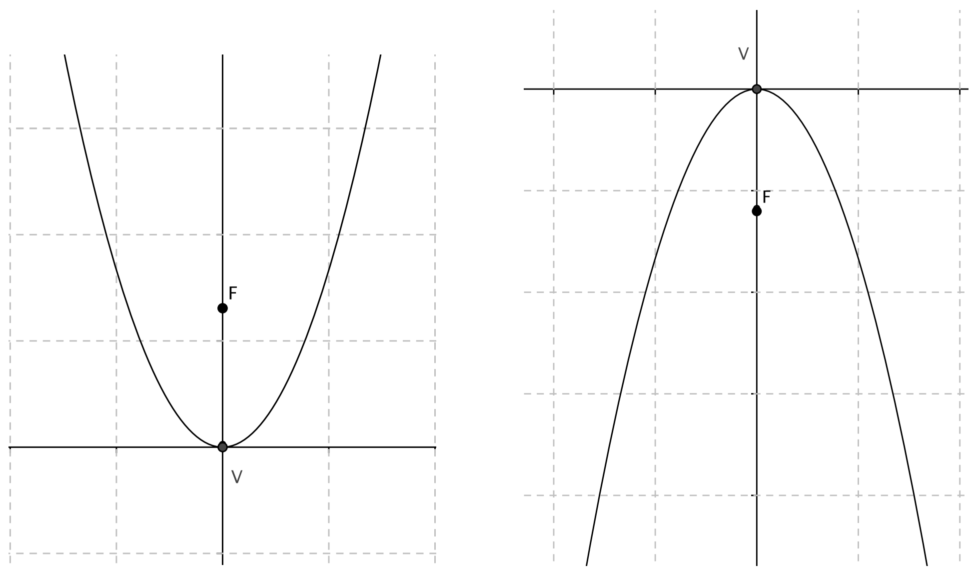


Denotaremos con la letra **p** a la distancia del vértice al foco, que es la misma del vértice a la recta fija llamada directriz.

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama eje focal y nos indica la posición de la misma, si es horizontal o vertical, observa que el foco nos indica si abre hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo, como se muestra en las siguientes figuras.



Parábolas horizontales la primera abre a la derecha y la segunda a la izquierda.

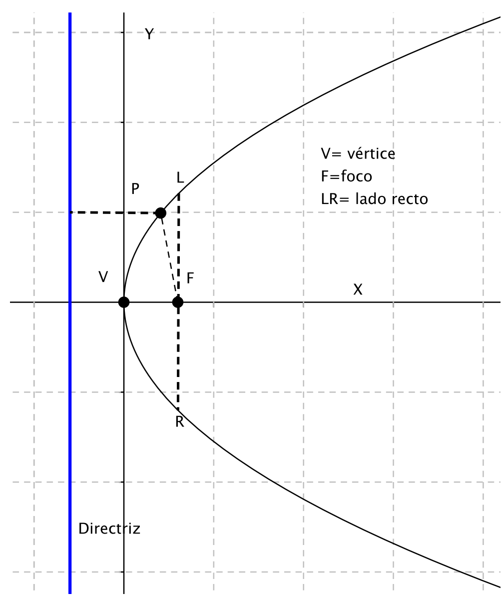


Parábolas verticales la primera abre hacia arriba y la segunda hacia abajo.

Parábolas horizontales y verticales con vértice en el origen

La distancia **p** es la distancia del vértice al foco y del vértice a la recta fija es llamada directriz, esta distancia **p** es positiva cuando la parábola abre a la derecha y hacia arriba, y negativa cuando abre hacia abajo o a la izquierda.

A continuación obtendremos la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen en su forma ordinaria



Por definición la distancia del punto $P(x, y)$ a la recta fija llamada directriz es la misma que la distancia del punto al foco.

Esto lo podemos expresar algebraicamente de la siguiente manera: $d_{PF} = d_{PD}$

aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo tenemos

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=x+p$$

$\left(\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}\right)^2=(x+p)^2$ elevando al cuadrado

$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$ elevando al cuadrado los binomios

$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2$ reduciendo términos semejantes

$y^2=4px$ Forma ordinaria de la parábola horizontal con vértice en el origen

Para encontrar las ecuaciones de las parábolas horizontales seguimos el mismo procedimiento y obtendremos:

$$x^2=4py$$

Forma ordinaria de la parábola vertical con vértice en el origen.

Recuerda que el signo de **p** nos indica hacia dónde abre la parábola.

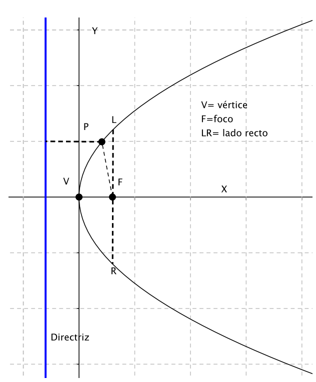
Longitud del lado recto

Para obtener el lado recto notemos que por simetría la distancia de $P(x,y)$ a la recta **d** es la misma que de $P(x,y)$ a $F(p,0)$, esto es:

$$d_{Pf}=d_{pd}$$

$$d_{Pf}=2p$$

Observe que la distancia de PF es la mitad del lado recto por lo que Lr=|4p|, la distancia es positiva por eso va en valor absoluto ya que **p** puede ser negativo o positivo.



En conclusión:

Si la parábola es horizontal con vértice en el origen su ecuación ordinaria es

$y^2 = 4px$ si $p > 0$ abre a la derecha si $p < 0$ a la izquierda

Si la parábola es vertical con vértice en el origen su ecuación ordinaria es

$x^2 = 4py$ si $P > 0$ abre hacia arriba si $p < 0$ hacia abajo

$$Lr = |4p|$$

A continuación encontraremos la ecuación de la parábola con vértice en el origen V(0,0) y su foco de coordenadas F(5,0)

Las coordenadas del foco nos indican que se trata de una parábola horizontal ya que su ordenada vale 0, así que está sobre el eje X, por lo tanto su ecuación tendrá la forma:

$$y^2 = 4px$$

p es la distancia del vértice al foco p=5-0=5 lo sustituimos

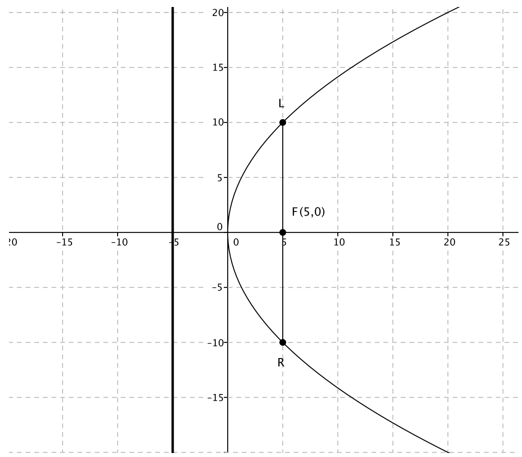
$$y^2 = 4(5)x$$

$$y^2 = 20x$$

que es la ecuación de la parábola o bien despejando:

$$y^2 - 20x = 0$$

Para hacer la gráfica localizamos el foco y el vértice, trazamos la directriz que está a la misma distancia del vértice al foco y paralela al lado recto.

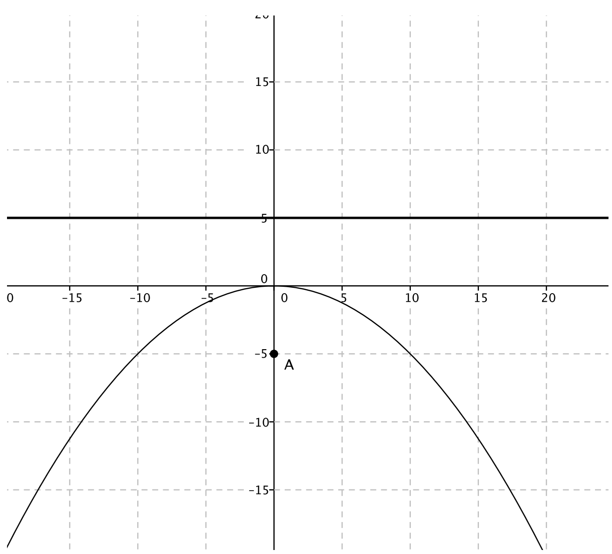


Calculamos la longitud del lado recto Lr=|4p|=|4(5)|=20

Por ser simétrico respecto del eje X, 10 unidades hacia arriba y 10 unidades hacia abajo, la directriz está a la misma distancia p=5 a la izquierda del vértice, su ecuación es x=-5.

Observa que hicimos la gráfica sin necesidad de hacer una tabla de valores.

Ahora encontraremos la ecuación de la parábola con vértice en el origen V(0,0) y foco F(0,-5). Encontraremos la ecuación de la directriz, de su eje y la longitud de su lado recto Lr.



Al graficar el foco nos damos cuenta que se trata de una parábola vertical ya que F(0,-5) su abscisa es cero, como el vértice está en el origen se deduce que abre hacia abajo por lo tanto p=-5

Su ecuación será de la forma $x^2 = 4py$

Sustituyendo p=-5

$$x^2 = 4(-5)y$$

$$x^2 = -20y$$

$$x^2 + 20y = 0$$

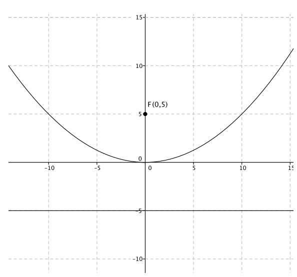
que es la ecuación buscada.

La directriz es una recta que se encuentra a la misma distancia del vértice al foco, por lo que pasa por el eje Y en 5 y su ecuación es y=5 para escribir su ecuación observa qué eje corta y por dónde pasa.

El lado recto Lr=|4p|=|4(-5)|=|-20|=20 nos indica que el segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje se dibuja 10 unidades a la izquierda y 10 a la derecha por su simetría.

El eje de la parábola coincide con el eje de las ordenadas el eje Y, su ecuación es x=0.

Ahora encontraremos la ecuación de la parábola con vértice en el origen V(0,0) y directriz la recta con ecuación es y=-5



Grafiquemos primero la directriz, en el eje Y en -5, la parábola es vertical, como el vértice está en el origen p=5 la parábola abre hacia arriba, su ecuación es:

$$x^2 = 4py$$

Sustituyendo p=-5

$$x^2 = 4(-5)y$$

$$x^2 = -20y$$

$$x^2 + 20y = 0$$

Las coordenadas del foco F(p,0) por lo tanto F(0,5) y la longitud del lado recto Lr=|4p|=|4(5)|=20, 10 unidades hacia la izquierda y 10 hacia la derecha en la recta que pasa por el foco y es paralela a la directriz.

Para practicar:

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen y se conoce otro de sus datos:

a) F(6,0)

b) F(-4,0)

c) F(0,7)

d) F(0,-2)

e) longitud del lado recto es 10 y es una parábola vertical positiva

f) Ecuación de la directriz x=-9

g) Ecuación de la directriz y=4

2.4. Elementos de una parábola en el origen dada su ecuación

Ahora haremos el proceso inverso, a partir de la ecuación de una parábola obtendremos algunos de sus elementos, como las coordenadas del foco, ecuación de la directriz, longitud del lado recto o ecuación del eje focal.

Es muy importante hacer un análisis sobre la ecuación, como si la variable que está elevada al cuadrado es la x o la y, ya que esto nos da información sobre qué tipo de parábola es, si es horizontal o vertical, si tiene la forma $x^2 = 4py$ o $y^2 = 4px$, esto último nos indica que tiene su vértice en el origen de coordenadas, a continuación veremos algunos ejemplos.

Encontrar el foco, directriz, lado recto, ecuación del eje, de las parábolas cuya ecuación es:

a) $y^2 - 24x = 0$

tiene la forma $y^2 = 4px$ por lo que podemos deducir que es una parábola horizontal con vértice en el origen.

$$y^2 - 24x = 0 \text{ despejando}$$

$$y^2 = 24x$$

$$\text{note que } 24 = 4p$$

$$\therefore p = \frac{24}{4} = 6$$

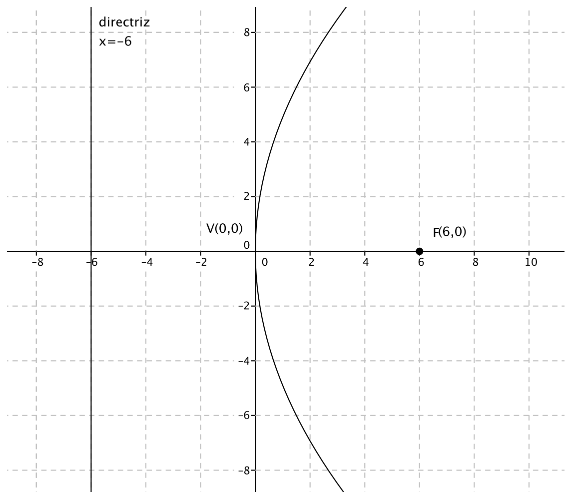
de este resultado se concluye que abre hacia la derecha y que la distancia del vértice al foco es 6, lo mismo que la distancia del vértice al foco, lo que nos sirve para encontrar la ecuación de la directriz.

El foco tiene coordenadas: F(p,0)=F(6,0)

Ecuación de la directriz: $x = -6$

Longitud del lado recto: $Lr = |4p| = |4(6)| = |24| = 24$

La recta que pasa por el eje o eje focal tiene por ecuación: $y = 0$



Encontremos ahora los elementos de la siguiente ecuación de la parábola:

$$x^2 + 8y = 0$$

la ecuación coincide con $x^2 = 4py$

$$x^2 = -8y$$

de donde: $4p = -8$

$$p = -2$$

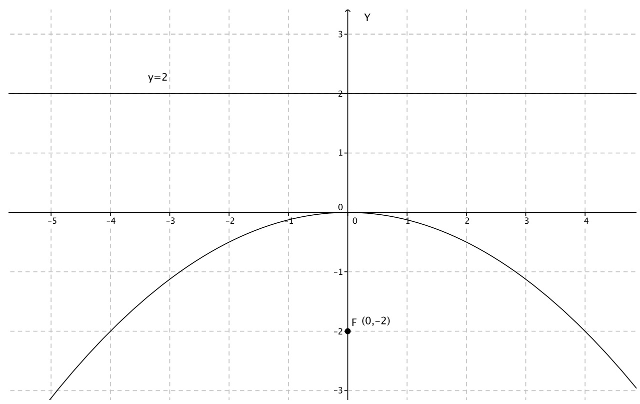
la parábola tiene su vértice en el origen, es vertical y abre hacia abajo, sus elementos serían:

El foco tiene coordenadas: F(0,p)=F(0,-2)

Ecuación de la directriz: $y = 2$

Longitud del lado recto: $Lr = |4p| = |4(2)| = |8| = 8$

La recta que pasa por el eje o eje focal tiene por ecuación: $x = 0$



Para practicar: En parejas encuentren lo elementos de las siguientes parábolas cuyas ecuaciones son:

a) $x^2 = -20y$

b) $y^2 - 8x = 0$

c) $x^2 - 28y = 0$

d) $y^2 = 16x$

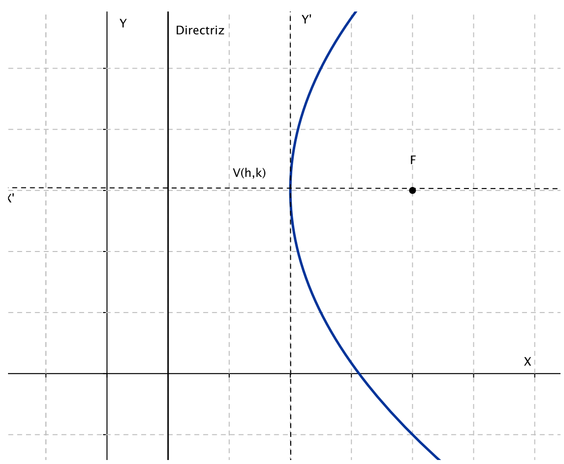
Palacio de Clavijero en Morelia Michoacán, hermosos arcos de forma parabólica

2.5. Distintas ecuaciones de la parábola

Ahora obtendremos las ecuaciones de parábolas horizontales y verticales con vértice un punto cualquiera en el plano que no coincida con el origen.

Partiremos de las ecuaciones obtenidas cuando la parábola tiene su vértice en el origen.

Si el vértice se encuentra ahora en cualquier punto del plano V(h,k) , tracemos un nuevo sistema de coordenadas X′ y Y′ y hagamos coincidir el origen de coordenadas con el vértice V(h,k), como se muestra en la siguiente figura:



La ecuación de la parábola horizontal respecto de los nuevos ejes X′ y Y′ es:

$$y'^2 = 4px'$$

al haber trasladado los ejes tenemos que:

$$x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k$$

sustituimos lo anterior:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ésta es la ecuación de la parábola con vértice en cualquier punto del plano.

Análogamente se deduce la ecuación de la parábola vertical, la cual queda:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Para ejemplificar encontraremos la ecuación de la parábola con vértice en V(4,3) y foco F(7,3)

Las coordenadas del vértice y foco nos indican que se trata de una parábola horizontal que abre a la derecha ya que el foco está a la derecha del vértice, y es un segmento horizontal ya que tienen la misma ordenada, **p** es la distancia entre V y F, calculémosla:

$p=d_{VF}=7-4=3$ es un segmento horizontal

Su ecuación tiene la forma:

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

$$(y-3)^2=4(3)(x-4)$$ recuerde V(h,k)

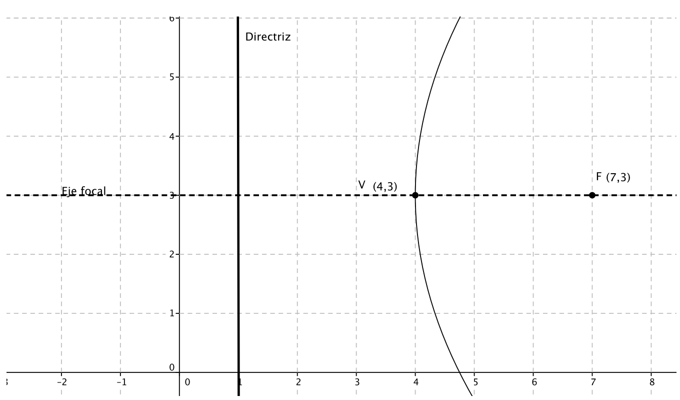
$$(y-3)^2=12(x-4)$$ Ecuación de la parábola en su forma ordinaria

Si deseamos obtener la fórmula general desarrollamos el binomio:

$y^2-6y+9=12x-48$

$y^2-12x-6y+57=0$ Forma General de la ecuación de la parábola

El lado recto Lr=|4p|=|4(3)|=12 al graficarlo 6 unidades arriba y 6 abajo, la ecuación de la directriz es x=1



Hallar la ecuación de la parábola con vértice en V(3,-4) y foco F(3,-9).

Como tienen la misma abscisa se trata de una parábola cuyo eje es vertical y la distancia entre el vértice y el foco es p=-9-(-4)=-9+4=-5 como p<0 la parábola abre hacia abajo y su ecuación tiene la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

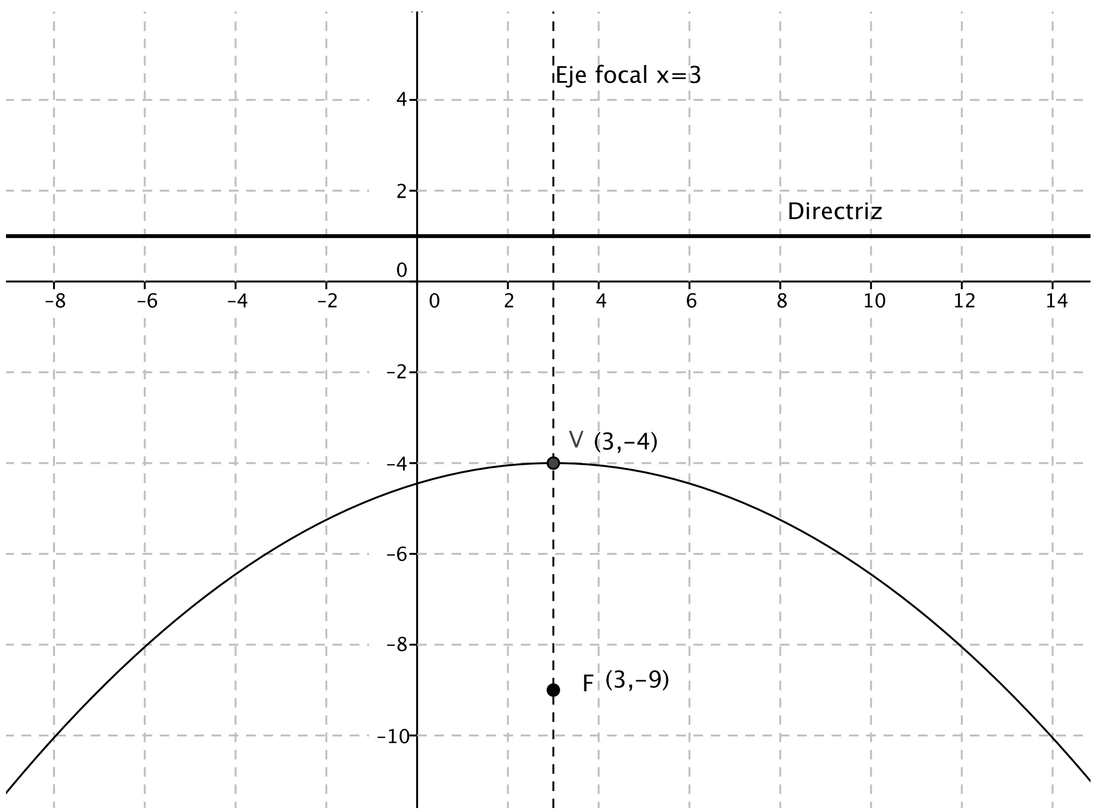
Sustituyendo p=-5 y V(3,-4)=V(h,k) tenemos

$$(x-3)^2 = 4(-5)(y+4)$$

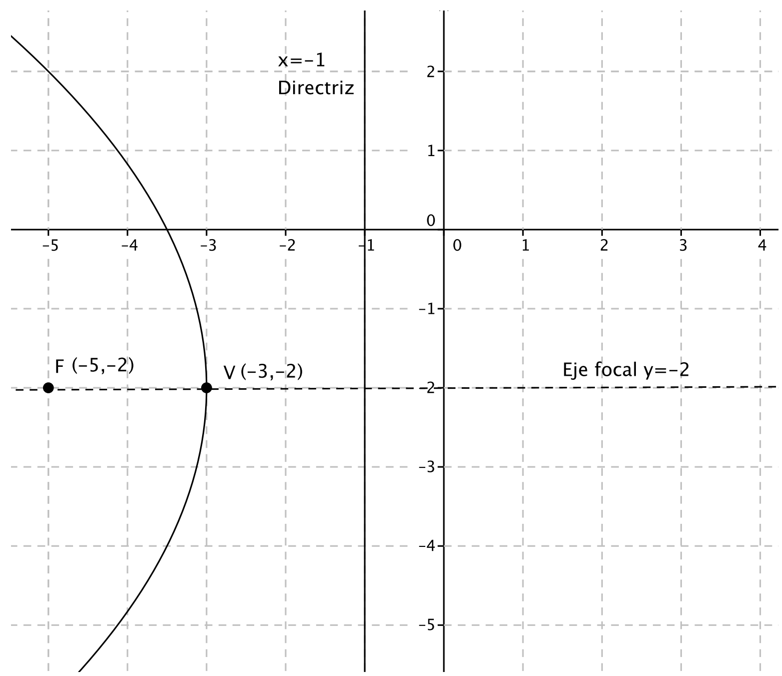
$(x-3)^2 = -20(y+4)$ Forma ordinaria

Desarrollando x^2-6x+9=-20y-80

x^2-6 x +20y +89=0 Forma general



Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en V(-3,-2) F(-5,-2)



El eje de la parábola es horizontal y la distancia de V a F es p=-5+3=-2 si lo hubieras hecho al contrario y te queda 2 debes tener cuidado de poner el signo menos ya que abre hacia la izquierda.

Lr=|4p|=|4(-2)|=|-8|=8, 4 unidades arriba y 4 abajo.

La ecuación de la directriz es x=-1

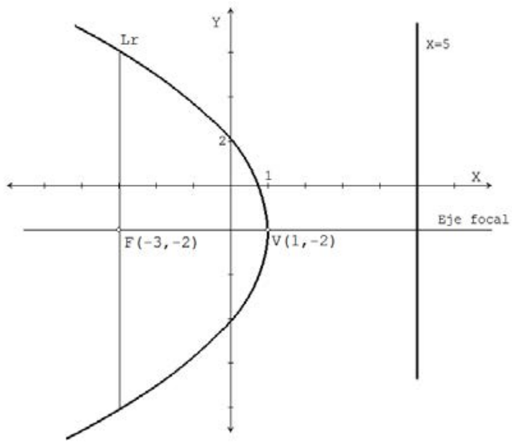
La ecuación es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$(y+2)^2 = -8(x+3)$ Forma ordinaria

$y^2+8x+4y+28=0$ Forma general

Hallar la ecuación de la parábola con foco F(-3,-2) y la ecuación de la directriz es x=5



El vértice está en el punto medio de F y d, a la altura del foco,∴V(1,-2) como abre a la izquierda p<0 vale p=-4 ∴Lr=16

La ecuación corresponde a una parábola horizontal:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$(y+2)^2=-16(x-1)$ Forma ordinaria

$y^2+4y+16x-12=0$ Forma general

2.6. Elementos de una parábola fuera del origen

Hallar el vértice, foco, ecuación del eje, y ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es:

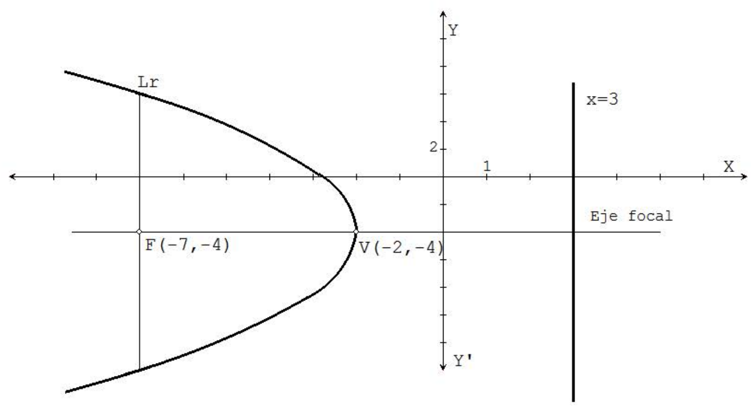
$$(y+4)^2=-20(x+2)$$

La ecuación corresponde a una parábola horizontal con vértice en V(h,k)

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

∴ V(-2,-4) y 4p=-20 entonces p=-5 abre a la izquierda

Lr=|4(-5)|=20, ecuación del eje es y=-4 y ecuación de la directriz es x=3, su gráfica en la siguiente:



Hallar los elementos de la parábola que describe un proyectil, cuya ecuación es:

$$x^2-6x+8y+41=0$$

la persona que lo observa está ubicada en la posición del foco, ¿En qué punto se encuentra ubicada?

$$x^2-6x+8y+41=0$$

tenemos la ecuación general, pasemos a la forma ordinaria

$$x^2-6x = -8y -41$$

completando el trinomio cuadrado perfecto (recuerde se divide 6 entre 2 y el resultado se eleva al cuadrado)

$x^2-6x+9 = -8y -41+9$

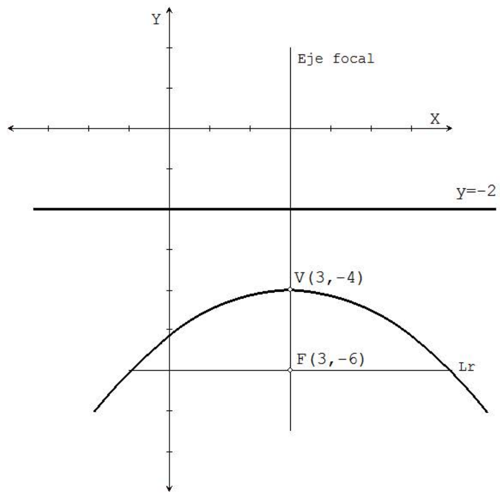
Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto

$(x-3)^2 =-8y-32$ factorizamos -8

$(x-3)^2 =-8(y+4)$ forma ordinaria parábola vertical

V(3,-4) 4p=-8 entonces p=-2 abre hacia abajo

El foco que es desde donde la persona observa el movimiento es F(3,-6) , la ecuación del eje es x=3 y la ecuación de la directriz es y=-2, lado recto Lr=8, la gráfica:



Forma general de la ecuación de la parábola

Forma general de la ecuación de la parábola horizontal:

Partimos de la ecuación ordinaria de la parábola con vértice en V(h,k), esto es:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ desarrollando el binomio tenemos:

$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$

$y^2-4px-2ky+k^2+4ph=0$

Si comparamos la ecuación con la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ vemos que:

A=0, B=0, C=1, D=-4p, E=-2k, $F=k^2-4ph$ sustituyendo estos valores en la ecuación

$y^2+Dx+Ey+F=0$ Ecuación general de la parábola vertical

Análogamente se desarrolla la ecuación ordinaria de la parábola vertical y se obtiene la ecuación:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$x^2-2hx+h^2-4py+4pk=0$

$x^2-2hx-4py+h^2+4pk=0$

Si comparamos la ecuación con la ecuación general de segundo grado en dos variables:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ vemos que:

A=1, B=0, C=0, D=-2h, E=-4p, $F=h^2+4pk$

Nótese que en los dos casos B=0 ya que el término xy no aparece, pero más adelante cuando tomes cursos más avanzados te encontrarás con él cuando obtengas la ecuación general de la parábola inclinada.

La ecuación que describe una antena parabólica es $x^2-6x-16y+25=0$ y deseamos encontrar dónde colocar el receptor este se debe situar en el foco de la parábola, localice las coordenadas.

Una forma es pasar de la ecuación general a la ordinaria y obtener de ahí sus elementos, ahora lo resolveremos aplicando lo anterior.

La ecuación: $x^2-6x-16y+25=0$

corresponde a la ecuación general de la parábola vertical

$$x^2+Dx+Ey+F=0$$

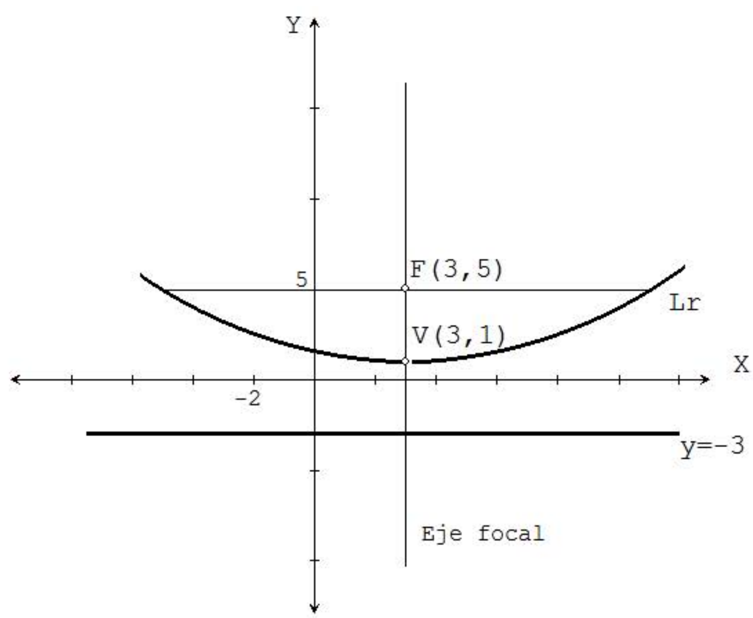
$$D=-6, \quad E=-16 \ , \ F=25$$

donde $D=-2h \quad -6=-2h \rightarrow h=3$

$E=-4p \quad -16=-4p \rightarrow p=4$

$F=h^2+4pk \quad 25=(3)^2+4(4)k \rightarrow K=1$

El vértice $V(h,k)=(3,1)$ como p es positivo $p=4$ abre hacia arriba, la ecuación de su eje es $x=3$ y de su directriz $y=-3$, finalmente el foco que son las coordenadas que necesitamos para colocar el receptor son $F(3,5)$.



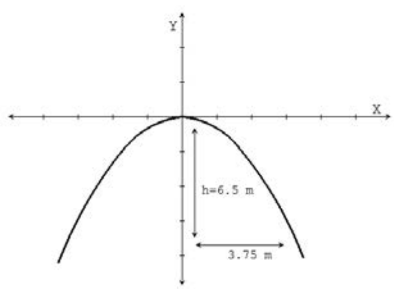
Se quiere construir una antena parabólica de manera que su receptor esté a una distancia de 0.5m del vértice. Hallar la ecuación de la parábola para su diseño.

Observemos primero que la forma que tiene la estructura como su nombre lo indica es el de una parábola (antena parabólica) y que una vez que se conozca su ecuación, la superficie de revolución que se obtiene es la forma de la parábola.

Para encontrar la ecuación hacemos coincidir el vértice con el origen de las coordenadas V(0,0) y por comodidad la consideramos orientada hacia arriba, en dicha posición el receptor de la parábola está situado en el foco de la misma, entonces sus coordenadas son F(0,0.5m) y la ecuación corresponde a la de una parábola vertical con vértice en el origen

$x^2=4py$ así $x^2=4(0.5)y$ esto es $x^2=2y$

Uno de los arcos del acueducto de Morelia tiene aproximadamente 7.5m de claro o luz y su altura máxima es de 6.5m, se desea colocar una lámpara que tenga iluminación máxima, ¿a qué distancia de la parte más alta del arco se debe colocar?



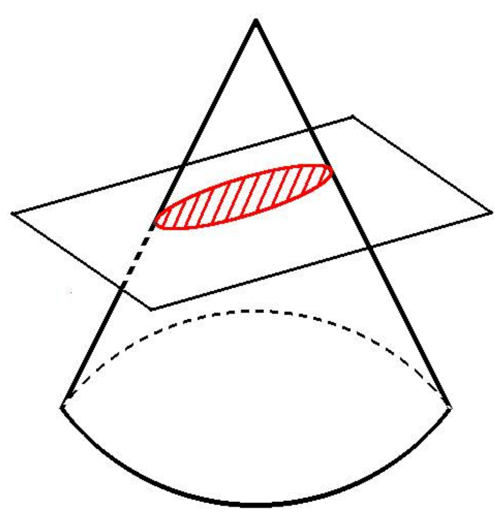
Hacemos coincidir el arco con una parábola vertical hacia arriba con vértice en el origen, por las propiedades de reflexión, la lámpara se debe colocar en el foco de la parábola, como ya se vio:

$p=\frac{s^2}{-4h}=\frac{(3.75m)^2}{-4(6.5m)}=-0.5408m$ esto nos indica que debemos colgar la lámpara a 54.08cm de la parte más alta del arco.

2.7. Ecuación de la elipse y sus diferentes tipos

Menaechmus[5] estudió la elipse como curva geométrica, la investigó Euclides[7] y su nombre se atribuye a Apolonio de Pergamo. En 1602, Johannes Kepler (1571-1630) estudiaba los movimientos de Marte, observó que al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del Sol, los cálculos divergían ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento, por lo que arregló la órbita a otras curvas y encontró que la elipse se ajustó de forma extraordinaria a ella, de esta manera obtuvo su primera ley del movimiento de los planetas[8].
Elipse significa acortada. Elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias de cada uno a dos puntos fijos (llamados focos) en el plano es una constante positiva[9,10].

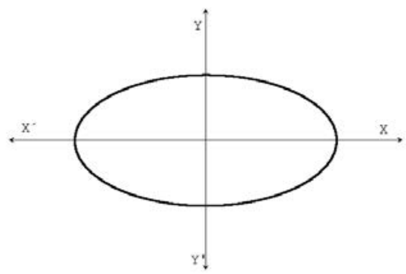
La elipse es una curva cerrada que se forma cuando un plano no paralelo a la base de un cono circular recto la corta[11].

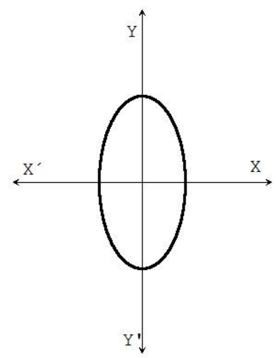


La elipse se define como el lugar geométrico de los puntos en el plano que cumplen la condición de que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, situados en el mismo plano, llamados focos, se mantiene constante y mayor que la distancia entre los focos[12].

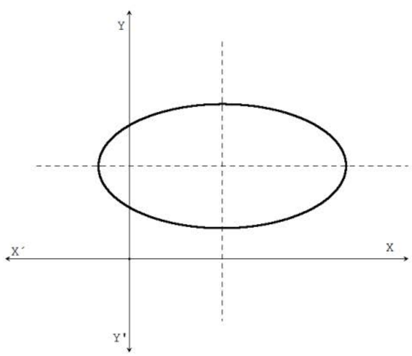
2.8. Distintas ecuaciones de la elipse

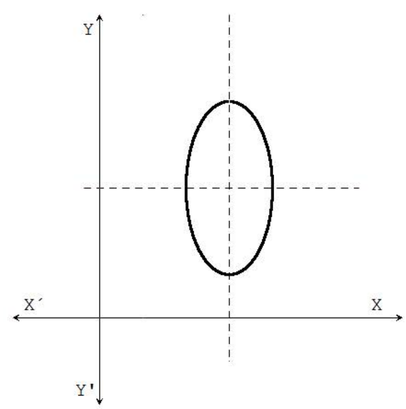
La elipse que estudiaremos tendrá su centro en el origen de las coordenadas y fuera de él, en posición horizontal y vertical, no trataremos el tema de la elipse inclinada. Ver figuras:





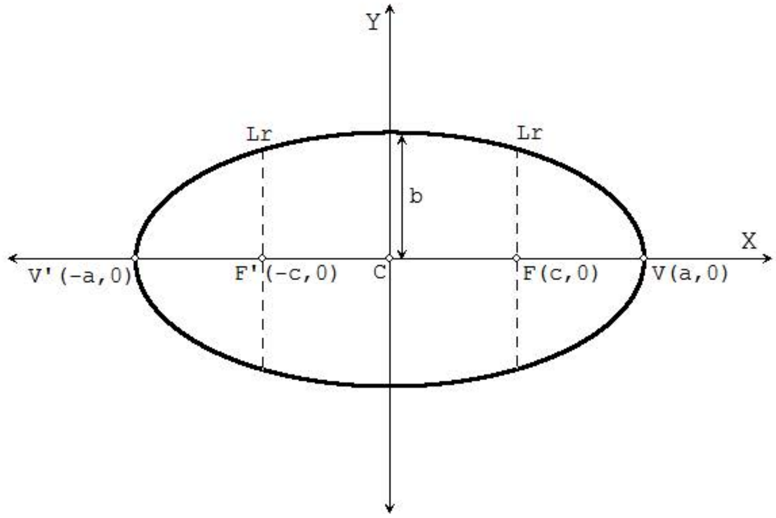
Elipse horizontal con centro en el origen   Elipse vertical con centro en el origen





Elipse horizontal con centro fuera del origen   Elipse vertical con centro fuera del origen

La elipse tiene dos ejes perpendiculares, uno siempre es mayor que el otro, los llamaremos eje mayor y eje menor, el punto de intersección de dichos ejes se llama centro de la elipse, la posición del eje mayor nos indica si la elipse es horizontal o vertical. Sobre el eje mayor están situados los focos y por ellos perpendicularmente pasan los lados rectos, que son segmentos que unen dos puntos de la elipse, la longitud del eje mayor se representa con 2a y la del eje menor 2b, por lo tanto el semieje mayor vale a y el semieje menor b, la distancia del centro a los focos, llamada distancia focal es c. La elipse es una figura simétrica respecto de los dos ejes. Ver la figura siguiente de una elipse horizontal con centro en el origen



Elementos de la elipse

V,V’: son los vértices

F, F’: son los focos

C: centro

Eje mayor: $\overline{VV'}$=2a

Eje menor: 2b

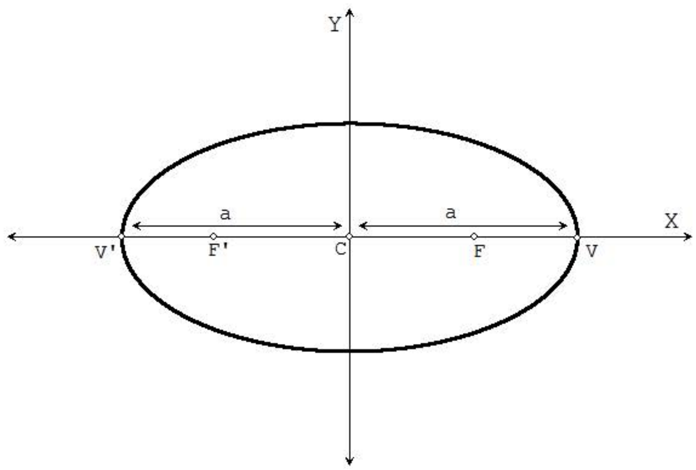
Lr: longitud del lado recto

$\overline{F'C} = \overline{CF} = c$

$\overline{F'F} = 2c$

$\overline{PF}$ ó $\overline{PF'} = radios\ vectores$

Si observamos, en la definición dijimos que la suma de las distancias desde cualquier punto a los focos es constante, esa constante es siempre 2a, la longitud del eje mayor de la elipse, esto se puede observar si consideramos un punto cualquiera el vértice de la elipse, observe la siguiente figura:



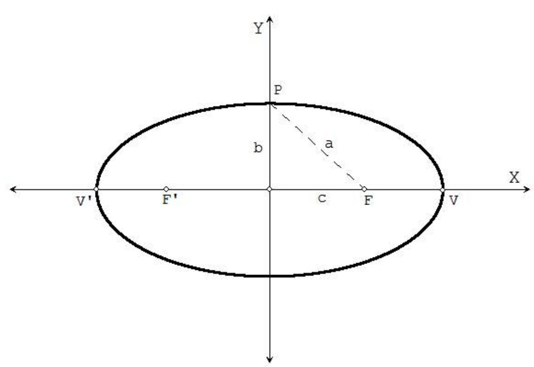
Podemos observar que la simetría nos permite afirmar que

$\overline{VF}+\overline{VF'}$=constante y que $\overline{VF}=\overline{V'F'}$ así que:

$$\overline{VF}+\overline{V\square'}=\overline{V'F'}+\overline{F'V}\;y\;\overline{V'F'}+\overline{F'V}=2a$$

Entonces la constante es 2a.

Encontremos la relación que existe entre los valores a, b y c. Consideremos una elipse horizontal con centro en el origen P un punto situado en uno de los extremos del eje menor, ver figura:



Basados en la definición, la suma de las distancias de $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ y como $\overline{PF} = \overline{PF'}$ por estar situado el punto P en el eje de simetría, la distancia a cada foco es la misma.

Entonces podemos cambiar $\overline{PF'} por\ \overline{PF}$ y tendremos:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

$$2\overline{PF} = 2a$$

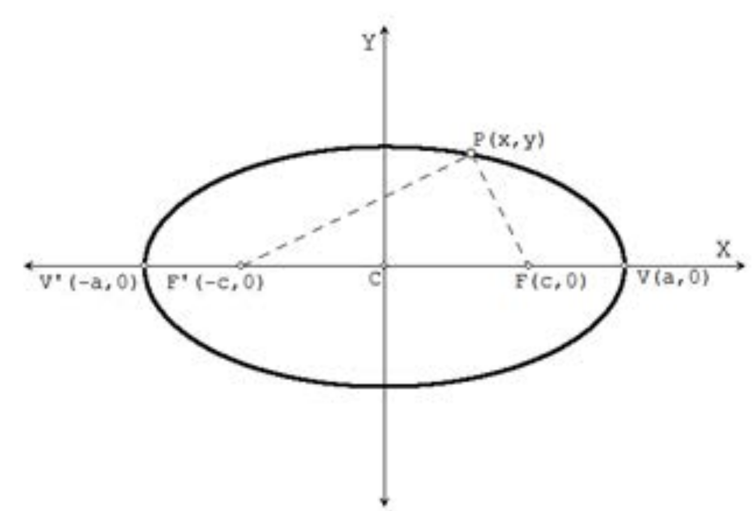
$$\overline{PF} = a$$

En la gráfica anterior observe que se forma un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es a y los catetos son c y b. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2=b^2+c^2$ que es la relación que existe entre estos valores

Ecuaciones de la elipse

Forma ordinaria de la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen

Consideremos P(x,y) un punto cualquiera, como se observa en la siguiente figura:



Partimos de la definición de elipse:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

Calculemos la distancia entre $\overline{PF} y \overline{PF'}$ con la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Despejando $\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros para eliminar raíces:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + ((x+c)^2 + y^2)$$

Elevando al cuadrado los binomios y reduciendo términos semejantes:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ multiplicando por -1 y dividiendo entre 4

$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ elevando al cuadrado

$$(xc + a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x+c)^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 + 2cx + c^2) + y^2)$$

$x^2c^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$ reduciendo términos semejantes

$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$ pero $a^2 = b^2 + c^2$ despejando $c^2 = a^2 - b^2$

$$x^2(a^2 - b^2) + a^4 = a^2x^2 + a^{2(}a^2 - b^{2)} + a^2y^2$$

$a^2x^2 - x^2b^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$ reduciendo términos semejantes

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 + a^2y^2$$

$- b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$ multiplicando por -1

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ dividiendo todo entre a^2b^2

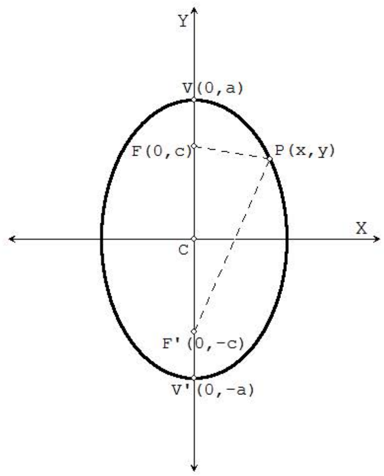
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Forma ordinaria de la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen.

Forma ordinaria de la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen

Consideremos P(x,y) un punto cualquiera de una elipse vertical, como se observa en la siguiente figura:



Aplicando la definición de elipse:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + (x^2 + (y+c)^2)$$

$$x^2+y^2-2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$

$$-4cy-4a^2=-4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

$$cy+a^2=a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

$$(cy + a^2)^2=\left(a\sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2$$

$c^2y^2+2a^2cy+a^4=a^2(x^2+(y^2+2cy+c^2)$

$c^2y^2+2a^2cy+a^4=a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2$

$c^2y^2+a^4=a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2$ pero $c^2=a^2-b^2$

$(a^2-b^2)y^2+a^4= a^2x^2+a^2y^2+a^2(a^2-b^2)$

$a^2y^2-b^2y^2+a^4=a^2x^2+a^2y^2+a^4-a^2b^2$

$-b^2y^2=a^2x^2-a^2b^2$

$-a^2x^2-b^2y^2=-a^2b^2$

$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ Forma ordinaria de la elipse vertical

Longitud de los lados rectos

Partiremos de la forma ordinaria de la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ despejemos la y

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ sacando raíz en ambos miembros

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ tomaremos solo el signo más por tratarse de una longitud

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ recuerde que el F(c,0) su abscisa es c y como pertenece a la elipse

Entonces satisface la ecuación anterior, la sustituimos

$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$ y de la relación $a^2=b^2+c^2$ despejamos $b^2=a^2-c^2$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}$$

$$y=\frac{b}{a}b$$

$y=\frac{b^2}{a}$ esta cantidad es la mitad del lado recto, por lo que la longitud de Lr=$\frac{2b^2}{a}$

Este resultado es el mismo para la elipse vertical.

Excentricidad

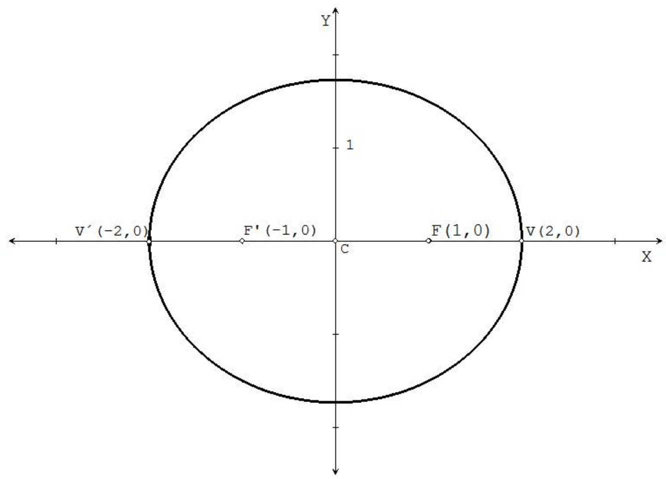
La excentricidad se define como el cociente $\frac{c}{a}$ y puesto que c<a entonces e<1 e=$\frac{c}{a}$

Esto es para las elipses verticales y horizontales.

Veamos algunos ejemplos donde apliquemos lo anterior.

Hallaremos la ecuación de la elipse con vértices V(2,0) y V'(-2,0) y focos F(1,0) y F'(-1,0)

Graficamos los datos disponibles



Como el centro está entre los vértices verificamos que está en el origen de las coordenadas

Y la ecuación corresponde a la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Determinamos los valores de a, b, c

$$\text{Eje mayor} = 2a = 2(2) = 4$$
$$\text{Eje menor} = 2b = 2\left(\sqrt{3}\right)$$
$$\text{Distancia entre los foco} = 2(1) = 2$$

Para calcular "b"

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 4 - 1$$
$$b^2 = 3$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación correspondiente

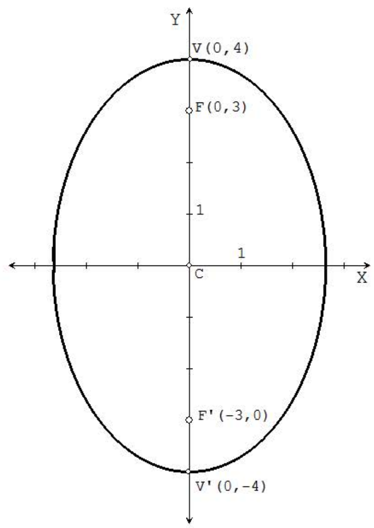
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$ Ecuación de la elipse en su forma canónica.

También se pueden obtener más elementos como son: Lr=$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ y el valor de la excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

Ahora encontraremos la ecuación de la elipse con vértices V(0,4) y V'(0,-4) y excentricidad, igual a $e=\frac{3}{4}$.

Graficamos los vértices, y de ahí se deduce que el centro está en el origen de las coordenadas.



Observamos que la elipse corresponde al tipo $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, por estar en el origen y sobre el eje de las Y.

Deducimos los valores para a, b, c.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

$$c^2=(3)^2=9$$

$$a^2=(4)^2=16$$

Para calcular "b"

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=16-9$$

$$b^2=7$$

Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación correspondiente.

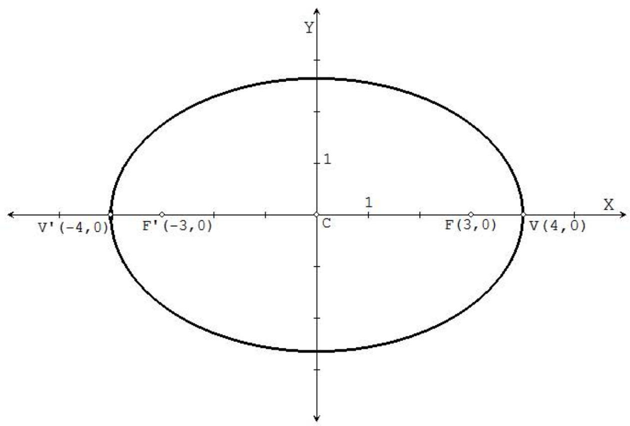
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ Ecuación ordinaria o canónica de la elipse con centro en el origen

Hallaremos la ecuación de la elipse con focos F(3,0) y F’(-3,0) y excentricidad $e=\frac{3}{4}$

.

Graficamos los focos y observamos que están sobre el eje X y que por simetría el centro está en el origen de las coordenadas, por lo que corresponde a una elipse horizontal.



la ecuación de la elipse es : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Calculamos los valores de a, b, c

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

$c^2 = (3)^2 = 9$

$a^2 = (4)^2 = 16$

Para calcular "b"

$b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 16 - 9$

$b^2 = 7$

Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación correspondiente.

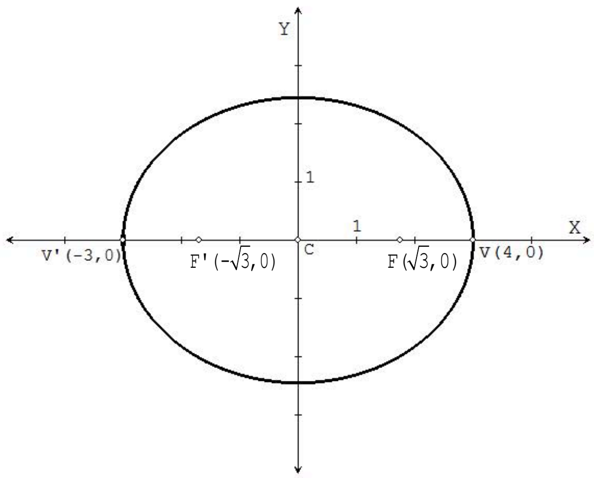
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ Ecuación en su forma ordinaria o canónica

Además $Lr=\frac{2b^2}{a} = \frac{2(7)}{4} = \frac{7}{2}$ y los vértices tienen de coordenadas V(4,0) y V’(-4,0)

Hallar la ecuación de la elipse con vértices V(3,0) y V'(-3,0) y longitud de los lados rectos Lr =4.

Al graficar los vértices vemos que se trata de una elipse horizontal, ya que el eje mayor está sobre el eje X, y además tenemos el valor de a=3, distancia del centro al vértice.



Como Lr=4 y Lr=$\frac{2b^2}{a}$ entonces $4 = \frac{2b^2}{3}$, $12=2b^2 \therefore b^2=6$

Como ya tenemos los valores de $a^2=9$ y $b^2=6$ mediante la relación $c^2=a^2-b^2$ obtenemos el valor de c^2

$$c^2=9-6$$

$$c^2=3 \quad \text{entonces } c=\sqrt{3}$$

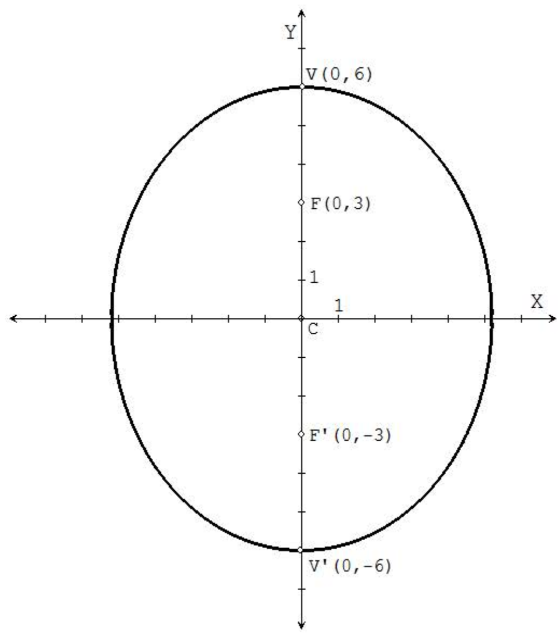
los focos tienen de coordenadas F$(\sqrt{3},0)$ y F'$(-\sqrt{3},0)$, el valor de la excentricidad es e=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la elipse es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Es decir: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ Ecuación ordinaria o canónica de la elipse

Encuentra la ecuación de la elipse con focos F(0,3) y F'(0,-3) y Lr=9

Al graficar los focos podemos observar que se trata de una elipse vertical y por simetría se deduce que el centro está en el origen de las coordenadas, además tenemos el valor c=3



Conocemos el valor del lado recto Lr=9 entonces $9 = \frac{2b^2}{a}$ tenemos una ecuación con dos incógnitas, de tus cursos pasados viste que se necesitan 2 ecuaciones cuando se tienen dos incógnitas; así que obtengamos otra, esta se puede obtener a partir de la relación $c^2=a^2-b^2$ conocemos c=3 así que queda $9=a^2-b^2$

Así tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas :

$9 = \frac{2b^2}{a}$ y $9 = a^2-b^2$

Despejamos b^2 de la primera y la sustituimos en la segunda

$b^2=\frac{9a}{2}$ $9=a^2-\left(\frac{9a}{2}\right)$ multiplicando por 2 tenemos

$18= 2a^2-9a$

$2a^2-9a-18=0$ nos queda una ecuación de segundo grado

Resolviendo por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a=2, b=−9 y c=−18 tenemos a_1=6 y a_2=−1.5

Descartamos −1.5 ya que es una longitud y estas se deben considerar positivas.

Por lo tanto a=6, una vez conocido el valor de a=6 lo sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones y tenemos:

$9 = \frac{2b^2}{a}$ $\quad 9=\frac{2b^2}{6}$ $\quad b^2=\frac{(9)(6)}{2}=27$

La ecuación de la elipse en su forma ordinaria es $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

También se pueden indicar sus vértices V(0,6) y V'(0,-6) y

la excentricidad $e=\frac{c}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$ obtener:

a) Excentricidad
b) Ejes mayor y menor
c) Ancho focal
d) Coordenadas de vértices y focos
e) Gráfica

De acuerdo a la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se debe de considerar su forma, por lo que dividimos entre 36 toda la ecuación.

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ Ecuación de la elipse, los vértices sobre el eje de "X"

Calculemos los valores de a, b, c, para después obtener los ejes mayor y menor y la distancia focal.

$$a^2 = 9 \qquad b^2 = 4$$
$$a = \sqrt{9} \qquad b = \sqrt{4}$$
$$a = 3 \qquad b = 2$$

Para obtener el valor de c usamos la relación $a^2 = b^2 + c^2$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = 9 - 4 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Calculamos ejes mayor y menor y distancia focal

$$\text{Ejemayor} = 2a = 2(3) = 6$$
$$Eje\text{ menor} = 2b = 2(2) = 4$$
$$D\text{istancia entre los foco} = 2\sqrt{5}$$

Por lo tanto los focos tienen coordenadas $F(\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-\sqrt{5}, 0)$

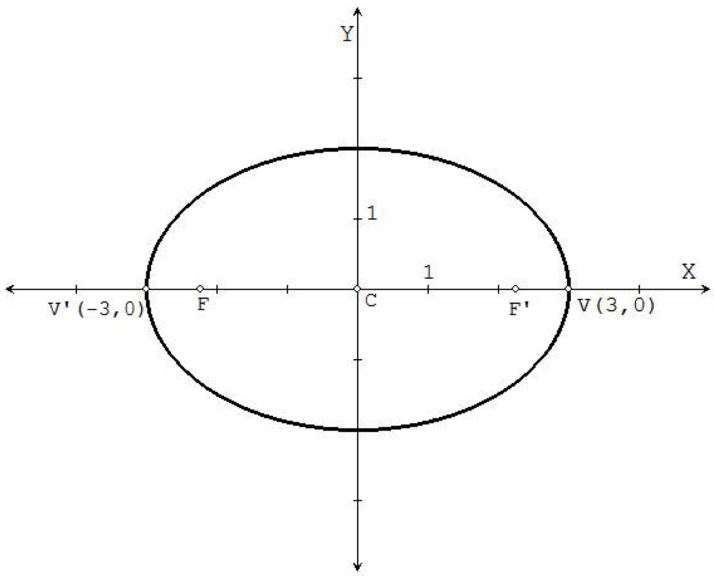
Se determinemos la excentricidad con la ecuación correspondiente.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Calculemos el lado recto, considerando que el valor de b=4 y a=3

Lado recto Lr= $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Gráfica:



Dada la elipse de ecuación $16x^2 + 9y^2 = 144$ obtener:

a) Excentricidad

b) Ejes mayor y menor

c) Ancho focal

d) Coordenadas de vértices y focos

e) Gráfica

De acuerdo a la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se debe de considerar su forma, por lo que dividimos entre 144 toda la ecuación.

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

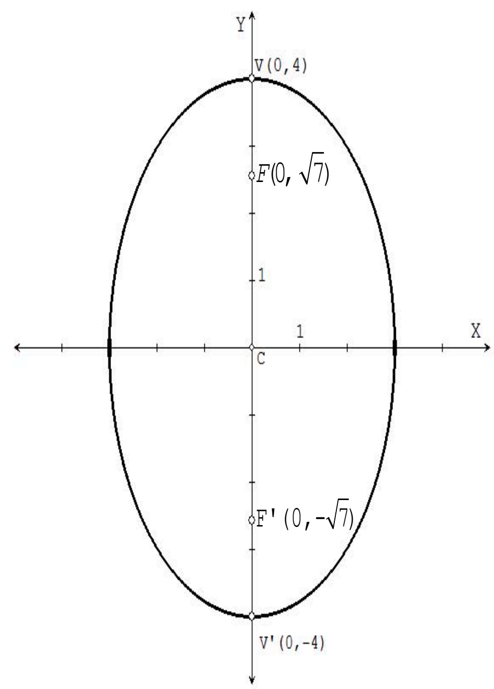
Podemos ver que se trata de una elipse vertical

Calculamos los valores de a, b, c, para después obtener los ejes mayor y menor y la distancia focal.

$$\begin{array}{ll} a^2=16 & b^2=9 \\ a=\sqrt{16} & b=\sqrt{9} \\ b=4 & b=3 \end{array}$$

Para obtener el valor de c usamos la relación: $a^2=b^2+c^2$

$$c^2=a^2-b^2$$
$$c^2=16-9$$
$$c^2=7$$
$$c=\sqrt{7}$$



De lo anterior tenemos que

Excentricidad $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Eje mayor=2a =2(4)=8

Eje menor=2b=2(3)=6

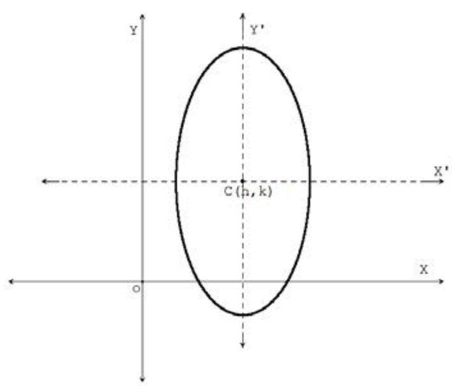
Lado recto $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(9)}{4}=\dfrac{18}{4}=\dfrac{9}{2}$

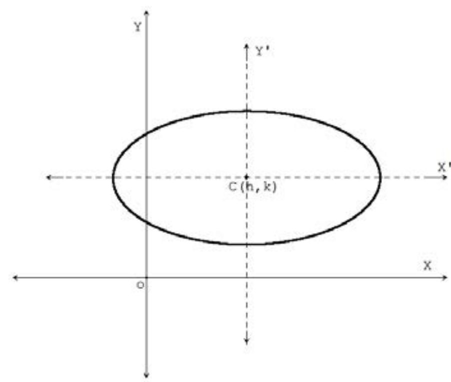
Coordenadas de focos F'(0,-$\sqrt{7}$) y F(0,$\sqrt{7}$)

Coordenadas de vértices V'(0,-4) y V(0,4)

Ecuación de la elipse horizontal y vertical con centro en cualquier punto del plano

Para los dos casos de la elipse horizontal y vertical el centro es el punto C(h,k), mediante una traslación de ejes obtenemos las ecuaciones, recordando que **x**′=x-h y **y**′=y-k





Elipse vertical con centro fuera del origen

Elipse horizontal con centro fuera del origen

Por lo tanto la ecuación de la elipse respecto de los ejes X′ y Y′ es:

$$\frac{(x\prime)^2}{a^2}+\frac{(y\prime)^2}{b^2}=1$$

Sustituyendo x′ y y′ tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

que es la forma ordinaria o canónica de la ecuación de la elipse horizontal con centro en C(h,k).

Análogamente se obtiene la ecuación de la elipse vertical con centro en C(h,k)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

A continuación veremos algunos ejemplos que nos ilustren el uso de dichas fórmulas

Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son V(4,8) y V'(4,-2) y cuyos focos son F(4,6) y F'(4,0).

Al observar que los vértices y los focos tienen la misma ordenada vemos que se trata de una elipse vertical con centro fuera del origen. El centro se obtiene sacando el punto medio de los vértices o de los focos, este es C(4,3). También conocemos la distancia del centro al vértice a=5, la distancia del centro al foco c=3, con estos datos y con la relación $c^2=a^2-b^2$ calculamos el lado b:

$b^2=a^2-c^2$

$b^2=25-9$

$b^2=16$

$b=4$

Con los datos anteriores podemos escribir la ecuación de la elipse en su forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$

Si se desea, se puede calcular la longitud del lado recto: $Lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{5}=\frac{32}{5}$ y $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

De la forma ordinaria de la ecuación de la elipse se desarrollan los binomios, se reduce y obtenemos:

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$

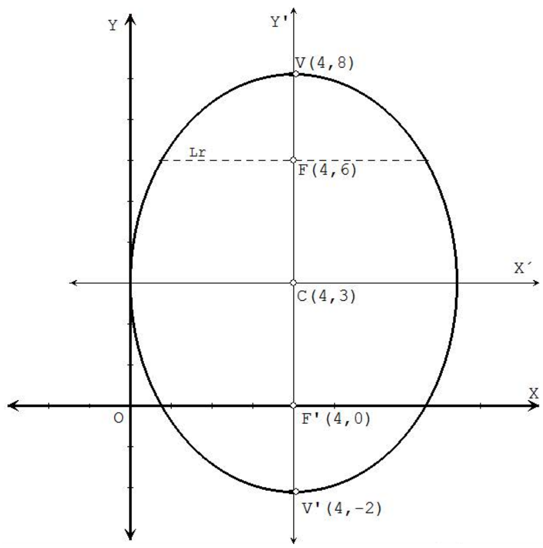
$$25(x-4)^2+16(y-3)^2=1$$

$$25(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=400$$

$$25x^2-200x+400+16y^2-96y+144-400=0$$

$$25x^2+16y^2-200x-96y+144=0$$

Esta ecuación se conoce como ecuación general de la ecuación de la elipse.



Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son V(8,2) y V'(-4,2) y focos F(6,2) y F'(-2,2).

Al observar que los vértices y focos tienen la misma ordenada se deduce que se trata de una elipse horizontal, cuyo centro está en el punto medio de los vértices o de los focos y es C(2,2), de los vértices tenemos a=6 y de los focos c=4, mediante la relación $c^2=a^2-b^2$ obtenemos b:

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=36-16$$

$$b^2=20$$

$$b=\sqrt{20}$$

Calculando los elementos $Lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(20)}{6}=\frac{20}{3}$ y $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

La ecuación buscada corresponde a una elipse horizontal con centro fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$$

Y en su forma general:

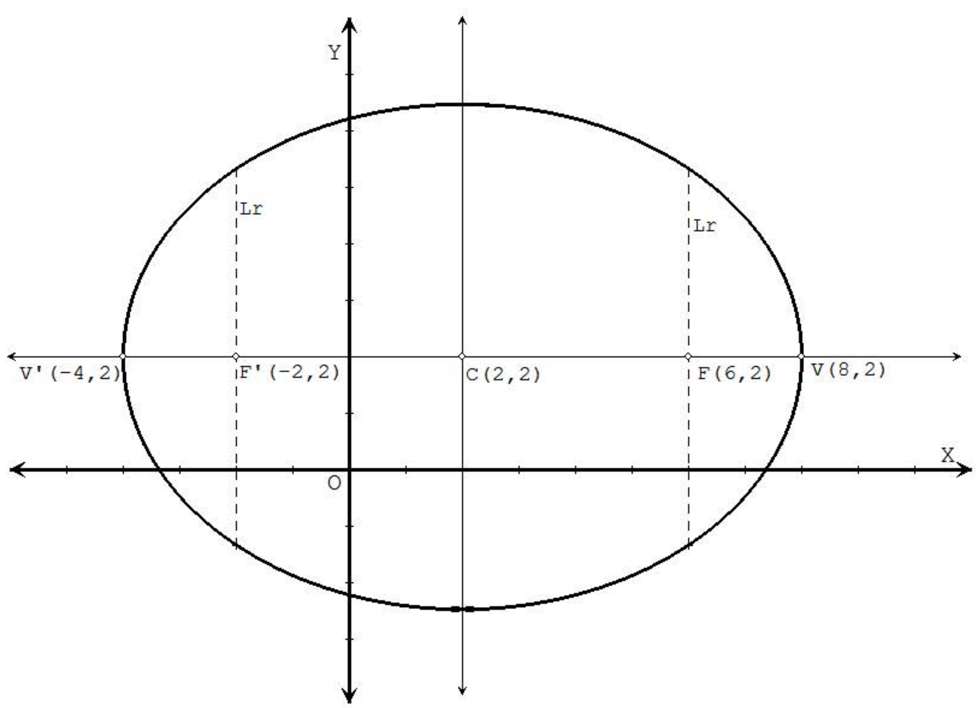
$$20(x-2)^2+36(y-2)^2=720$$

$$20(x^2-4x+4)+36(y^2-4y+4)=720$$

$$20x^2-80x+80+36y^2-144y+144-720=0$$

$$20x^2+36y^2-80x-144y-496=0$$

Reduciendo $5x^2+9y^2-20x-36y-124=0$



Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos F(6,3) y F'(-4,3) y tiene el valor e=$\frac{5}{8}$ de excentricidad.

El valor e=$\frac{5}{8}=\frac{c}{a}$ por lo tanto a=8 y c=5 mediante la relación $b^2=a^2-c^2$

$b^2=64-25=39$

Encontremos los elementos: Lr=$\frac{2b^2}{a}=\frac{2(39)}{8}=\frac{78}{8}=\frac{39}{4}$

El centro está en el punto medio de los vértices o los focos y es C(1,3)

Por tener la misma ordenada los focos, se trata de una elipse horizontal, con vértices en V(9,3) y V'(-7,3) y por ecuación :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{39}=1$$

Es la forma ordinaria o canónica de la elipse.

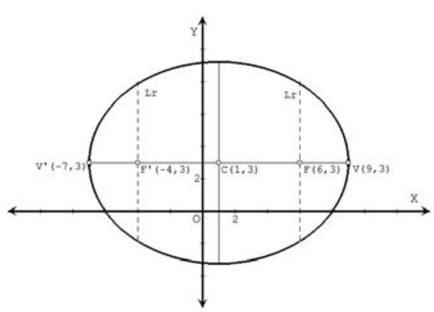
Obtengamos la fórmula general desarrollando los binomios y reduciendo términos semejantes:

$39(x-1)^2+64(y-3)^2=2496$

$39(x^2-2x+1)+64(y^2-6y+9)=2496$

$39x^2-78x+39+64y^2-384y+576-2496=0$

$39x^2+64y^2-78x-384y-1881=0$ Ecuación general de la elipse.



Encuentra la ecuación de la elipse cuyos vértices son V(10,-2) y V'(2,-2) y cuya excentricidad es $e=\frac{1}{2}$

Como los vértices tienen la misma ordenada se trata de una elipse horizontal que tiene su centro en el punto medio de los vértices, esto es, C(6,-2), de los vértices obtenemos a=4 distancia del centro al vértice.

Como $e=\frac{1}{2}=\frac{c}{4}$ 4=2c   c=2

La b, la obtenemos de la relación $b^2=a^2-c^2=16-4=12$ $\therefore b=\sqrt{12}$

La longitud del lado recto: $Lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(12)}{4}=6$

La ecuación ordinaria es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

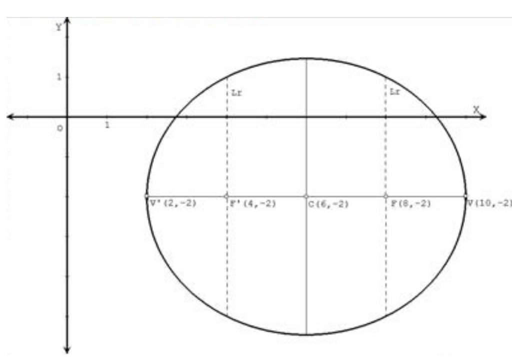
Sustituyendo el centro a y b tenemos:

$$\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{12}=1$$

Que en su forma general queda:

$$12x^2+16y^2-144x+64y+304=0$$

$$3x^2+4y^2-36x+16y+76=0$$



Encuentra, el centro, los vértices, los focos, los ejes mayor y menor, distancia focal, valor de la excentricidad y lado recto de la elipse cuya ecuación es:

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{7}=1$$

Observamos que la ecuación dada tiene la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

De esta ecuación obtenemos los siguientes datos:

Centro	eje mayor	eje menor	distancia focal
			$c=\sqrt{a^2-b^2}$
$\mathrm{c}(1,-2)$	$a^2=16$	$b^2=7$	$c=\sqrt{16-7}$
$\mathrm{c}(h,k)$	$a=\sqrt{16}$	$b=\sqrt{7}$	$c=\sqrt{9}$
$h=1$	$a=4$	$2b=2\sqrt{7}$	$c=3$
$k=-2$	$2a=8$		$2c=2(3)=6$

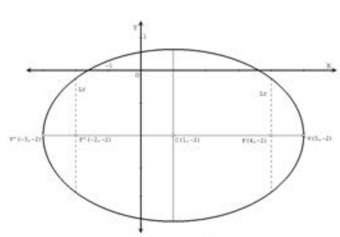
Vértices V'(-3,-2) , V(5,-2)

Focos F'(-2,-2), F'(4,-2)

Calculamos la excentricidad con la siguiente relación.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

Longitud del lado recto Lr$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(7)}{4}=\dfrac{7}{2}$



Encuentra, el centro, los vértices, los focos, los ejes mayor y menor, distancia focal, valor de la excentricidad y lado recto de la elipse cuya ecuación es:

$$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$$

$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$

Agrupamos términos semejantes $(4x^2+16x)+(9y^2-18y)=11$

Factorizamos cada expresión $4(x^2+4x)+9(y^2-2y)=11$

Completamos los cuadrados $4(x^2+4x+4)+9(y^2-2y+1)=11+16+9$

Factorizamos los trinomios y obtenemos $4(x+2)^2+9(y-1)^2=36$

Dividimos la ecuación entre 36, para igualar a 1 y despejar los numeradores.

$$\frac{4(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ Ecuación en su forma ordinaria o reducida.

Observamos que la ecuación dada es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

De esta ecuación obtenemos los siguientes datos:

Centro	Eje mayor	Eje menor	Distancia focal
$c(-2,1)$	$a^2=9$	$b^2=4$	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
$c(h,k)$	$a=\sqrt{9}$	$b=\sqrt{4}$	$c=\sqrt{9-4}$
$h=-2$	$a=3$	$b=2$	$c=\sqrt{5}$
$k=1$	$2a=6$	$2b=4$	$2c=2\sqrt{5}$

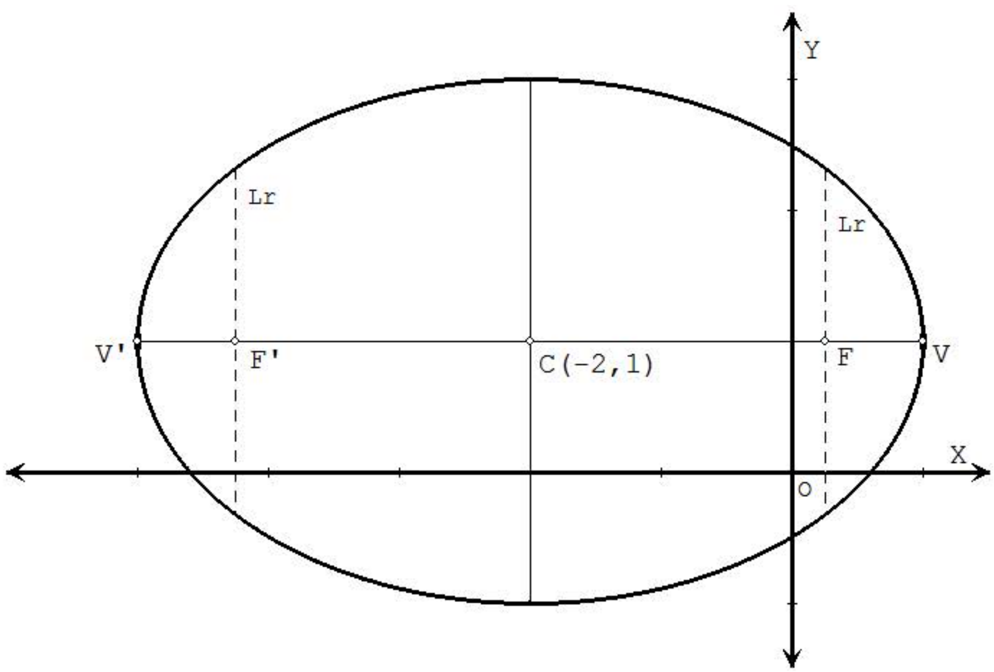
Vértices V'(-5,1) , V(1,1)

Focos F'(-2-$\sqrt{5}$,1), F'(-2+$\sqrt{5}$,1)

Calculamos la excentricidad con la siguiente relación:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Longitud de los lados rectos: $Lr = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$



Hallar los elementos de la elipse cuya ecuación es:

$$3x^2+4y^2+6x-24y+27=0$$

Transformemos la ecuación general en su forma ordinaria:

$$(3x^2+6x)+(4y^2-24y)=-27$$

$$3(x^2+2x)+4(y^2-6y)=-27$$

$$3(x^2+2x+1) + 4(y^2-6y+9)=-27+3+36$$

$$3(x+1)^2+4(y-3)^2=12$$

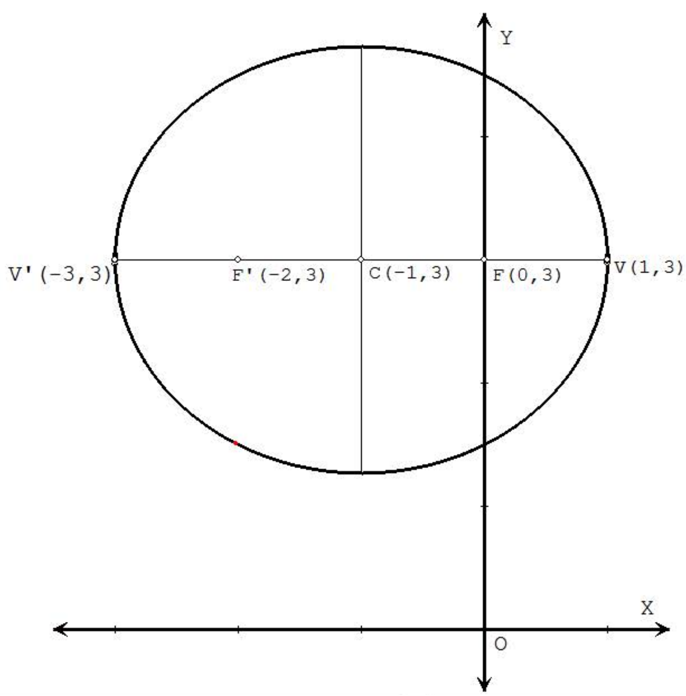
$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$$

De aquí se deduce que el centro tiene coordenadas C(-1,3)

El valor de $a^2=4$ y $b^2=3$, por lo que se trata de una elipse horizontal y mediante la relación $c^2=a^2-b^2=4-3=1 \therefore c=1$

El valor de la excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ y $Lr=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(3)}{2}=3$

Las coordenadas de los vértices son V(1,3) y V'(-3,3) y las de sus focos F(0,3) y F'(-2,3)



Forma general de la ecuación de la elipse

A partir de las formas ordinarias de la elipse con centro en cualquier punto del plano, obtendremos las generales, comencemos por la ecuación de la elipse horizontal.

Su forma ordinaria o canónica es :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Sumando las fracciones $\frac{b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$

Despejando $b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$

Desarrollando los binomios $b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2) \quad =a^2b^2$

Multiplicando $b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2=a^2b^2$

Ordenando $b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$

Si comparamos lo obtenido con la ecuación general de segundo grado con dos variables:

$$Ax^2+Bxy++cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Vemos que B=0, ya que no existe término xy, $A=b^2$, $C=a^2$, $D=-2b^2h$, $E=-2a^2k$ y $F=b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$

De acuerdo con estos valores la ecuación general de la elipse horizontal es:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+F=0$$

Note que A≠C y tienen el mismo signo.

Forma general de la ecuación de una elipse vertical

Partimos de la forma ordinaria o canónica de la ecuación de la elipse vertical con centro fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-\square)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2}{a^2b^2}=1$$

$$a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$a^2(x^2-2hx+h^2)+b^2(y^2-2ky+k^2) \quad =a^2b^2$$

$$a^2x^2-2a^2hx+a^2h^2+b^2y^2-2b^2ky+b^2k^2-a^2b^2=0$$

Si comparamos lo obtenido con la ecuación general de segundo grado con dos variables:

$$Ax^2+Bxy++cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Vemos que B=0 ya que no existe término xy, $A=a^2$, $C=b^2$, $D=-2a^2h$, $E=-2b^2k$ y $F=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$

De acuerdo con estos valores la ecuación general de la elipse horizontal es:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Note que $A\neq C$ y tienen el mismo signo.

Resolvamos un ejemplo donde las apliquemos:

Encuentra los elementos de la elipse suya ecuación es:

$$9x^2+6y^2+54x-36y+81=0$$

De las formas generales de las elipses horizontal y vertical vemos que si el coeficiente de x^2 es menor que el coeficiente de y^2 se trata de una horizontal y cuando el coeficiente de x^2 es mayor que el de y^2 como es nuestro caso se trata de una elipse vertical, 9>6, y usaremos las fórmulas:

$A=a^2$,$C=b^2$, $D=-2a^2h$, $E=-2b^2k$, $F=a^2h^2+b^2k^2-a^2b^2$

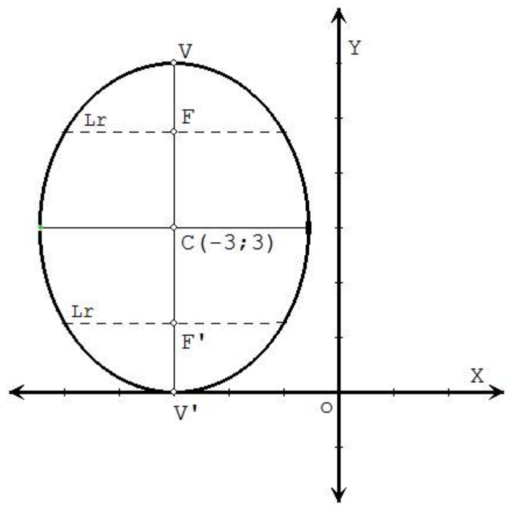
$9=a^2$, $6=b^2$, $54=-2(9)h$, $-36=-2(6)k$

$$\frac{54}{-18}=h \qquad \frac{-36}{-12}=k$$

$$K=3$$

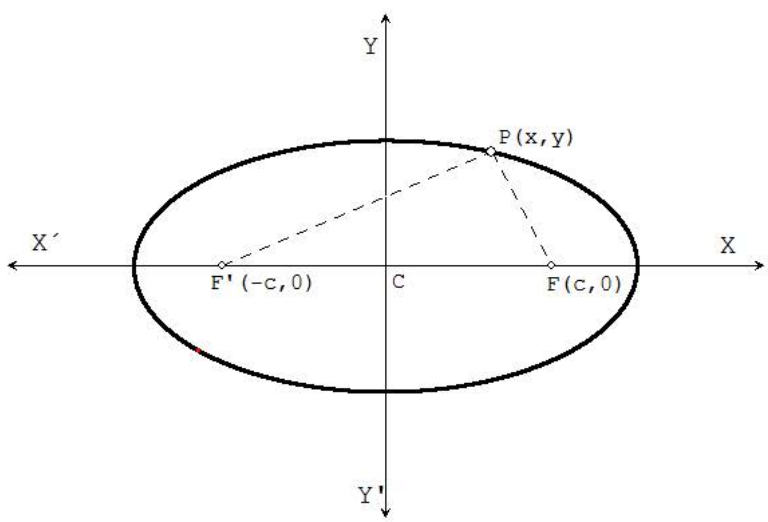
Por lo tanto el centro está en C(h,k), C(-3,3), los vértices están en V(-3,6)y V'(-3,0), los focos en F($-3,3+\sqrt{3}$) y

$F'(-3,3-\sqrt{3})$ $a=3$, $b=\sqrt{6}$ y $c=\sqrt{3}$.



Radio vectores

A las distancias desde un punto cualquiera de la elipse hasta cada uno de los focos se le llama radio vector.



Usando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos que esta suma es igual a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

La elipse tiene una propiedad de reflexión parecida a la de la parábola, si un rayo sale de un foco de la elipse, este la refleja en ella hacia el otro foco[13], en astronomía es básico su estudio, ya que algunos cuerpos celestes siguen órbitas de forma elíptica, los cuerpos celestes alrededor del sol, siguen este tipo de órbitas, de ahí la primera ley de Keppler que dice:

Un planeta gira alrededor del Sol, en órbita elíptica con el Sol en un foco[14].
Así se ha podido predecir la órbita del Cometa Halley[15].

La elipse tiene curiosas e interesantes propiedades, las que resultan sumamente útiles en la naturaleza, la ciencia, maquinaria o el arte.

En la naturaleza
Los satélites terrestres viajan en torno a nuestro planeta en órbitas elípticas. Los planetas del sistema solar giran en torno al Sol en órbitas elípticas, y el Sol ocupa el lugar de uno de los focos.
En algunos museos, la galería de los susurros es una atracción interesante, su forma es elíptica, si dos personas se colocan en los focos, pueden susurrar y escucharse claramente una a la otra, mientras que las personas situadas en otros lugares no los pueden escuchar. Esto sucede en virtud de que las ondas de sonido que emanan de un foco se reflejan en el otro, concentrándose en él.[16]

En la ciencia

Una aplicación científica es el empleo de reflectores elípticos de ultrasonido para disgregar los cálculos renales: se coloca el reflector de tal modo que el cálculo esté en uno de los focos y la fuente sonora en el otro, las ondas se concentran en la piedra haciéndola vibrar y desintegrándola[17].

En maquinaria

Se utilizan ruedas dentadas de forma elíptica, cuando se necesitan distintas velocidades de marcha, como en las máquinas afiladoras, limadoras, mortajadoras o cepilladoras, en las que la velocidad de corte es menor que la velocidad de retorno[18].

En el arte

En la Arquitectura se utiliza frecuentemente la elipse por la belleza de sus formas. Obras famosas se han construido con forma elíptica; por ejemplo, el Coliseo en Roma[19]. La elipse se ha utilizado también para estructuras de puentes, en viaductos; así como en arcos, vidrieras, puertas y edificios.

2.9. Problemario

1. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que cumple con el dato que se indica en cada ejercicio:

a)F(0,-3)

b) Directriz $y = 8$

2. Encuentra el foco, directriz, lado recto, ecuación del eje, de las parábolas cuya ecuación es:

a) $y^2-24x=0$

b) $x^2+24y=0$

c) $x^2+8y=0$

d) $y^2-8x=0$

e) $y^2=16x$

3. Hallar la ecuación de la parábola en su forma ordinaria y general, que cumpla con los datos que se dan:

a) V(2,-1), F(4,-1)

b) V(-3,-3), F(-1,-3)

c) V(2,3), F(2,6)

d) V(1,-3), F(1,-5)

e) V(2,2), directriz x=-2

4. Calcula el vértice, foco, ecuación de la directriz, longitud del lado recto, ecuación del eje, y el valor de p, de las parábolas cuya ecuación es:

a) $x^2-6x-16y+25=0$

b) $x^2-6x+8y+41=0$

c) $y^2+16x+4y-12=0$

d) $y^2+20x+8y+56=0$

e) $y^2-12x-6y+57=0$

5. Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el centro de la circunferencia cuya ecuación se da y su foco es el punto que se indica

$$x^2+y^2+8x+10y-1=0,\ F(-4,-1)$$

6. Encontrar la ecuación de la elipse cuando se conocen los siguientes datos:

a) V(5,0) y V'(-5,0), F(3,0) y F'(-3,0)

b) V(0,6)y V'(0,-6), F(0,4) y F'(0,-4)

c) V(9,0) y V'(-9,0), F(7,0) y F'(-7,0)

7. Encuentra los siguientes elementos de la elipse, vértices, focos, longitud de los lados rectos, excentricidad y centro de la elipse cuya ecuación es:

$$16x^2+25y^2-400=0$$

2.10. Autoevaluación

1. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en V(0,0) y foco F(9,0)
2. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es la recta $x=-10$
3. Encuentra el vértice, foco, lado recto, la ecuación de la directriz d, y la ecuación del eje de la parábola cuya ecuación es:

$$x^2-4y=0$$

4. Halla la ecuación de la parábola con vértice en V(4,5) y foco F(4,1)
5. Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria y general, que tiene su vértice en el centro de la circunferencia cuya ecuación se da y su foco es el punto que se indica

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$, F(1,4)

6. Hallar la ecuación de la elipse si sus vértices son V(6,0) y V'(-6,0) y sus focos son F(4,0) Y F'(-4,0).
7. Hallar los vértices, focos, longitud de los lados rectos, excentricidad y centro de la elipse cuya ecuación es:

$16x^2+25y^2-400=0$

8. Conociendo la excentricidad $e=\frac{2}{3}$ y los vértices V(3,1) y V'(-9,1) encontrar la ecuación de la elipse.
9. Encuentra el centro, vértices, focos, excentricidad y longitud de los lados rectos de la elipse que tiene por ecuación:

$4x^2+y^2+16x+6y+21=0$

2.11. Soluciones del problemario

1.

a) $x^2 = -12y$

b) $x^2 = -32y$

2.

a) F(6,0), directriz; $x=-6$, Lr=24, ecuación del eje; y=0

b) F(0,-6), directriz; y=6, Lr=24, ecuación del eje; x=0

c) F(0,-2), directriz; y=2, Lr=8, ecuación del eje; x=0

d) F(2,0), directriz; $x=-2$, Lr=8, ecuación del eje; y=0

e) F(4,0), directriz; $x=-4$, Lr=16, ecuación del eje; y=0

3.

a) $(y+1)^2=8(x-2)$; $y^2-8x+2y+17=0$

b) $(y+3)^2=8(x+3)$; $y^2-8x+6y-15=0$

c) $(x-2)^2=12(y-3)$; $x^2-4x-12y+40=0$

d) $(x-1)^2=-8(y+3)$; $x^2-2x+8y+25=0$

e) $(y-2)^2=16(x-2)$; $y^2-16x-4y+36=0$

4.

a) V(3,1), F(3,-5), Lr=16 , d; $y=-3$, eje; x=3, p=4

b) V(3,-4), F(3,-6), Lr=8 d; $y=-2$, eje; x=3, $p=-2$

c) V(1,-2), F(1,-6), Lr=16 d; x=5, eje; $y=-2$, $p=-4$

d) V(-2,-4), F(-7,-4), Lr=20 d; x=3, eje; y=-4, $p=-5$

e) V(4,3), F(7,3), Lr=12 d; x=1, eje; y=3, p=3

5. $(x+4)^2=16(y+5)$; $x^2+8x-16y-64=0$

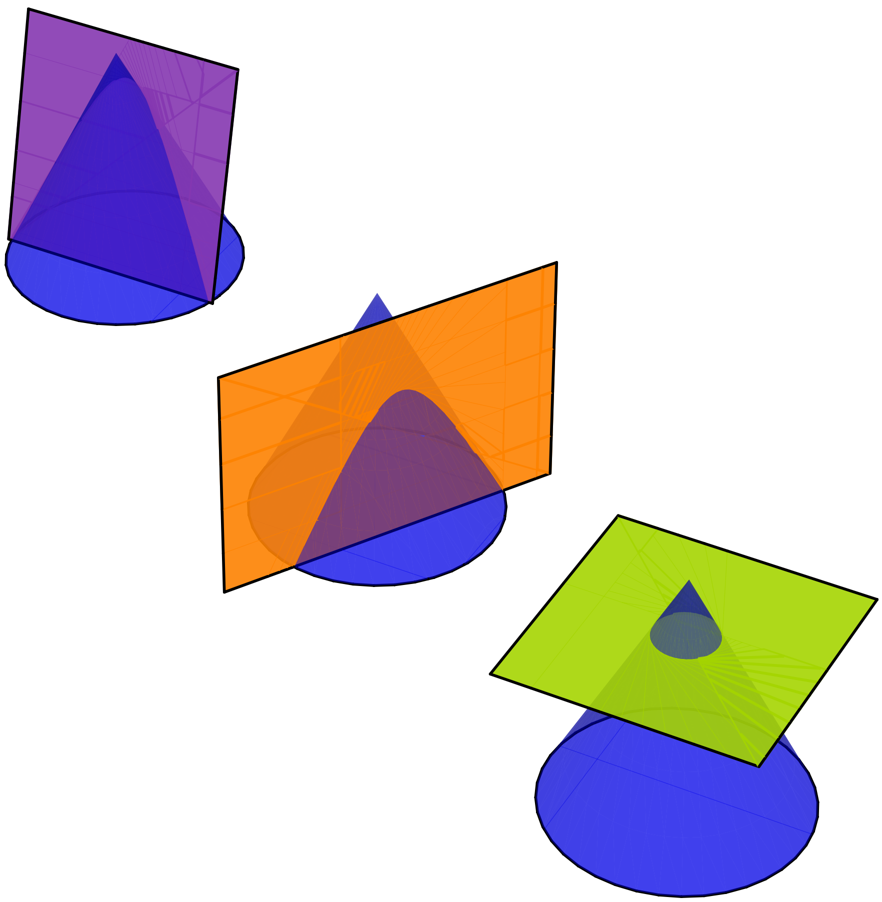
6.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$

c) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1$

7. $\mathrm{V}(5,0)$ y $\mathrm{V}'(-5,0)$, $\mathrm{F}(3,0)$ y $\mathrm{F}'(-3,0)$, $\mathrm{Lr}=\frac{32}{5}$, $\mathrm{e}=\frac{3}{5}$, $C(0,0)$.

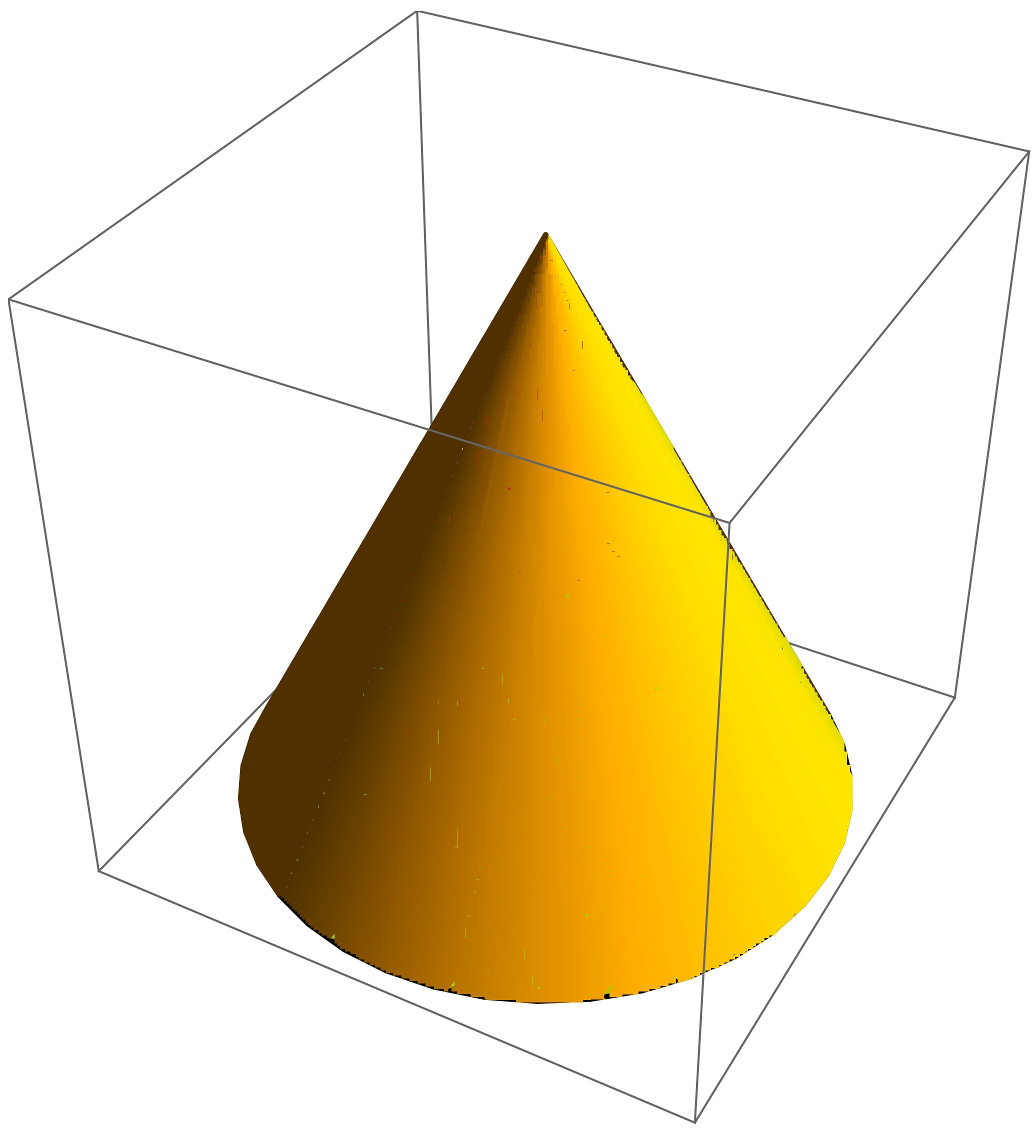


2.12. Soluciones de autoevaluación

1. $y^2 - 36x = 0$
2. $y^2 = 40x$
3. V(0,0), F(0,1), Lr =4, ecuación de la directriz y=−1, ecuación del eje x=0
4. . $(x-4)^2=-16(y-5)$; $x^2-8x+12y-64=0$
5. $(x-1)^2=24(y+2)$; $x^2-2x-24y-47=0$
6. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1;\quad 20x^2+36y^2-720=0$
7. V(5,0) y V'(-5,0), F(3,0) y F'(-3,0), $e=\frac{3}{5}$, C(0,0)
8. $\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{20}=1\,;\quad 20x^2+36y^2+120x-72y-504=0$
9. C(-2,-3),V(-2,-1) y V'(-2,-5),F(-2,+$\sqrt{3}$) y F'(-2,-$\sqrt{3}$), $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, Lr=1

2.13. Conclusiones

En este capítulo tuviste un acercamiento a dos curvas muy importantes por sus aplicaciones, la parábola y la elipse. En tus próximos cursos aplicarás sus propiedades, como en la descripción de la trayectoria de cuerpos celestes, como de objetos que describen trayectorias parabólicas o elípticas. Gracias a dichas propiedades se ha podido predecir la posición de cuerpos celestes y explicar nuestro entorno.



Referencias

[1] Carreño García, J. Jesús & Ochoa Hernández, Silvia (2014) Representación simbólica y angular del entorno. México: CONALEP/CIE

[2] Rodríguez Marisol, et. al. (2011) Representación gráfica de funciones. México: CONALEPMICH

[3] Kasner Edward & Newman James (2007) Matemáticas e imaginación . México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

[4] Galindo Jesús (2005) Matemáticas 4 Geometría Analítica . México: Umbral, editorial, S.A. de C.V.

[5] Haeussler Ernest F. et.al. (2003) Matemáticas para administración y economía. México: Pearson Educación

[6] Rodriguez Núñez, Marisol & et. al. (2011). Representación gráfica de funciones. México: CONALEPMICH/CIE

[7] Little Heath Sir Thomas (**1981**) *A history of Greek mathematics. Toronto*. Courier Dover Publications. Recuperada 20 de Julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=41s9fPYjxJQC&dq=elipse,+Menaechmus&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[8] Oteyza, Elena, et al. (**2005**) *Geometría analítica*. México. Pearson. Recuperada 15 de julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=cYRE9rWilbkC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[9] Flores Meyer Marco Antonio & Fautsch Tapia Eugenio L. (**2005**) *Geometría Analítica Básica*. México. Progreso: Recuperada 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=fBMVkFN6ZqUC&dq=elipse,+geometria+analitica&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[10] Swokowski/, Cole (**2009**) *Álgebra Y Trigonometría con Geometría Analítica*. México. Cengage Learning: Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=xDL0yU37K4wC&dq=elipse,+geometria+analitica&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[11] Jaime P. Patricia et al (2007) *Geometría Analítica.,*México: UMBRAL. Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=lUZCCAYSM0AC&printsec=frontcover&dq=geometria+analitica&hl=es&ei=XhMlTvvXKYbKiAK52NCKCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=3&ved=0CDYQ6AEwAg#v=onepage&q&f=false

[12] Engler Adriana et al(2005)*Geometría Analítica*. Santa Fe, Argentina: UNL. Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=jLHB0fdw67AC&printsec=frontcover&dq=geometria+analitica&hl=es&ei=OBIlTsjeHMzTiAKb75TmCQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=2&ved=0CDEQ6AEwAQ#v=onepage&q=ELIPSE&f=false

[13] De Oteyza De Oteyza Elena, et al (2001) *Geometría y Trigonometría.* México: Pearson. Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=4bHgbXfpDrkC&pg=PA492&dq=aplicaciones+de+la+elipse&hl=es&ei=MNMlTtKxJ4LniAKUt73dCQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCgQ6AEwAA#v=onepage&q=aplicaciones%20de%20la%20elipse&f=false consultado el 19 de julio de 2011

[14] Stewrt James (2008).*Cálculo De varias variables: trascendentes tempranas.*México: CENGAGE Learning. Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=pXen9LeyRzMC&pg=PA848&dq=primera+ley+de+kepler&hl=es&ei=UtslTuCUBNPUiAKrsYmVCg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CCsQ6AEwAA#v=onepage&q=%20kepler&f=false

[15] Larson H. Ron (2008) *Precálculo*México: Reverté. Recuperado 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=opIn4vEn3pAC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

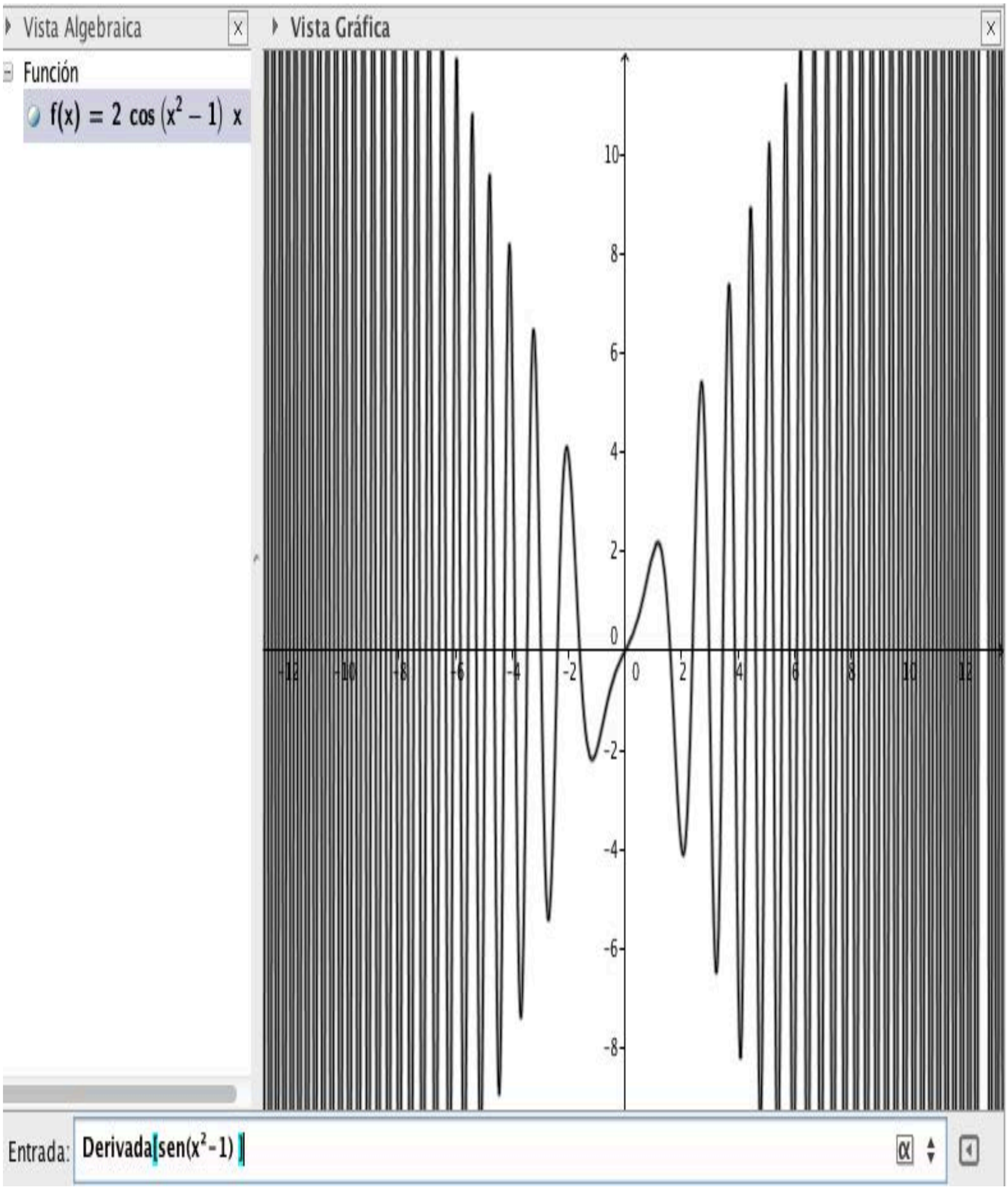
[16] Smith, A Stanley; et al (**1998**) *Algebra, trigonometría y geometría analítica*. México. Pearson Educación: Recuperada el 19 de julio de 2011 de http://books.google.com.mx/books?id=qSZ7yArbAb4C&dq=elipse,+geometria+analitica&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[17] Douglas F. Riddle (**1996**) *Geometría analítica*. México. Cengage Learning : Recuperada el 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=XpABZBRV4gQC&dq=elipse,+geometria+analitica&hl=es&source=gbs_navlinks_s

[18] Palmer Claude Irwin (**2003**) *Matemáticas prácticas*. España. Reverté: Recuperada el 20 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=svzuB4pZKjkC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[19] Ibáñez Carrasco Patricia & Gerardo García Torres (2010) *Matemáticas III. Geometría Analítica*. Cengage Learning: Recuperada 19 de julio de 2011, de http://books.google.com.mx/books?id=zfEsLBNneb0C&hl=es&source=gbs_navlinks_s

Capítulo 3: Representación gráfica de derivadas



Introducción

Si analizamos todo lo que nos rodea, podemos observar que todo está en constante cambio, por ejemplo uno de los problemas actuales que estamos viviendo es el cambio climático presente en el incremento de temperatura y nivel del mar, por los deshielos de los glaciares. Generalmente manejamos los términos variación o cambio en nuestra vida cotidiana, haciendo referencia a los cambios que se están presentando en situaciones políticas, sociales y ambientales entre otros. Un ejemplo cercano son los fenómenos naturales como lo es la lluvia, inundaciones, terremotos.

Las Matemáticas están al servicio del hombre y de sus necesidades, el concepto de derivada se ha utilizado para conocer la variación de cualquier magnitud que depende funcionalmente de otra.[1]

El término derivada evolucionó a partir de dos situaciones que se suscitaban en el siglo XVII, el cálculo de la tangente a una curva en el plano y la velocidad de un cuerpo en movimiento.

El concepto de derivada apareció a partir de querer encontrar la tangente a una curva en un punto, así como determinar la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento. El iniciador de este concepto fue Isaac Barrow que pensó en un método para trazar la tangente a una curva en un punto dado, años más tarde, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz por vías semejantes y lenguajes diferentes formalizaron dicho concepto.[2]

3. Funciones algebraicas

El concepto de función es uno de los más importantes, como se mencionó en el Capítulo I, ahora estudiaremos las funciones algebraicas.

Se le denominan funciones algebraicas a todas aquellas que presentan términos algebraicos mediante algunas operaciones como es la suma, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación, involucrando a la variable independiente y no corresponden las relaciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales, por ejemplo:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$s(t) = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

$$p(q) = \sqrt{4q^2 - 4}$$

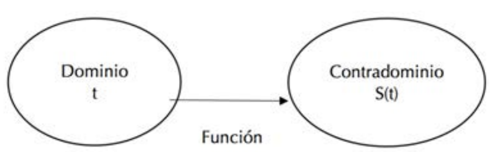
Las funciones algebraicas se clasifican en fraccionarias y racionales; esta última son a la vez fraccionadas y polinómicas.

Es importante mencionar que cada función presenta un dominio, un rango y una gráfica.

El dominio es el conjunto de datos que podemos aplicar en la función siempre y cuando esta nos dé como resultado un número real.

El rango es considerado como la imagen de la función y este se obtiene por el conjunto de resultados obtenidos de la función.

La gráfica es el conjunto de puntos que la delimita.[3]



A continuación determinaremos el dominio, el rango y obtendremos la gráfica de la función algebraica $y = x^2 + 4x - 3$.

Si observamos con atención la ecuación representa una parábola cuyos coeficientes son: $a = 1, b = 4 \; y \; c = -3$

Con estos valores calculamos las coordenadas del vértice.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(4)}{2(1)} = -2$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(-3) - (4)^2}{4(1)} = \frac{-12 - 16}{4} = -7$$

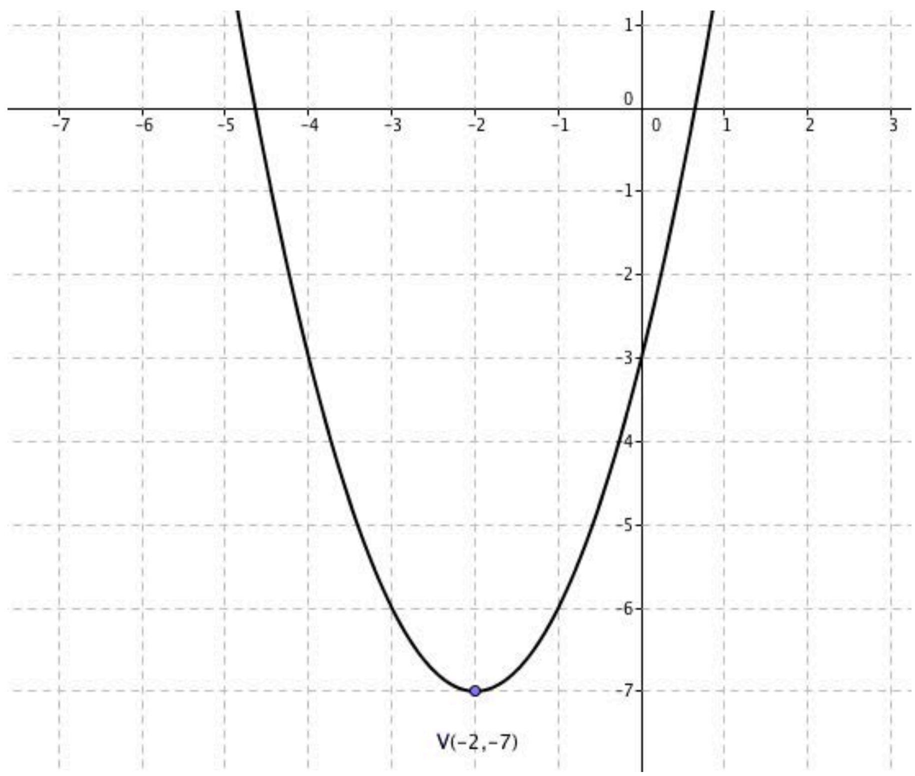
$$V(h, k) \;\; \therefore V(2, -7).$$

El coeficiente del término cuadrático es positivo a=1, por lo que la parábola abre hacia arriba.

El dominio son todos los números reales $Dom = \{\mathbb{R}\}$.

El Contradominio $\{y/ \;\; y \in [-7, \infty)\}$

Podemos elaborar una tabla de valores o aplicar lo visto en el capítulo II para hacer la gráfica.



3.1. Funciones racionales

Las funciones racionales se caracterizan por expresarse como el cociente de dos polinomios[4] o como razón de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

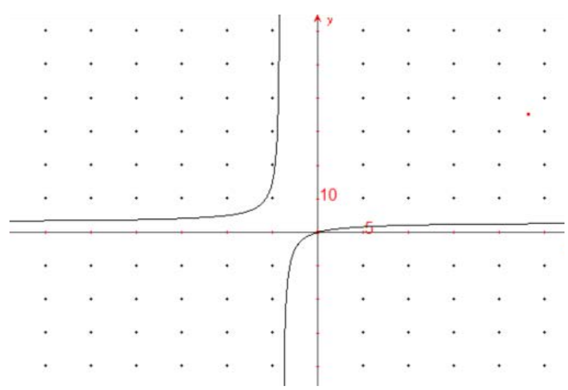
Donde $P(x)\ y\ Q(x)\ \ son\ polinomios\ con\ \ Q(x) \neq 0.$

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los números reales x, donde la función está definida[5], o bien le corresponde todos los valores de $x, cuando\ Q(x) \neq 0.$

Por ejemplo la función: $f(x) = \frac{3}{x+4}$

Si analizamos el denominador $x + 4 \neq 0$ obtendremos el dominio de la función, Dom=$\{x |\ x \neq -4\}$

x	y
-2	3/2
-1	1
0	3/4
1	3/5
2	3/6



3.2. Límites de funciones

Definición de límites

Sea la función $y = f(x)$, si el $\lim_{x\to c} f(x) = L$, significa que cuando x está cerca pero diferente de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.[6]

La noción de límite se encuentra asociada con el comportamiento de una función cuando x está muy cerca de c, pero no en c.[6]

Por ejemplo:

Calculemos el $\lim_{x\to 2}(3x^2+1)$

Cuando x tiende a 2, $(3x^2+1)$ se encuentra cerca de $(3(2)^2+1) = 12+1 = 13$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 2}(3x^2+1) = 13$

Ahora consideremos el $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{5x+2}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{5x+2} = \frac{2(-1)+1}{5(-1)+2} = \frac{-2+1}{-5+2} = \frac{-1}{-3} = 3$$

Límites por la izquierda y por la derecha, se definen de la siguiente forma:

Decir que $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la derecha de c, entonces$f(x)$ está cerca de L. De manera análoga, decir que $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ significa que cuando x está cerca pero a la izquierda de c, entonces $f(x)$ está cerca de L.[6]

Veamos un ejemplo, para determinar los límites por la izquierda y derecha de una función dada; $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}$ y el $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}$

Mediante la tabulación, obtenemos la solución:

x	0.1	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.11	2.71	2.9701	2.997	3	3.003	3.0301	3.31	3.64

Tendencia por la izquierda → ← Tendencia por la derecha

Por lo anterior la solución es:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=3 \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

Teoremas de límites

Para determinar el límite de una función se desarrollan gráficas y tablas numéricas, en las cuales se observa fácilmente cómo la función se va aproximando a un valor, esto se da cuando la variable independiente es muy próxima al valor determinado. A esta forma de determinar límites se le conoce como solución de límites de forma intuitiva.

Afortunadamente existen teoremas de límites que nos permiten determinar los límites de forma más simple y a la vez obteniendo resultados más consistentes.[7]

Teoremas principales de límites[7]

Sea n un entero positivo, k una constante y f y g funciones que tengan límites en c, entonces:

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\times \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}, siempre\ que \lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$
8. $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} =$ $\sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}, siempre\ que\ \lim_{x\to c} f(x) > 0\ \ cuando\ n\ es\ par.$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de los Teoremas de límites en las siguientes funciones:

1. $\lim_{x\to 2}(3x^2+2)$, aplicamos los teoremas 1, 3, 4 y 7, para dar solución:

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+2)$$

$$= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 2$$

$$= 3\lim_{x\to 2} x^2 + 2$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 2$$

$$= 3(2)^2 + 2$$

$$= 12 + 2$$

$$= 14$$

2. $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x}$, aplicamos los teoremas 1, 3, 4 y 6:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x} = \frac{\lim_{x\to -1}(2x+1)}{\lim_{x\to -1} x} = \frac{\lim_{x\to -1} 2x + \lim_{x\to -1} 1}{-1} = \frac{2\lim_{x\to -1} x+1}{-1} = \frac{2(-1)+1}{-1} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

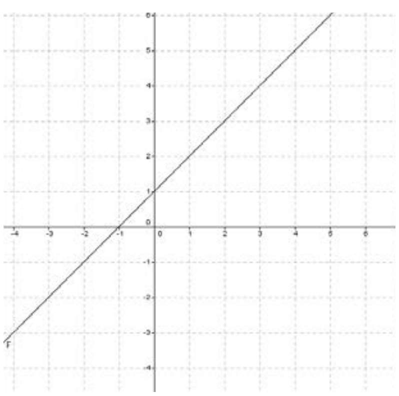
3.3. Continuidad de límites de una función

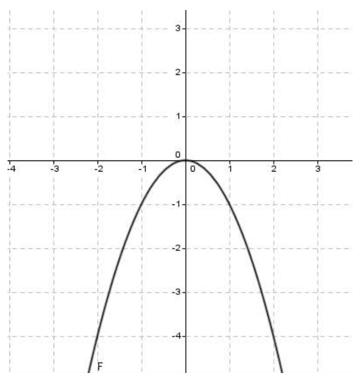
La continuidad de una función se refiere a que su gráfica no sufra algún brinco o rompimiento, es decir, que pueda ser dibujada sin tener que despegar el lápiz del papel. La continuidad de una función se puede analizar en un punto o en un intervalo.

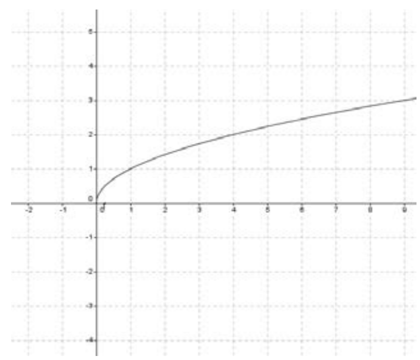
Continuidad en un punto

Se dice que una función es continua en un punto x=c, si su gráfica no se interrumpe en dicho punto[8]

Se muestran algunas gráficas que nos muestran la continuidad:







$f(x) = x + 1$ $\qquad$ $f(x) = -x^2$ $\qquad$ $f(x) = \sqrt{x}$

La continuidad puntual de una función queda definida cuando $x = c$ al cumplir las tres condiciones siguientes[8]:

1. $f(c)\ está\ finida$
2. $\lim_{x \to c} f(x)\ sí\ existe$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Si una de ella no existe, entonces se considera discontinua la función en c.

Dicho de otra forma, una función $f(x)$, se dice continua en un punto $x = a$, si el límite de la función en el punto a es igual al valor de la función en ese mismo punto, es decir, si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$[9].

Veamos el siguiente ejemplo de una función continua.

Determina si la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es continua en $x = 1$.

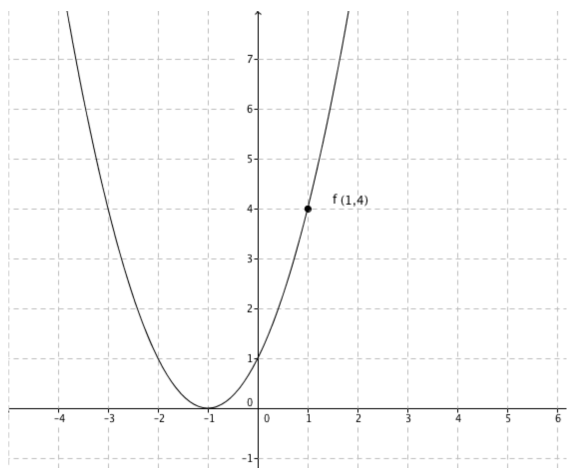
Aplicamos las tres condiciones para decidir si es continua dicha función:

1) $f(1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$

2) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2x + 1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 4$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

Observamos que las tres condiciones se cumplen, por lo que la función sí es continua en $x = 1$.

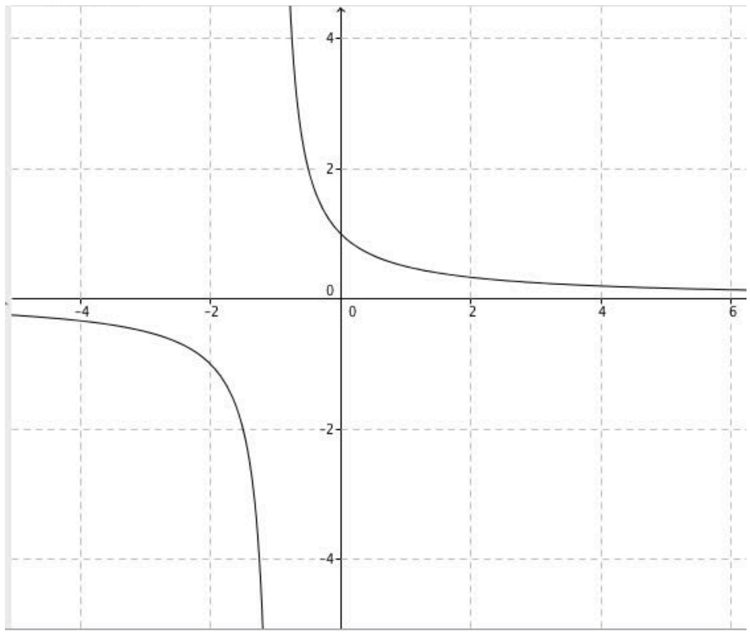


Ahora determinaremos si la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ es continua en $x = -1$.

$$f(-1) = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0}$$

Observe que no se cumple la condición uno y dos, por lo que la función es discontinua en $x = -1$.



3.4. Manejo de la derivada

El cálculo diferencial e integral surgió por la necesidad de dar solución a problemas planteados por los antiguos griegos. Sin embargo, problemas relacionados con las ciencias físicas fueron los que motivaron en el transcurso de los siglos XVI y XVII a dar resultados más apropiados y precisos.[10]

El concepto de derivada apareció históricamente a partir de querer encontrar la tangente a una curva en un punto, así como determinar la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento. El iniciador de este concepto fue Isaac Barrow que pensó en un método para trazar la tangente a una curva en un punto dado. Años más tarde Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz por vías semejantes y lenguajes diferentes formalizaron dicho concepto.[11]

Nuestro mundo está en continuo cambio, por lo que un término común en nuestra comunicación diaria, es el incremento o decremento de las variables que nos rodean, por lo que el concepto de derivada será empleado para conocer y determinar la variación de toda magnitud que está en función de otra.[11]

Cuando la recta tangente es única, el proceso de aproximación, es decir, a partir del límite podemos definir el concepto de la derivada.[12]

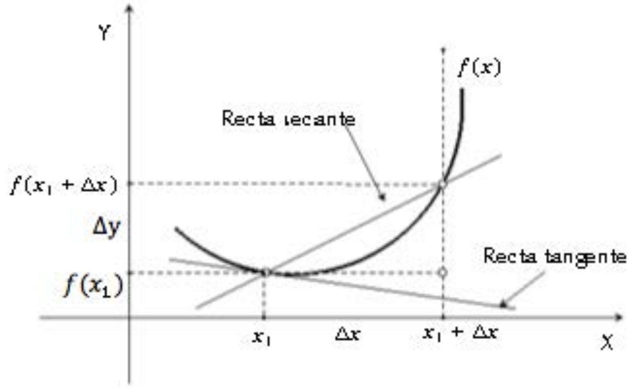
Definición:

Una función f definida como $y = f(x)$ es derivable en x si existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

$f'(x)$ *se denomina la derivada de* f *calculada en* x.

Interpretación geométrica de la derivada:



Cálculo de la derivada a partir de la definición

Considerando el concepto de derivada, podemos obtener la derivada de cualquier función, mediante la regla de los cuatro pasos:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$
2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Vamos a derivar una función a partir de su definición:

1. Calcular la derivada de la siguiente función $y = 3x + 1$.

   Aplicando la regla de los cuatro pasos, tenemos que:

   Paso 1 $\quad y + \Delta y = 3(x + \Delta x) + 1$

   $$y + \Delta y = 3x + 3\Delta x + 1$$

   Paso2 $\quad y + \Delta y = 3x + 3\Delta x + 1$

   $$\begin{array}{rcl} -y & = & -3x \qquad - 1 \\ \hline \Delta y & = & 3\Delta x \end{array}$$

   Paso 3 $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x}$

   $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

   Paso 4 $\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 3$

   $$\frac{dy}{dx} = 3$$

3.5. Aplicación de teoremas de derivación

La derivación a partir de la definición es muy extensa, por ello estudiaremos algunos teoremas que facilitarán el cálculo de la derivada, para funciones sencillas. Dado que las funciones derivables se pueden presentar de una manera general, a continuación damos los teoremas más representativos[13]:

$$1.\frac{d}{dx}(k)=0$$

$$2.\frac{dx}{dx}=1$$

$$3.\frac{d}{dx}(kf(x))=k\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$4.\frac{d}{dx}(f(x)\pm g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))\pm\frac{d}{dx}(g(x))$$

$$5.\frac{d}{dx}(f(x)gg(x))=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$6.\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^{2}}$$

$$7.\frac{d}{dx}(f(x))^{n}=n\left[f(x)\right]^{n-1}\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$8.\frac{d}{dx}(f(x))^{1/n}=\frac{1}{n}(f(x))^{\frac{1-n}{n}}\frac{d}{dx}(f(x))$$

Apliquemos los teoremas de las derivadas en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 2$

$$\frac{d}{dx}(3x^2+2) = \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d2}{dx}$$
$$= 3\frac{dx^2}{dx} + 0$$
$$= 3(2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

b) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(2x-1) - (2x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)(2) - (2x-1)(1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x} + 1}{(x+1)^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

3.6. Problemario

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

$a.f(x)=\dfrac{2}{x^2-9}$ d. $f(x)=2x$

$b.f(x)=\sqrt{x-4}$ e. $f(x)=x^2+1$

$c.f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$ f. $f(x)=\dfrac{2}{9-x^2}$

2. Determina los límites de las funciones utilizando los teoremas:

$a.\lim\limits_{x\to 0}(4x^2+3x-5)$ c. $\lim\limits_{x\to 2}\left((3x+1)(2x-1)\right)$

$b.\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{(2x+1)^2}{2x}\right)$ d. $\lim\limits_{x\to 1}(2\pi)$

3. Indica si la función $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ es continua en x=3

4. Calcula los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2+16}{x-4}$ y $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2+16}{x-4}$

5. Obtén la derivada de las siguientes funciones aplicando los teoremas:

$a.f(x)=4x^3+3x^2+5x-3$ d. $f(x)=\sqrt{2x}$

$b.f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$ e. $f(x)=4\pi x-5$

$c.f(x)=(2-x)(x+2)$ f. $f(x)=(3x-1)^3$

3.7. Autoevaluación

1. De la siguiente lista de funciones escribe dentro del paréntesis la letra A para la que sea algebraica y NA para la no algebraica:

$a.(\quad)\ f(x)x^{1/2}$

$b.(\quad)\ y = Sen(3x)$

$c.(\quad)\ h(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-2x+4}$

$d.(\quad)\ s(t) = e^{-t^2}$

$e.(\quad)\ y = In(x)$

$f.(\quad)\ f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

g.( ) $f(x) = -x^2 + 3x + 2$

h.( ) v(t)=c, c∈ °

i.( ) $g(x) = 2^x$

j.( ) $y = \log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

k.( ) q(t)= $\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$

Subraya la respuesta correcta según corresponda de la pregunta 2 a la 8:

2. ¿Qué atributos distinguen a una función racional?

(a) No incluya trigonométricas, logarítmicas ni exponenciales

(d) División de cualesquiera dos funciones

(c) El denominador no se hace cero

3. ¿Cuál es el valor del límite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$?

(a) No exista (b)cero (c) 2 (d) 1

4. ¿Cuál es el valor del límite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$?

(a) Cero (b)∞ (c)1 (d) - ∞

5. ¿Cuál es el valor del límite $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{1-x}$?

(a) - ∞ (b)Cero (c) ∞ (d) $\dfrac{1}{2}$

6. ¿Qué representa geométricamente la derivada de una función?

(a) La derivabilidad de la función

(b) La pendiente de una tangente a la función

(c) Los puntos críticos de la función

(d) La continuidad de la función

7. ¿Cuál es el valor del límite $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$?

(a) No existe (b) 2 x (c) Cero (d) x

8. ¿Cuál es el valor de la densidad de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, en

(a) 1 (b) -1/2 (c) cero (d) no existe

9. Escriba V si la preposición es verdadera y F si es falsa:

$(a)\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x-1}$, es continua en 1..........( )

(b) $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ x^2, & x \angle 0 \end{cases}$ ....( )

10. Dada $f(x) = \frac{1}{x}$, determina su dominio y rango.

3.8. Soluciones del problemario

1. $a.\ x \neq \pm 3$, b. $x \geq 4$, c. *todos* los °, d. *todos* los °
2. $a.$ -5, b. $1/4$, c. 21, d. 2π
3. Discontinua en $x = 3$
4. Límites laterales derecho e izquierdo: 8.
5. $a. \frac{dy}{dx} = 12x + 6x + 5$, b. $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{(3-x)^2}$, c. $\frac{dy}{dx} = -2x$, d. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, e. $\frac{dy}{dx} = 4\pi$, f. $\frac{dy}{dx} = 9(3x-1)^2$

3.9. Soluciones de la autoevaluación

1. a.(A), b.(NA), c.(A), d.(NA), e.(NA), f.(A), g.(A), h.(A), i.(NA), j.(NA), k.(A).
2. (d) División de cualesquiera dos funciones
3. (c) 2
4. (b)∞
5. (d)$\frac{1}{2}$
6. (b) La pendiente de una tangente a la función
7. (b)2x
8. (b) -1/2
9. (a) F y (b) V
10. Dominio: todos los x excepto cero y el rango de la función $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

3.10. Conclusiones

Esta unidad es acerca de derivadas de las funciones. Las funciones algebraicas son especialmente útil es porque se adaptan fácilmente a los problemas prácticos. Calcular límites y derivadas de este tipo de funciones de una manera precisa te permite obtener una buena representación gráfica y, como consecuencia, una comprensión plena de su comportamiento. El dominar los temas aquí tratados te ayudarán a comprender mejor las aplicaciones que se desarrollan más delante en tu formación profesional.

Referencias

[1] http://books.google.com.mx/books?id=bW5Dmr1YX_YC&printsec=frontcover&dq=derivadas&hl=es-419&sa=X&ei=CnGeU6DlNMK3yASw9oHwCw&ved=0CDIQ6AEwBA#v=onepage&q=derivadas&f=false
[2] Molina Moreno, José Luis & et. al. (2011). Análisis derivativo de funciones. México: CONALEP/CIE.
[3] Stewart, James & et. al. (2007).Introducción al cálculo. Buenos Aires. Thomson.
[4] De Oteyza, Elena. (2006). Conocimientos Fundamentales de Matemáticas Cálculo diferencial e integral. México. Pearson.
[5] Thomas, George Briton & et.al. (2007). Cálculo: una variable. México. Pearson educación. Recuperada 17 de julio de 2014 de http://books.google.com.mx/books?id=AD1S4y6jumgC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[6] Purcell, Edwin J. & et. al. (2007). Cálculo. México. Pearson educación.
[7] Mora Valladares, Emiliano & Del Rio Francos, María. (2011). Cálculo diferencial e integral. México. Santillana.
[8] Stewart, James. (2010). Cálculo: Conceptos y Contextos. México. Cengage Learning.
[9] Camacho, Alfredo. (2012). Cálculo diferencial. Madrid. Diaz de santos. Recuperada 17 de julio de 2014 de http://books.google.com.mx/books?id=vglB8FyPHgoC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[10] Ruiz, Ángel & Barrantes, Hugo. (1996).Elementos de Cálculo Diferencial. Costa rica: Universidad de Costa Rica. Recuperado 19 de julio de 2014 de http://books.google.com.mx/books?id=ptBhjsVvwioC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[11] Balabasquer Villa, Gerardo.(1994). El Concepto de Derivada y sus Aplicaciones. España. Universidad Politécnica de Madrid. Recuperado 19 de julio de 2014 de http://books.google.com.mx/books?id=bW5Dmr1YX_YC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[12] Soler Fajardo, Francisco & et. al. (2005).Fundamentos de cálculo con aplicaciones a ciencias económicas administrativas. Colombia. Litocamargo Ltda. Recuperado 19 de julio de 2014 de http://books.google.com.mx/books?id=2DFArZinPWgC&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
[13] Leithold, Luis. (1998). El cálculo. México. Oxford University Press-Harla