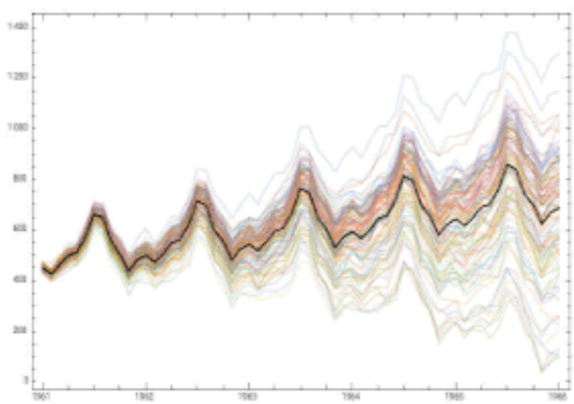
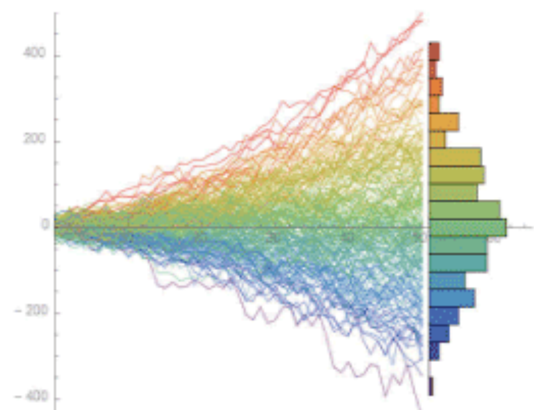
2021

Pensamiento Matemático 2: Los ¿por qué?





Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

Pensamiento matemático 2: Los ¿por qué?

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

ISBN: 978-607-xxxx-x-x

Morelia. Michoacán. Julio de 2021

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Coordinación de Innovación Educativa CIE/QFB

PRESENTA:

Pensamiento matemático 2: Los ¿por qué?

Autores:

Eduardo Ochoa Hernández
Nicolás Zamudio Hernández
Gladys Juárez Cisneros
Filho Enrique Borjas García
Lizbeth Guadalupe Villalon Magallan
Pedro Gallegos Facio
Gerardo Sánchez Fernández
Rogelio Ochoa Barragán

Ochoa H. E., *et al.* (2021) ***Pensamiento matemático 2: Los ¿por qué?*** Morelia: UMSNH-CIE

Título original de la obra:

Tzintzuntzán No. 173 Col. Matamoros C.P. 58240, Edificio E planta alta Morelia, Michoacán. México. MX

Teléfono (443) 3-14-28-09. Email: eohqfb@yahoo.com.mx

ISBN: 978-607-xxxx-x-x

Programa: Profesor escritor.

Directorio

Contenido

Introducción

El número

El lenguaje nos permite etiquetar infinitamente muchos números diferentes. Estas etiquetas, las más evolucionadas, son los números arábigos, estos pueden simbolizar y discretizar cualquier cantidad continua. Gracias a ellos, podemos distinguir los números como aproximados a una cantidad, pero cuyas propiedades aritméticas son algo diferente de solo contar uno a uno. Solo entonces se puede concebir la invención de las reglas puramente formales para comparar, agregar o dividir dos números. Así, los números adquieren una idea carente de cualquier exigencia directa a un conjunto de objetos materiales. El andamiaje de las matemáticas entonces puede elevarse, cada vez más alto, cada vez más abstracto.

La cultura evoluciona mucho más rápido que nuestra genética. Esto ocurre así, dado por un proceso de invención de ideas. El concepto de número, si bien surge de la base biológica que nos permite reconocer patrones de cantidades, claro está, la unidad incluida; este concepto fue insinuado por babilonios, griegos, indios, egipcios, mayas…, hasta su purificación y refinamiento cultural. Galois, Bedekind y Peano, ellos resolvieron su axiomatizado empujando la cultura a la matemática moderna. Ahora nuestro cerebro se enfrenta a una tarea fascinante de abstracción matemática, para la cual la evolución biológica no nos preparó; como resolver ecuaciones, multiplicar fraccionarios, resolver funciones, factorizaciones. A partir del acumulador de aproximación con que contamos el tiempo, compartido por otras especies como ratones y palomas, nuestro cerebro que no contiene innato ninguna cantidad aritmética destinada para la idea de número. Compensa esta deficiencia, jugando con circuitos alternativos en nuestra red cerebral. Palabras y números son educados hasta lograr que sean tan intrusivos que reemplazan completamente la función de áreas cerebrales. La alfabetización nos entrena a reconocer las letras y los números insinuándolos como objetos visuales y asociándolos con un sistema de interpretación.

Algunos objetos matemáticos ahora parecen muy intuitivos solo porque su estructura está bien adaptada a nuestra arquitectura cerebral. Por otro lado, muchos jóvenes tienen problemas para realizar una suma de fraccionarios, porque su maquinaria cortical resiste a modificarse con el concepto contraintuitivo. Si la biología del cerebro muestra resistencia a imponer límites a nuestra comprensión aritmética, ¿cómo prosperar en el pensamiento matemático? No existe evidencia de que las grandes mentes matemáticas de la historia, hayan sido dotados de una estructura neurobiológica excepcional. Al igual que el resto de nosotros, los genios en aritmética tienen que luchar con cálculos y conceptos matemáticos. Si tienen éxito, es solo porque dedican un tiempo considerable a este tema y finalmente inventan algoritmos bien ajustados y atajos inteligentes para aprovechar sus propiedades en la solución de problemas y definiciones. Lo especial en ellos es su pasión, la seriedad con que se toman su trabajo y la confianza depositada tanto en la literatura como en el profesor, además, del apoyo de sus padres, docentes y compañeros en el desarrollo responsable cultura matemática.

Álgebra

Para aprovechar el poder del álgebra, necesitamos un sistema numérico que satisfaga sus demandas. Parte de esas demandas es la libertad de realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas con símbolos arbitrarios para números desconocidos particulares. Los números que surgen a través del conteo 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10..., son conocidos como números naturales, porque emergen más o menos de manera innata comenzando a contar las cosas desde la unidad. Este conjunto de números naturales **N**, se cierra bajo las operaciones de suma y multiplicación, podemos sumar dos números o multiplicarlos y el resultado siempre será un número natural. La resta, sin embargo, es un asunto diferente. La resta siendo la eliminación de un número de otro, es una operación inversa a la suma. Cuando el primer número en la operación es más pequeño que el segundo que se resta, nos expulsa de los **N**, por ejemplo, 5 - 15. Cuando surge este tipo de dificultad, nos damos cuenta de que este tipo de números es inadecuado y debe ampliarse para permitir la continuidad de los cálculos en un álgebra.

El modelo estándar de número que impregna todas las matemáticas e ingeniería avanzada es el campo de los llamados números complejos **C**. El camino desde los naturales hasta los complejos fue largo y concluyó más o menos en el siglo XIX. Pero justo después de los **N**, el cero como número hace su aparición, los enteros **Z** negativos y positivos dan paso a los racionales **Q**, dado que un **n** entero es dado por **n/1**. Entonces aparecen los números primos, y con estos el teorema fundamental de la aritmética que dice, la factorización prima de cualquier número natural n (con factores primos escritos en orden ascendente) es única. Esta singularidad se puede deducir de una propiedad aún más básica de los números, Euclides, dice que si un número primo **p** divide a un producto **ab**, de modo que **p-ab**, entonces **p** es un factor de **a** o un factor de **b** (o tal vez un factor de ambos). Las propiedades de los enteros y de otros números reales nos permiten crear la idea fundamental algebraica para la división el máximo común divisor.

De esta manera tropezamos con un mundo de propiedades de las que deducimos lo que podemos hacer y no con los números, y sus representaciones como símbolos dentro de las mismas reglas aritméticas exportadas al álgebra arábiga. El álgebra no es una caja de trucos para encontrar el valor de incógnitas nada más. Sino más precisamente un camino alternativo a las verdades geométricas. La notación moderna algebraica es un importante recurso para realizar cálculos más amplios en la geometría.

De las operaciones inversas a las potencias de una base particular, deducimos a los logaritmos que se convirtieron en la base de los cálculos más complejos en el siglo XVII. Y es el teorema Binomial el punto de partida algebraico para desarrollar los logaritmos y al número de Euler **e.**

$e^{i\pi}+1=0$

El poder algebraico proviene de la manipulación simbólica de una manera válida para todos los sistemas de ecuaciones sin importar qué número se sustituya por los símbolos. Sin embargo, cuando dividimos una expresión algebraica debemos tener cuidado de no hacerlo sobre cero, dado que al representar una incoherencia matemática, no está definida.

Ecuaciones

¿Estudiar álgebra mejora nuestra inteligencia? Mucha gente lo piensa así; sus argumentos a menudo parecen convincentes. Es cierto que las matemáticas desafían a la mente. Por ejemplo, basta con mirar a los estudiantes que luchan con demostraciones en geometría. Todos estamos de acuerdo que la matemática nos demanda esfuerzo mental. En un nivel complejo, los matemáticos son vistos como sabios y eruditos que se asoman desde el monte Olimpo. Parecen bendecidos con un orden más alto de intelecto, lo que les permite entrar en el reino de los objetos matemáticos, más allá del alcance de otros mortales. Así que no es de extrañar escuchar que el estudio de las matemáticas ampliará nuestras capacidades racionales en general, apoyando nuestro intelecto más allá de las propias disciplinas.

Augusto Comte, creía que esto era así. El álgebra fortalece la mente, dijo, permite dominar mejor el estudio de la naturaleza. En nuestro tiempo el National Council of Teachers of Mathematics, afirma que una persona que ha estudiado matemáticas debe ser capaz de vivir más inteligentemente que uno que no lo ha hecho. Las matemáticas infunden fluidez procesal, disposición productiva, comprensión conceptual, competencia estratégica y razonamiento adaptativo[1]. En una era que recompensa al pensamiento analítico, las matemáticas se consideran cruciales para el pensamiento lógico y revelan la promesa de trascender a las mentes mortales.

La matemática es una especial forma de pensamiento. Pero todo tipo de pensamiento serio implica grandes esfuerzos, como en la poesía y la música. Hay serias sospechas de que un entrenamiento del pensamiento en una esfera se acerca a pensar en otra. Ser bueno en una habilidad mental, mejora otras funciones, no importa lo similar que sean. Las matemáticas parecen ser un esfuerzo de dominio universal para la razón y la lógica. Las demostraciones matemáticas están estructuradas esquemáticamente con cada paso. Bertrand Russell ha llamado a esta lógica fría y austera, no solo por evitar a las emociones, sino por ser una búsqueda hecha por mentes altamente disciplinadas. Se asume ampliamente que la disciplina humana florecerá solo si la vida de la mente es honrada, disciplinada y flexible.

El gran objetivo de las matemáticas es probar las proposiciones. Para empezar con lo que había sido una conjetura o una hipótesis e idear pasos que las conviertan en una verdad. Establecer tales pruebas requiere mucho más que hacer un caso razonable. Para que se demuestre un teorema matemático, sus pasos deben ser tan persuasivos que aseguren lo que es esencialmente un acuerdo unánime de los miembros de la profesión. Hoy en día, las pruebas pueden correr a cientos de páginas, con frecuencia requieren la velocidad del rayo de las computadoras.

La búsqueda de demostraciones matemáticas requiere imaginación inusual, una voluntad de cuestionar las premisas prevalecientes y explorar alternativas inesperadas. Por lo tanto, perseguir pruebas en matemáticas es un ejercicio exaltado. Nos gusta cómo dice Roger Penrose:

"Una demostración en matemáticas, es un argumento impecable, utilizando solo los métodos de razonamiento lógico puro, que permiten inferir la validez de una afirmación matemática dada… de axiomas cuya validez se toma para ser evidente[2]".

Lo que debemos subrayar es que los argumentos y los axiomas se despliegan casi en total independencia al reino de lo físico. Podemos concluir parcialmente, que el pensamiento matemático persigue pruebas. La verdad matemática, tiene poca o ninguna conexión con la búsqueda de la verdad científica; a nuestras vidas modifica su existencia. Por esta razón, proponemos que hay otras formas, más fructíferas para entender los significados y procesos de demostración, un enfoque alternativo que pueda desafiar nuestro poder mental no menos profundo que la geometría, el álgebra, el cálculo, todo lo relacionado con nuestro carácter personal de enfrentar los desafíos de la vida intelectual.

En las matemáticas y las ciencias, el avance de una teoría o del teorema, no solo depende de toda la agudeza del análisis de uno, sino de la obtención del acuerdo de sus pares. En ciencias, incluso cuando se obtiene ese veredicto, es más una deliberación tentativa que en las matemáticas. Esto se debe a que los científicos naturales enfrentan la confusión del universo profundo dentro de nuestro sesgo cognitivo. En la ciencia el consenso sobre la verdad se renueva. En las matemáticas la verdad es demostrada, se demuestra para siempre, solo sufre algunas mejoras en su elegancia. Los estudios de la ciencia intentan compartir esta certeza que dan las matemáticas, para hacer más sólido su razonamiento.

Entonces, ¿a qué nos referimos cuando decimos que se ha demostrado una teoría científica? Comencemos primero por preguntarnos lo que significa llamar cuerpo de conocimiento a una teoría. Un buen ejemplo son las ideas de Charles Darwin, que la mayoría de los científicos modernos llaman teoría de la evolución, algunos hostiles quieren que sea eliminada de las aulas, sobre los terrenos, como dicen, de que es solo una teoría. Esta frase, se expresa más como burla de ella, consideran que está destinada a trasmitir el concepto de evolución como simple especulación.

Si bien las ideas de Darwin no son la verdad última. Y por esta razón honesta, en las ciencias tomadas juntas, rara vez se alcanza el límite último de lo verdadero, quizá si lo hiciéramos ni siquiera lo sabríamos. Por lo tanto, la selección natural es el análisis más coherente que tenemos ahora mismo de cómo la vida toma las formas en la materia. Es una teoría coherente con los hechos que la sostienen, un cambio en ellos la derrumbaría exigiendo sea renovada. Así, decir que una teoría científica fue probada, significa que en su interior racional no hay contradicción lógica matemática y que guarda referencia sin contradicción también con los hechos, esos conceptos que son un consenso de las preguntas sobre lo que existe y enfrentamos en la realidad.

Si queremos que los estudiantes comprendan el proceso de demostración científica y a su hermana la verdad matemática, podríamos invitarlos a examinar cómo ha evolucionado la ciencia con los saltos agigantados del pensamiento matemático. Lidiar con las matemáticas, es considerarlas la herramienta para la búsqueda de certeza esa en la que confiaron Euclides y Pitagóras. Sí de hecho, apenas hay matemáticas a primera vista en la teoría de Darwin, que en sí valen la pena reflexionar, en sus argumentos hay proposiciones falibles, cadenas de razón creadas con proposiciones y operadores modales discursivos; pero sobre todo hay inferencias de conclusión. Las matemáticas están disueltas en el discurso científico, reflexione, quizá de ello dependa su éxito como científico, ingeniero o diseñador.

1. La biología y la habilidad matemática

Está bien establecido que la memoria de trabajo humana es compleja desde el punto de vista del comportamiento, comprende sistemas disociables para mantener temporalmente diferentes tipos de información en mente[3] y mecanismos para atender y transformar selectivamente esa información[4]. Un objetivo principal de la investigación de fMRI es mapear estos aspectos distintos de memoria de trabajo en el cerebro. Inicialmente, se aplicó un marco localista, que buscaba comprenderla en términos de circuitos cerebrales discretos, donde a cada componente neuroanatómico se le asignaba una función específica[5]. Las etapas de la memoria de trabajo son: la codificación[6], el mantenimiento[7] y la manipulación mental[8] de los dominios incluidos los espaciales[9], los objetos abstractos o los numéricos[10]. Para los dominios, se atribuyeron regiones dedicadas del cerebro y procesamiento de flujos de interpretación. Es en la memoria de trabajo donde objetos matemáticos son decodificados, se realizan operaciones y se manipula su carácter lógico, pero sobre todo los axiomas actúan en su razonamiento.

Las matemáticas son el lenguaje fundamental en la sociedad moderna, ya que desempeñan un papel importante en el potencial racional de las personas, incluidas las dedicadas a la ciencia, la ingeniería, el arte, la educación y la economía. También se utilizan como un índice clave de la inteligencia humana lograda en la educación y es esta capacidad matemática un rasgo cognitivo complejo con heredabilidad poligénica, así lo determinó un estudio conocido como Asociación de Genoma Completo (GWAS[11]). Esta excepcional capacidad matemática se observa presente en el desarrollo racional, con mayor énfasis entre las personas de dominios creativos. Los biólogos la estudian con la finalidad de adecuar la educación y conocer los límites de la razón. Mientras tanto la enfermedad de **discalculia**, caracterizada por habilidades deterioradas en el procesamiento de números, es un trastorno específico del desarrollo de la capacidad matemática que afecta aproximadamente del 3 al 6% de los niños del mundo[12], es estudiada con la finalidad de comprender la base axiomática heredable a nuestra especie.

Las complejidades genéticas que subyacen a la capacidad matemática pueden contribuir a explicar la base de la cognición y la inteligencia humana a nivel biológico. Hasta hace muy poco, la capacidad matemática solo fue asociada con el estado socioeconómico de los adultos y la calidad de vida de los niños[13]. Comprender la capacidad matemática es un paso esencial para mejorar las habilidades aritméticas y los logros académicos, además podría proporcionar nuevos conocimientos sobre las funciones del cerebro humano. La capacidad matemática es un rasgo complejo que implica el desarrollo neurológico y cognitivo, así como la educación y el entrenamiento postnatal. En particular, se estima que una proporción considerable de variación en la capacidad matemática podría explicarse por factores genéticos. En un humano recién nacido, podemos observar que viene equipado con una base axiomática, reconocible en sus capacidades matemáticas innatas:

1) **Mónada**. Es capaz de reconocer la unidad mediante un acumulador cerebral del registro del tiempo, se cree que al reconocer la unidad en la realidad y percibir el paso del tiempo, puede desarrollar la capacidad de contar, que será fundamental para un desarrollo de la noción de número, la aritmética, las álgebras y los sistemas numéricos[14].

2) **Espacio**. Una clara evidencia es que reconocen en el espacio la profundidad, la altura y lo ancho; se presenta cuando con las manos llaman a mamá percibiéndola en una ubicación espacial concreta a distancia. Esta verdad sobre el espacio le permitirá desarrollar su noción de dimensión geométrica y cálculos espaciales[15].

3) **Categoría**. El bebe humano puede categorizar entre mamá y papá; ello sugiere que la habilidad de categorización está presente desde el nacimiento, de ella dependerá que pueda desarrollar la noción de conjunto, función, ecuación[16].

4) **Probabilidad**. Si le preguntamos a mamá, ella podría decirnos esta verdad, que los bebés juegan a manipular la voluntad y exigir la presencia de ella a su disposición, es decir, ensayan la probabilidad tomando decisiones por datos de correlación[17].

5) **Lógica**. Aquí los bebés humanos, muestran que hay una razón *a priori*, se espera que la cognición humana incluya una lógica mental. La cognición humana registra información proposicional en una memoria declarativa. Es decir, los operadores discursivos como ***y, o, negación, afirmación***… están presentes de manera innata en los humanos. De ellos, se genera la lógica que da el potencial racional humano[18].

En seguida exponemos un hallazgo contundente, emplearemos rigor en los términos científicos, pero creemos que usted es capaz de deducir lo que los resultados prueban, que nacemos con una base axiomática para nuestra capacidad lingüística. El primer GWAS de capacidad matemática se realizó entre niños con capacidad matemática alta y baja respectivamente, en una gran muestra de individuos que abarcó toda la distribución de la capacidad matemática[19]. Estos estudios mostraron señales de asociaciones con la capacidad matemática, pero ninguno de ellos alcanzó un nivel significativo para cada capacidad axiomática humana particular. En un estudio en el 2017, por primera vez se tuvo evidencia de la asociación de un solo polimorfismo de un solo nucleótido (SNP) con la capacidad matemática a nivel genómico en poblaciones generales. Un SNP es la identificación de numerosos polimorfismos de un solo nucleótido. SNP, un gen candidato para una pregunta relevante, que podría proporcionar un conocimiento exacto o parcial de los factores que intervienen en este caso, en el grado de desarrollo de la capacidad matemática en los humanos.

> Cuando se han identificado numerosos polimorfismos de un solo nucleótido en un gen candidato, una pregunta relevante y aún sin respuesta es determinar cuántos y cuáles de estos SNP deben probarse de forma óptima para detectar una asociación con la enfermedad o con la habilidad. Probarlos todos es costoso y a menudo innecesario. Los alelos en diferentes SNP pueden estar asociados en la población debido a la existencia de un desequilibrio de ligamiento, de modo que, conocer los alelos transportados en un SNP podría proporcionar un conocimiento exacto o parcial de los alelos transportados en un segundo SNP. Los científicos crearon un método para seleccionar el subconjunto más apropiado de SNP's en un gen candidato basado en el desequilibrio de enlace por pares entre los diferentes genes[20].

> Las técnicas de imagen cerebral han permitido explorar los fundamentos neuronales de la cognición lógica y matemática. Estas técnicas están revelando más que simplemente dónde tienen lugar estos procesos de alto orden en la corteza humana. Las imágenes están comenzando a responder algunas de las

preguntas más antiguas sobre lo que son la lógica y las matemáticas, y cómo surgen y evolucionan a través de la cognición de visión espacial, el lenguaje, las funciones ejecutivas y la emoción[21]. FOXP2 es el gen con mayor participación en la capacidad cognitiva humana.

La presencia de un sistema neuronal compartido para el procesamiento sintáctico en lenguaje natural y la aritmética es controvertida[22]. Los estudios de comportamiento recientes informan sobre la presencia estructural del dominio cruzado entre lenguaje natural y la aritmética. Usando imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI), los resultados apoyan firmemente la idea de que la aritmética y el lenguaje natural comparten las bases neuronales para procesar estructuras sintácticas[23]. En otras palabras, conocer el álgebra aritmética nos ayudará a pensar y crear sentencias empleando estructuras sintácticas en un lenguaje natural (español), haciendo más riguroso nuestro pensamiento[24]. La ciencia sugiere que el acumulador del paso del tiempo en nuestro cerebro, está implicado en la asociación espacio-aritmético, reside en la operación aritmética mental y, no en los números individuales o los operadores[25]. Una forma sorprendente en la que los humanos se diferencian de los primates, es su capacidad para representar cantidades numéricas usando símbolos abstractos y el uso de estas **herramientas mentales** para desarrollar habilidades, tales como realizar cálculos exactos. ¿Cómo emergen los circuitos cerebrales funcionales para la representación simbólica de la magnitud numérica? ¿Las representaciones neuronales de la magnitud numérica cambian en función del desarrollo y el aprendizaje de la aritmética mental? Las teorías actuales sugieren que los símbolos numéricos culturales adquieren su significado al ser asignados a representaciones no simbólicas de magnitud numérica[26].

Además, hallazgos científicos demuestran que las estrategias de conteo y el uso representativo de los números se encuentran dentro del dominio cognitivo del chimpancé, y son comparables favorablemente con el uso espontáneo de algoritmos de adición demostrados en niños preescolares[27]. Hay cada vez más pruebas de que los animales comparten con los humanos adultos y quizás con los bebés humanos, un sistema para representar el número como magnitud que es un análogo de las cantidades que representan[28]. Los bebés humanos evidencian categorizar, esta competencia les da el poder de hacer discriminaciones simples entre conjuntos de hasta cuatro entidades. Los niños y adultos muestran el mismo procesamiento en su capacidad casi sin esfuerzo para categorizar, o aprender rápidamente la cantidad asociada con un número, en colecciones de objetos[29]. Es decir, categorías de objetos son asociados con números de elementos de estos conjuntos de cosas. Se cree que nuestro cerebro reconoce a la variable "**x**" como una categoría distinta que "**y**", donde cada conjunto puede ser conformado por distintos números arbitrarios. Sumar **x + y** es reconocido como un razonamiento numérico y no literal. La investigación sobre la percepción del espacio, el tiempo y la cantidad ha generado tres ideas que permanezcan separadas, pero los investigadores creen en la existencia de un sistema de magnitud generalizado como marco conceptual dentro del cual se procesan los elementos del entorno, espacio, tiempo y cantidad[30]. Finalmente, multiplicar y categorizar son por otro lado circuitos distintos que deben ser entrenados[31].

El pensamiento matemático y sus escuelas

Las posibilidades de conocer la realidad, nos dice Kant pasan por contestar ¿cómo es posible el conocimiento?

> **El realismo ontológico**. La conciencia asume que hay algo que existe fuera de la mente (*a posteriori*) y que la verdad es alcanzable por un consenso social que discute y delibera sobre contradicciones en el pensamiento. Los objetos matemáticos están en las cosas, todo en la realidad son números ¿cómo es que están allí?

Los platónicos ontológicos. Hay una realidad independiente de la mente; los objetos matemáticos son abstracciones creadas en la mente y empleados como lenguaje artificial para racionalizar lo real.

Los ficcionistas. Los objetos matemáticos solo existen en cuanto a verdad lógica, todo lo que hay en ellos es vacuidad (carente de contenido fáctico, son ficciones).

Putnam. Las matemáticas tienen verdad objetiva y no vacía, es decir, no viene del mundo externo. El conocimiento matemático estaría ligado a la experiencia y al hardware de nuestra mente.

Los intuicionistas. Los objetos matemáticos son construcciones mentales a partir de juicios sintéticos *a priori*: axiomas. No es necesaria ninguna entrada empírica para ello.

Los estructuralistas. Esta visión comparte la ontología realista de que la estructura de la realidad material contiene abstracciones que le dan la propiedad de lo que es, las estructuras de información de la realidad (ecuaciones fundamentales), es decir, sus ecuaciones que la definen son el diseño de este universo, proporcionan la estructura ontológica para su conocimiento y hacen posible desarrollar todo lo sintético: átomos, anticuerpos, textiles, música, lenguajes informáticos, drogas, materiales, videojuegos…, En nuestra realidad material, el Big Bang energético es acompañado por Big Bang de estructuras matemáticas, que dotan de orden a la energía que podemos observar en nuestra realidad estructurada por ecuaciones fundamentales. El estructuralismo, es la forma más aceptada para referirnos al pensamiento matemático.

La pedagogía en las matemáticas

De acuerdo con la investigación científica en el marco del campo de la educación matemática, en particular desde el punto de vista de la experiencia, la educación matemática es *proceptual-simbólico, o es formal-axiomática,* estas despliegan un énfasis en el desarrollo cognitivo basado en marcos de imágenes conceptuales y esquemas formalmente definidos. El concepto intuitivo, es el que contiene la imagen mental del objeto matemático, propiedades asociadas, procesos y elementos estructurales[32]. En concreto, la idea destacable en este paradigma, es la de una imagen conceptual contenida en todo símbolo de notación matemática, el aprendiz registra mentalmente los significativos estructurales en una forma de desafío auto reconstruible. Este modelo asume la abstracción reflexiva aportada por Piaget[33], la cual consiste en dos dimensiones: proceptual-simbólico y formal-axiomático.

El pensamiento matemático aplica a los conceptos percibidos por los sentidos, debeido a que construimos concepciones mentales mediante el uso de las percepciones físicas. En el mundo proceptual, las acciones sobre las concepciones mentales se encapsulan mediante el uso de símbolos. En este sentido, el término *Proceptual* destaca la existencia de un análisis de razones entre el proceso y el concepto evocado por el mismo símbolo, tanto se presenta en un proceso, como en el concepto producido por este proceso. La transición al mundo formal, requiere primero a los proceptuales, antes que a las definiciones a través del pensamiento formal o pensamiento natural[34]. Este modelo pedagógico *proceptual-simbólico*, combinado con la pedagogía avatar (discurso narrativo de una experiencia de aprendizaje), es más flexible ya que no hace hincapié en la importancia particular del orden en los aprendizajes, sino en el orden mental del proceso de pensamiento presentado como un flujo discursivo narrativo.

En el marco educativo se utiliza la narrativa para formular el crecimiento de las ideas, por ejemplo, en el cálculo infinitesimal se prestan las ideas desde el proceso finito de cambio de la aritmética al álgebra dentro del concepto de límite potencialmente infinito. Este cambio en los experimentos mentales del cálculo simbólico es determinante para las definiciones y pruebas de soluciones de cálculo que los aprendices serán capaces de realizar.

La verdad matemática *vs* la científica

Es una verdad matemática la dada en una explicación de lenguaje y dentro del propio lenguaje matemático. Irad Kimhi, considera en sus ideas sobre la naturaleza de la lógica, que a diferencia de una verdad científica, la comprensión de la lógica muestra que se ha definido por una distinción entre la "fuerza" y el "contenido" de una proposición, es decir, entre el acto de afirmar algo y lo que se está afirmando. Si no hacemos esta distinción, de acuerdo con una visión estándar de la lógica, se podría divorciar la razón de la realidad[35]. Por ejemplo:

Premisa 1: P -> Q ["Si está lloviendo, las cosas están mojadas"]

Premisa 2: P ["Está lloviendo"]

Conclusión: Q ["Las cosas están mojadas"]

Tenga presente que esta conclusión se consigue si y solo si **P** "está lloviendo" es inequívocamente la misma cosa en cada una de las premisas. Pero en la primera premisa **P** no se afirma ("está lloviendo" se considera una posibilidad), mientras que en la segunda premisa **P** se afirma "está lloviendo, se presenta como un hecho). Por lo tanto, de acuerdo con este punto de vista, la afirmación o "fuerza" de **P** debe ser externa a la lógica. Una afirmación es una actitud psicológica ("creer…”), un hecho acerca de lo que alguien cree. La lógica, por el contrario, se refiere a las relaciones abstractas que se mantienen entre los "contenidos", aproximadamente los significados de las proposiciones.

La verdad matemática está compuesta de contenido matemático (números, funciones, conjuntos, álgebra, geometría…) y operadores lógicos, solo de estos depende su verdad.

En cambio, en la verdad científica, es forzoso que la estructura matemática tenga coherencia con la fuerza que sostiene que la realidad en su interior y, esta sea la misma abstracción que la define.

Parece haber un gran peligro en el énfasis excesivo que prevalece sobre el carácter deductivo de los postulados de las matemáticas. Es cierto que la invención constructiva se dirige a motivar a la intuición como vía para todo logro matemático, incluso en los campos más abstractos. La grave amenaza para la vida del aprendizaje está implícita en afirmar que, las matemáticas son un sistema de conclusiones extraídas de las definiciones y postulados por la libre elección de los matemáticos. Si esto fuera así, los matemáticos no podrían construir conocimiento desde la base axiomática. La idea de que la voluntad puede a su antojo crear un sistema de definiciones y postulados a placer es engañosa. Así bien, el análisis lógico no representa todas las matemáticas, pero si ha llevado a una comprensión más profunda de los hechos matemáticos y su interdependencia, esto hace más abstracto en lo esencial a los conceptos sobre los objetos matemáticos. De ese desarrollo moderno lógico simbólico, la típica actitud científica universal confía en el rigor del razonamiento matemático para observar objetivamente la naturaleza. La mera percepción no constituye un conocimiento, debe ser interpretado en referencia a una entidad subyacente, como la lógica, la geométrica, la probabilidad, la categorización o la habilidad numérica.

2. Pensamiento matemático

La conquista tecnológica del espacio exterior, del mar profundo, del polo norte, superar la velocidad del sonido en vehículos terrestres… En estos días, siguen siendo tareas difíciles de lograr, pero definitivamente no son ya imposibles para el hombre. Si disponemos de tiempo, recursos, colaboración, una guía de viaje, los noveles pueden lograrlo también. La exploración de las matemáticas tiene mucho en común con este tipo de conquistas. Nuestra primera mirada en nuestro aprendizaje es la superficie del problema matemático. Después de mucho tiempo de investigación, estos héroes del pensamiento matemático lograron grandes proezas. Reuniendo todas las experiencias desde el paso más humilde; así, se puede esbozar una posible ruta de cada conquista, aunque no esté muy clara la ruta completa en detalle. Sin embargo, si un novel cuenta con una ruta posible en mente, puede iniciar a escalar su desafío, puesto que dispone de información clara para comprender el camino de la experiencia y está guiado por alguna o algunas mentes milagrosas que llegaron primero a la cima de la conquista de las matemáticas. Quizá le de vértigo de alcanzar tan grande cima, es comprensible, pero cuando se acerca poco a poco, tal vez allí, ganará la confianza necesaria para el siguiente paso. Eventualmente tiene a favor que, si confía en la guía literaria que le da el profesor, el camino podrá llegar a ser conquistado por el pensamiento matemático. No se requiere de una mente rápida, sino una mente lenta, dedicada y concentrada.

Una vez que un profesor recorrió el camino completo a la cima, decimos que está en condiciones de poder guiar a otros, de lo contrario, solo los frustrará, lo extraviará y los desanimará en definitiva aunque no lo desee así. Pero, si el aprendiz dispone de acceso a las notas de los hombres que lograron las conquistas y se le apoya con asesoría de alguien que sí lo logró, entonces tal vez pueda seguir sus pasos y reducir la incertidumbre de lograr que sus esfuerzos den fruto. Le podemos asegurar que el primer hombre en conquistar tales desafíos, fue un pionero que al lograrlo, se volvió una experiencia de referencia, incluso un modo de vida de inspiración para las generaciones más jóvenes.

Ahora se cuenta con mucha literatura sobre las rutas de conquista de estos desafíos matemáticos y es probablemente por mucho, nuestro mejor camino. En matemáticas, ingeniería, arte, música y ciencia hay muchas historias románticas de personas haciendo heroicos avances por ellos mismos, solo se apoyaron como dijo Newton, a hombros de gigantes de la literatura que les antecedió.

Las matemáticas son un entrenamiento de la creatividad, la imaginación y el dominio de estándares rigurosos de demostración. Este texto pretende introducirnos a la discusión del conocimiento del pensamiento matemático. Este enfoque pretende apoyar a quien desee dominar las matemáticas, ayudarlo en su camino de éxito en los estudios futuros de ingeniería y ciencias. Son tiempos difíciles, quizá Usted considere que las matemáticas no son la prioridad para encontrar la luz al final del túnel. Razonar es el medio para resolver nuestra vida, fortalecer la razón tiene consecuencias positivas. Reflexiónelo así, esto puede ser complicado, implica darnos cuenta que el pensamiento es hacernos las preguntas correctas y gestionar perspectivas racionales nuevas.

Issac Newton se encontró con un muy fuerte respaldo de la comunidad científica de la época. Casi todos los experimentos confirmaban las ecuaciones de Newton. Pero es en el casi, donde, hay oportunidades de éxito. Tratando de entender esto, surge la idea que un razonamiento por un camino inexplorado puede darnos una vida feliz. Las ideas creativas, son pensadas con dos elementos esenciales, las proposiciones y los operadores discursivos en lenguaje natural y artificial.

Sí estamos en problemas, nos dice a todo esto Albert Einstein:

> “Definición de locura: hacer las mismas actividades y esperar resultados distintos.”

¿El pensamiento matemático nos hace más racionales?

Abraham Lincoln creía como cierto esto, embarcándose este personaje en la ardua tarea de dominar los tratados de geometría de Euclides para aumentar sus capacidades cognitivas, en particular sus habilidades lingüísticas y lógicas[36]. Esta idea se remonta a Platón, de que las matemáticas fortalecen la mente de manera similar a cómo el ejercicio físico fortalece el cuerpo, ayudándonos a negociar una variedad de desafíos mentales. Vivir bien en el mundo de hoy, es una de las razones populares del porqué todos deberían estudiar matemáticas. Pero seguramente una afirmación más estrecha es cierta: que las matemáticas, tan sistemáticamente construidas como lo están en sus hipótesis deductivas, deben desarrollar el pensamiento lógico. Por "lógico" nos referimos al tipo de pensamiento necesario para resolver cadenas de razón e inferencias de conclusión.

Nuestra manera de reconocer algo como nuevo frente a nuestra vista, se basa en un juicio instantáneo inicial sobre la similitud con otros objetos, una tendencia que algunos académicos especulan evolucionó en los humanos porque en la mayoría de los contextos del mundo real, la detección rápida de tales similitudes es una buena estrategia para la supervivencia[37]. Curiosamente, sin embargo, resulta que si la regla abstracta del rompecabezas se traduce a términos que son lógicamente equivalentes, pero, se basan en la experiencia del mundo real, podremos descubrir las estructuras matemáticas que gobiernan la arquitectura de la realidad[38].

Un reciente y fascinante libro, "¿El estudio matemático desarrolla el pensamiento lógico?" escrito por los investigadores en educación y cognición Matthew Inglis y Nina Attridge[39]. Llevaron a cabo experimentos, encontraron que los estudiantes que analizan las matemáticas fueron en su cognición más lentos y más trabajadores, lo que condujo a tasas de éxito significativas en los estudiantes de matemáticas frente a los estudiantes de historia. La lentitud es dada por la enorme carga de cuestionarse "por qué", "cómo", y evaluar la verdad en sus pasos deductivos.

¿Qué hacer, si no me considero bueno en matemáticas?

La matemática escolar vista por un ojo ordinario, no se ve generalmente como pensamiento elegante e interesante para desarrollar la razón. Sospechamos que es debido a que por error el profesor las presentó como categorías de ejercicios repetitivos de un trabajo sin sentido para la vida humana. Si queremos hacer ver al pensamiento matemático como una aventura emocionante para nuestra razón, debemos invocar a la curiosidad para profundizar en el significado de los objetos matemáticos, la verdad matemática, las proposiciones que demuestran soluciones a problemas de este mundo platónico de ideas perfectas.

Generalmente en las matemáticas comenzamos con vértigo y nervios tensos. Quizá es porque en el pasado, de forma inadecuada, lograron crear en nosotros el deseo de escapar de algo que en apariencia no tiene sentido para desarrollar nuestro potencial racional. Pero, deténganse a pensar por un momento: la razón objetiva de las matemáticas es de vital importancia para la construcción de hogares, moléculas con función fármaco-biológica, ciudades y máquinas, entre muchos elementos más que determinan para nosotros un progreso ético. Tal vez creer qué la falta de talento para el pensamiento matemático es lo que nos condena el fracaso material; creemos que es más importante verlo como potencial racional. De esta manera, partimos de dos proposiciones sesgadas muy arraigadas en la cultura popular.

> 1) El pensamiento matemático visto como requisito para las carreras científicas, de ingeniería o medicas, es exigido para el éxito profesional y económico de estos perfiles laborales.
>
> 2) La magia del pensamiento matemático no está en mí y la razón no me alcanza para comprender su mundo.

No es un pensamiento mágico y el que no lo dominemos, no quiere decir que tengamos incapacidad racional. Todos podemos comprender y aprender a razonar matemáticamente, si aprendemos con disciplina y sin presión hostil los significados simbólicos proceptuales, justo antes de los deductivos formales[40].

Sin duda, ninguna cantidad de práctica de ejercicios mejora al pensamiento matemático y su sentir de placer y alegría. Pero eso no significa que no exista forma de mejorar esto. Debemos dejar de huir de este desafío en la educación. Comúnmente consideramos que es por falta de valor para salir del fango de la frase "no puedo, porque antes no he podido". Reflexione, de hecho, la comprensión matemática requiere mucho menos trabajo que aprender una habilidad física para cualquier horizonte laboral de alto desempeño.

Aunque muchas personas aquí estarán argumentando, para ellas aprender matemáticas fue experimentar procedimientos de enorme fatiga de repetición de ejercicios, pero, un académico auténtico en este campo lo verá totalmente distinto. Debemos y, cualquiera puede partir de lo intuitivo en nosotros (de origen biológico), es decir, de las verdades evidentes (axiomas), en conceptos como el de unidad, espacio, probabilidad, categoría, lógica, que son parte de la biología e imprescindibles esos con los que damos sentido racional a la realidad[41].

Las ideas matemáticas difieren al orden típico escolar. En la escuela tienden a producirse en rodajas horizontales, se aprenden las ideas básicas sobre varios temas, entonces, al ciclo escolar siguiente, se aprende algo un poco más avanzado acerca de estos temas y así sucesivamente. Aunque esto es totalmente razonable. Los enlaces de conocimiento vertical quedan de lado, es importante esto dado que la matemática es una red altamente conectada de ideas sofisticadas, siempre basadas en coherencia en los más básicos axiomas. Mejorar el gusto por el pensamiento matemático, es introducir en el currículo representaciones verticales claras para facilitar el razonamiento objetivo.

Las matemáticas plantean sin duda un difícil desafío. Para comprender porqué debemos imaginar una comunidad que pretende poseer un conocimiento de cierta disciplina práctica y no desarrollar su poder de razonamiento lógico matemático. Las características de este conocimiento, son en primer lugar *a priori*, en el sentido de que no confían en la experiencia de lo sensorial. La verdad se logra por reflexión construida por la base axiomática de nuestra especie. En segundo lugar, este conocimiento se refiere a verdades que son necesarias, en el sentido de que las cosas no poseen en su observación racional contradicción[42]: un universo hecho de ecuaciones fundamentales. En tercer lugar, este conocimiento se refiere a objetos que no están situados en el espacio-tiempo y que no participan en relaciones causales, se dicen que son abstractos.

Las matemáticas expresadas para representar los hechos, son un conocimiento que afirma poseer algo así como una promesa, de que la realidad es en su totalidad conocible por la razón[43]:

> "Para cada proposición **P**, si **P** es cierta, entonces hay una explicación suficiente de porqué "**P** es cierta". Es para Leibniz este principio de razón suficiente, todo lo real lo puede conocer la razón, en ella hay una razón suficiente de porqué es así".

Las matemáticas nos entregan conocimientos sobre la naturaleza última de la realidad y sobre nosotros mismos, basadas solamente en la razón y sin ninguna confianza en la experimentación de los sentidos. Gauss refirió a las matemáticas como la reina de las ciencias que entrega conocimientos verdaderos referidos a objetos abstractos como el número, la probabilidad, la geometría, los conjuntos y cálculos de funciones[44].

Las matemáticas son una ciencia extremadamente acertada, tanto dentro de sus propios objetos abstractos, y además, como herramienta para las ciencias empíricas. Mediante la aplicación de métodos matemáticos se aportan grandes recursos de observación racional para hacer avanzar a las ciencias naturales y sociales por caminos que justo antes de aplicarlos parecían imposibles de investigar. Una disciplina tan exitosa como el pensamiento matemático no la pueden rechazar los aprendices de técnicos o científicos, dado que se reduciría su potencial racional para observar rigurosamente. La matemática impregna de estilos de razonamiento a sus practicantes, de modo que, nuestro mundo tecnológico y científico actual está ampliamente convencido de que las matemáticas causan perplejidades necesarias en la mente, para aceptar que la realidad es muy distinta a sus apariencias superficiales, y no menos importante, para construir con ellas lo sintético en la química, la farmacia y lo biológico. Los grandes pensadores son grandes observadores racionales y las matemáticas representan los muchos estilos con que podemos interrogar a la realidad[45].

La mente matemática

Una manera de acercarnos a la lectura que hizo Platón de las matemáticas, es asumir que a partir de un conocimiento innato en nuestra especie, es decir, los axiomas o verdades matemáticas *a priori*, en otras palabras, tenemos verdades para contar, categorizar, hacer probabilidades y resolver problemas del espacio geométrico, sin necesidad de justificarlas. Esto es lo que se conoce como la facultad de la razón, fuente de conceptos de referencia de la verdad y herramienta para razonar y alcanzar el conocimiento. Platón reconoce la necesidad del hombre de conocer más allá de esta base axiomática. Así que, se crean una gama de abstracciones, pero reales, las ideas matemáticas (teoría matemática). Platón postula a estas ideas matemáticas como problemas confinados a la propia mente, quizá las matemáticas podamos algún día verles como el derecho del hombre a la capacidad mental de razonar lo profundo, y que como efecto, tengamos una sociedad más justa y compasiva: humanismo científico.

Consideremos cualquier idea sin contradicción lógica, como verdad de las matemáticas puras, por ejemplo, en la aritmética la operación con números enteros 3+5=8. Dentro de la tradición Platónica esta verdad no es accidental, sino necesaria. Es considerar el papel que juegan las matemáticas para fortalecer nuestra capacidad de razonamiento a partir de los primeros axiomas de unidad, probabilidad, categoría, lógica y espacio geométrico. Las matemáticas son un poderoso instrumento de modelado de todo lo que el mundo puede ser. Las verdades matemáticas puras son necesarias dentro del mundo mental, pero son de gran ayuda para observar el mundo exterior a la mente, ese mundo fáctico que parece obedecer a un diseño matemático. No es extraño que muchos modelos matemáticos sin contradicción no encajen en la realidad material, quizá es que las matemáticas aportan soluciones a mundos posibles, y el mundo físico solo es un caso entre muchos posibles.

Las verdades lógicas y aritméticas se dice que, se rigen en un dominio más amplio a lo intuitivo de nuestras razones elementales, están presentes en todo lo pensable[46]. Este dominio de todo lo razonable, es importante en respuesta a la necesidad de verdades apelables libremente a todo nuestro conocimiento de la realidad fáctica. Se dice que estas verdades matemáticas están libres de sesgo cognitivo. El sesgo cognitivo se refiere a verdades que fueron corrompidas por las emociones.

¿Somos un objeto abstracto?

Un rasgo distintivo del pensamiento matemático es que le ocupa el estudio de objetos abstractos. Un objeto se dice que es abstracto, si carece de ubicación espacio-tiempo y es ineficaz en el sentido causal; de lo contrario se dice que es concreto. En las matemáticas se refiere a algunos objetos como número, conjunto, código, función, ecuación y todos los objetos exóticos de la geometría. Todos ellos parecen estar fuera del espacio-tiempo. Sin embargo, el realismo asume que en la realidad, en su diseño están implícitas estructuras matemáticas que gobiernan fundamentalmente lo que son. Es decir, un objeto real o concreto es lo que es porque en el fondo su estructura matemática lo define. Lo abstracto es en todo caso lo que es una estructura matemática en la mente y también dentro de lo concreto como estructura matemática de lo real. Como puede darse cuenta, la afirmación de que los objetos matemáticos son abstractos ha sido menos controvertida. No es difícil ver el porqué. La comunidad científica cree que el orden que se observa en el diseño del universo es prueba de que los objetos abstractos están en el espacio-tiempo. A veces, conviene considerar a los objetos abstractos como ideas perfectas, es decir, sin contradicción en sus estructuras, y dejar de lado su tipo de existencia. La palabra objeto platónico típicamente se refiere a objetos abstractos que solo existen en la mente. Sin embargo, de esta discusión, podemos por el momento referir la intención de unificar, así que por objeto abstracto matemático se entiende que son tan reales como el propio orden que define a los objetos físicos, químicos y biológicos en su estructura.

Si bien esta afirmación no es más precisa, sí nos permite dejar de lado conceptos físicos de la discusión matemática, dado que, por descontado afirmamos que están presentes en la realidad fáctica. Estamos considerando a la realidad como algo bastante verosímil, sin embargo, la vemos como una medida de referencia a objetos abstractos a su independencia de los agentes inteligentes y de su lenguaje, pensamiento y práctica. ¡Si no hubiera vida inteligente, 2+2 aún habría sido 4! Esta reclamación de independencia, también puede ser retirada en términos de un contraste entre descubrimiento e invención. Es la parte de nuestra experiencia de hacer matemáticas puras y aplicadas. Parece que más allá de nuestra matemática moderna, en la propia realidad material hay ocultos en sus estructuras muchos objetos abstractos aún sin descubrir. Y que la propia mente libre, además crea otros objetos abstractos para una infinidad de posibilidades de existencia de universos.

Así como una página en blanco no crea los límites de lo que en ella se puede crear, los objetos abstractos ocultos en lo fáctico, tampoco lo hacen para nuestra mente. La parte matemática que gobierna las estructuras de una página de papel, no limita que en ella se creen nuevos objetos abstractos o poemas de enorme poder estético.

Pensamiento matemático

Investigar sobre el pensamiento matemático, es intentar contestar ¿Qué es la matemática? ¿Son realmente los objetos matemáticos abstractos ajenos al espacio-tiempo-vida? Obviamente tenemos que intentar expresar a las matemáticas en sí mismas sobre los números, conjuntos y en general todo lo que ella estudia. ¿Cómo debemos abordar el lenguaje artificial de las matemáticas? ¿En qué momento la lingüística del español es necesaria para involucrarla en los modos que la matemática la requiere para producir conocimiento objetivo? Debemos comprender cómo la matemática nos ayuda a evitar que las emociones sesguen a la razón, además, intentar contestar ¿cómo se construye el conocimiento matemático a partir de los primeros principios de verdad evidente en nuestra especie, es decir los axiomas?, y ¿cómo se emplean para probar demostraciones matemáticas? ¿Es relevante la psicología y la historia en el aprendizaje de este fascinante mundo platónico?

Puesto que las preguntas que nos hemos planteado son extremadamente difíciles, nos apoyamos en la literatura para intentar una aproximación digna para este desafío. La pregunta de inicio es muy obvia, ¿Qué clase de conocimiento son las matemáticas?

La idea básica de que las matemáticas son un conocimiento *a priori*, es decir, confinado a la mente independiente de la experiencia sensible; es contraria a la idea del conocimiento *a posteriori*, en otras palabras, conocimiento de lo que existe con independencia lingüística en lo real. El pensamiento matemático es desencadenado por la pregunta sistemática de ¿por qué?, en cada paso esta pregunta motiva al aprendizaje de este conocimiento. Este tipo de conocimiento no olvidemos que tiene como fuente nuestra base biológica axiomática de unidad, categoría, probabilidad, lógica y espacio geométrico.

Todos los juicios analíticos son *a priori*, puesto que esta contención conceptual puede establecerse sin cualquier dependencia sustantiva en la experiencia sensorial. Juicios analíticos también se dice que son explicativos, mientras que los que son sintéticos son ampliativos de la verdad matemática. Las sentencias:

> El cuerpo biológico de una célula está delimitado por la membrana celular.
> El cuerpo biológico es materia química estructurada.

La primer proposición es analítica y la segunda es sintética. Las verdades analíticas se basan en el principio de no contradicción, todas ellas son verdades lógicas que pueden calificar como analíticas. Kant insiste en que el conocimiento matemático no se produce de manera analítica, sino que es sintético por pretender ser verdadero y universal. Es sintético por su consideración de ser proposiciones puras, es decir, sin conexión particular que involucra a conceptos del mundo material. Por ejemplo, para establecer que la línea más corta entre un espacio plano es la recta, es inútil la necesidad de contemplar los conceptos involucrados en esta verdad. En su lugar, es necesario traer la noción de espacio geométrico euclidiano para con la intuición dibujar, tal vez solo en la imaginación la línea más corta entre dos puntos en el plano. Es entonces que podemos percibir que la línea recta es la más corta en su longitud. Para Kant lo central es cómo este conocimiento es sintético *a priori*, para ello evoca a la vuelta coopernicana que lo encausa como **idealismo trascendental**. Permítanos explicar un poco. En el concepto pre-Coopérnico del conocimiento, los objetos tienen propiedades independientes de nosotros y nuestras representaciones mentales, deben ajustarse a estos objetos para producir conocimiento. Pero, Kant considera que este concepto es incapaz de acomodar el conocimiento *a priori* sintético. Puesto que el conocimiento es sintético, se trata de objetos creados desde nuestra base axiomática de origen biológico, entonces estos objetos deben de alguna manera afectarnos en el cómo razonamos el propio conocimiento *a posteriori* de la ciencia. La solución es realizar un giro cooperniano:

> Si la intuición ha de ajustarse a la constitución de los objetos, entonces no se ve cómo podamos saber algo *a priori*; pero si el objeto… se ajusta a la constitución de nuestra facultad de intuición, entonces podremos muy bien representar a toda su posibilidad para nosotros.

Es decir, tenemos que invertir el orden habitual de conformidad epistémica. Es solo cuando reconocemos que el mundo no está obligado a cumplir con la constitución de nuestra facultad de intuición sobre los objetos materiales, es allí donde seremos capaces de explicar cómo verdades aritméticas y geométricas pueden ser al mismo tiempo sintéticas y *a priori*. Conveniente o no, este es uno de los más significativos avances en el estudio del pensamiento matemático, después de las disertaciones de Platón.

En resumen, el pensamiento matemático es sintético *a priori*. Los teoremas de las matemáticas son *a posteriori*, dado que todas las verdades analíticas lo son. Quizá este callejón sin salida hace que los pensadores posteriores a Kant abandonen su idea entre lo sintético y lo analítico. La opción es considerar a las verdades matemáticas como cadenas analíticas de proposiciones más complejas que su estructura lógica, dando origen a la lógica modal y doxástica de un discurso objetivo que trasciende a las matemáticas, es decir, lo emplea el español y otros lenguajes naturales para pensar y crear en la ingeniería y la ciencia. Los lógicos, tempranamente, sostuvieron que el pensamiento matemático puede en todas sus verdades sobre los números, reducirse a la lógica y analítica entre los diferentes números.

Esto significa que el conocimiento matemático es una actividad *a priori*. Muchos matemáticos formalistas comparan al pensamiento matemático como un juego que parte de verdades evidentes y construyen casos correctos derivados de estas verdades (teoremas). Consideran que la actividad del pensamiento matemático es la de producir y ensayar demostraciones de teoremas formales. Por otra parte, los ficcionistas consideran al pensamiento matemático como una ficción útil, donde la norma de corrección no es la verdad literal, sino la verdad evidente en el contenido de los axiomas.

Platón consideró a los objetos matemáticos como independientes del mundo material, la dicotomía mente-material no resolvió el misterio. Si bien, para los lógicos la aritmética se reduce a la lógica, para los biólogos la intuición matemática está escrita en nuestra genética como verdades innatas, y quizá está extendida a todo el orden que gobierna la realidad material. Pero Frege, combina todas estas posturas, él va más allá, considera que la propia razón humana depende de sus resultados de conocimiento del trasfondo inconsciente enmascarado del pensamiento puro. Es decir, un sujeto logra en su vida desarrollar en su propia experiencia el lenguaje matemático[47]. Así que desde Frege, el fondo de nuestro poder racional es un juego de verdades matemáticas proyectadas a la realidad material, social, estética y psicológica.

Rigor y formalización

Desde Euclides hace 300 *A.C.*, los matemáticos han confiado en la solidez del método axiomático. Algunas verdades sobre todo evidentes o fundamentales son identificadas y dadas a la situación como axiomas, es decir, como primeros principios que no es necesario sobre ellos ninguna demostración, al estar libres de apelar su verdad, ellos son los ladrillos primeros para derivar teoremas. Este método ha demostrado ser un éxito y ahora es una parte esencial de la práctica matemática. A la luz del método axiomático la epistemología de las matemáticas se divide en dos preguntas acerca de nuestro conocimiento de los axiomas y, sobre nuestro derecho al razonamiento deductivo utilizado para derivar los teoremas. Antes del siglo XIX, los axiomas fueron justificados a menudo simplemente basándose en que son intuitivamente obvios. Esta evidencia intuitiva era una cuestión de una observación geométrica, Bernard Bolzano (1781-1848) publica su prueba puramente analítica del teorema del valor intermedio, ofreciendo un análisis lógico de continuidad, así inauguró el **rigor del análisis**, traduciendo en definiciones lógicas precisas los conceptos centrales de la continuidad y límite, así como las construcciones del ahora estándar, sistema de números racionales, complejos y reales. El efecto fue una eliminación gradual de la intuición geométrica a favor de métodos analíticos y lógicos abstractos[48]. Esto aseguró una gama mucho mayor de la validez de los sistemas de numeración ya mencionados y los principios matemáticos que los rigen. A su vez, Frege estableció que todo enunciado matemático depende de la cadena de inferencias que está libre de vacíos del "por qué". Así se inventó el lenguaje formal natural o escritura conceptual modal. En esta forma de pensar se establecen axiomas lógicos precisos (operadores discursivos del español por ejemplo) y reglas de inferencia que nos conducen a otros teoremas ya establecidos[49]. Después del método de Euclides, este método formal es la mayor contribución al lenguaje objetivo y esencial para la ciencia, la ingeniería, el derecho, la filosofía y el desarrollo de contenido objetivo en el discurso académico.

Podríamos argumentar que contar y entender un número está en el corazón de las matemáticas, y muchos niños empiezan a saber contar en la escuela. Saber contar requiere una experiencia que incluye reconocer la unidad o mónada dentro de toda realidad, incluyendo la habilidad de ser capaz de categorizar y así clasificar lo que existe. Se requiere aprender la notación de "más o menos" y la capacidad de distinguir entre números pequeños tales como 1,2,3,… y números más grandes de unos 1000 o más dígitos. En la numeración temprana se implica:

- Reconocer en una cuenta uno a uno el concepto de unidad o mónada.
- Hacer conciencia que el numeral, por ejemplo el "5", representa una colección de cinco unidades.
- Distinguir que el número último contado, es la representación total de una colección.
- Estar familiarizado con las palabras para escribir un número entero o número en términos de sus partes.
- Identificar para cualquier número cuál le antecede y cuál le procede.
- Entender el principio de orden estable, el de contar diciendo 1,2,3,4,5,6… en ese orden.
- El aprendiz entiende el principio cardinal, sabe que el número fijo hasta el último objeto que la cuenta, nos da la respuesta a la pregunta de ¿cuántos?, cardinal indica el número o cantidad de elementos de un conjunto.
- Principio de abstracción, comprender que un número es la cuenta de algo, donde no se está especificando qué algo.
- Comprender el principio de orden irrelevante, si contamos una colección de algo, no importa en qué orden lo contemos esto no altera la cuenta.

Las formas en que los estudiantes demuestran una comprensión de los principios de conteo se describen comúnmente mediante números o marcos de aprendizaje. Un marco de aprendizaje es la descripción de habilidades, entendimiento y conocimiento de la secuencia en que típicamente ocurren los aprendizajes; estos crean una imagen mental de lo que significa avanzar en el conocimiento matemático de algún área de aprendizaje. Así, el marco proporciona una ruta o mapa para supervisar el desarrollo del individuo en el tiempo, el aprendiz desarrolla curiosidad, confianza, creatividad, compromiso, entusiasmo, persistencia, imaginación flexible, siempre y cuando los procesos de contestar todos los por qué en el marco de aprendizaje queden explícitos.

Hasta aquí, el aprendiz debe haber desarrollado la competencia más básica de las matemáticas:

Competencia 0: contar hacia adelante y hacia atrás, principio cardinal, comparar números, nombres de los números y abstraer al número. Contar de tanto en tanto, decenas y unidades. Además de contar para clasificar algo.

Primeras operaciones con números

En la niñez es fundamental cultivar la idea de que los números hasta 10 pueden ser conceptualizados como unidades en sí mismas, para el establecimiento de 10 como una unidad contable. Dado que, los niños aprenden sobre el número en términos que en parte los relacionan al todo, esta idea puede ser relacionada como sumas y restas, con los números como unidades compuestas[50]. Del mismo modo, la multiplicación y la división requieren que los estudiantes las conciban dentro de los números como unidades[51]. En la educación elemental se espera que los niños sepan contar hasta 100, ubicar a los números en las rectas numéricas, realizar operaciones simples de suma y multiplicación, utilizando estrategias de conteo y el valor posicional de cada dígito de un numeral. Se relaciona a la suma con unir, y a la resta con separar al resolver problemas simples.

Dado que, estamos expuestos a una variedad de situaciones que requieren utilizar la suma y resta sobre la propia memoria de trabajo, se alienta a los aprendices a hacer operaciones con estrategias mentales para ayudarles a resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, con la propiedad conmutativa podemos en la mente colocar el mayor número y así resolver la operación de suma. La cuenta puede simplificarse sumando de uno en uno al número más grande, esto es poco práctico para números grandes.

Algunos niños utilizan por ejemplo para la suma 8 + 4, el punto aplicado sobre 10, es decir, 8+4=12.

Ya en el año dos de primaria, se introduce la multiplicación y la división de grupos de números. Los niños reconocen a la multiplicación como la adición repetida de grupos y arreglos de números. Por ejemplo, 8 x 7= 8+8+8+8+8+8+8= 56. Además, se reconoce la división como la agrupación en conjuntos iguales y así resolver problemas sencillos utilizando estas representaciones. Por ejemplo, 15/6:

$$\frac{15}{6}=\frac{3x5}{3x2}=\frac{3}{3}\bullet\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

Y

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 2 & 5 \\ - & 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Empleando el algoritmo de la división, cociente por residuo entre divisor:

$$2\frac{1}{2}$$

Resulta muy útil para los niños ver las multiplicaciones básicas como una matriz de unidades cuadráticas, para ello previamente se enseña a calcular el área de un cuadrado de lado 1:

0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Competencia 1: Son capaces de realizar multiplicaciones y divisiones y evaluar la tecnología en apoyo para verificar que sus resultados son correctos.

Mediciones

La medición es un aspecto del plan de estudios de las matemáticas elementales que tiene aplicación en la vida cotidiana. Cuando contamos con el conocimiento de número, operaciones de suma y multiplicación, el análisis del proceso de medición hace ganar confianza al estudiante. Son requirentes conceptuales previos al acto de medir.

Ángulo: es la medida de la cantidad de giro entre dos líneas unidas en un vértice; una figura de dos rayos con un punto final común.

Área: es la cantidad de espacio de una superficie en forma cerrada.

Atributo: es una propiedad o característica de algo.

Capacidad: la medida de cuánto puede almacenar un objeto tridimensional.

Estimación: una aproximación o un juicio sobre los atributos de algo.

Peso: estimación de la masa o cantidad de materia de los objetos, que puede ser percibida al levantar uno de ellos con la mano.

Longitud: distancia de una medida de algo entre extremos.

Materia: cantidad de átomos de los objetos.

Unidades de medida: estándar que puede usarse como referencia a los atributos de algo.

Conciencia espacial: capacidad para visualizar mentalmente objetos y sus relaciones espaciales.

Temperatura: media del equilibro de la energía libre entre fuentes de calor y fuentes de absorción. Relación frío y calor.

Tiempo: duración de un evento desde su inicio hasta su instante temporal final.

Valor: medida numérica de alguna magnitud de algo.

Magnitud: valor numérico que representa cantidad.

Volumen: cantidad de espacio que ocupa un objeto tridimensional.

Es generalmente aceptado que hay una ruta de aprendizaje del sentido de medición, esa que permite desarrollar eficazmente la medición de algún atributo de las cosas, por ejemplo, longitud, área, volumen y capacidad; ángulo, masa, tiempo, carga, temperatura y dinero o algún otro valor. En seguida se expone cada paso del acto de medir:

1. Se identifica el atributo. La primera y más importante etapa en la secuencia, es identificar la propiedad en la que estamos interesados en conocer sus medidas.

Asumimos que antes de que un niño emplee las matemáticas ya conoce los conceptos relacionados con los atributos. A menudo hay confusión respecto a la longitud en una dimensión, los niños deben reconocer que la longitud une una dimensión empleando la recta numérica, respecto al área es apelando al plano cartesiano o sistema de dos dimensiones espaciales; para el volumen es necesario dominar la primera y segunda dimensión, para relacionarlo con la capacidad de un objeto para ocupar un espacio de tres dimensiones.

2. Comparar y ordenar. Es el ensayo de todo niño en la experiencia de identificar atributos, este proceso de categorización ayuda a consolidar la comprensión de la comparación directa. ¿Qué es más alto? ¿Qué libro tiene más páginas? ¿Cuál piedra pesa más? ¿Cuál es más lento? ¿Dentro de cuál cabe más agua? Estos métodos directos identifican los atributos más inmediatos a lo evidente, al introducir unidades de medida se amplía el rigor de estas comparaciones y se hacen más complejas las diferentes categorías que podemos nombrar del mundo. Sin embargo, los niños realizan sus ensayos de categorización con unidades informales, estas son esenciales para desarrollar el concepto de medición y reconocer la necesidad de unidades estándar. De esta manera, se hace evidente la necesidad de unidades de longitud, área, volumen, tiempo, masa, temperatura. Algo muy relevante, es darse cuenta que podemos medir un mismo objeto con muchas unidades distintas.

3. Aplicar unidades estándar. Después de vivir la experiencia de unidades no estándar y entendiendo el principio de comparación con su relación al acto de medir, entonces podemos introducir los problemas asociados a la no formalización de las referencias de unidades, tales como la improductividad en la colaboración humana. El uso graduado de instrumentos, es aquí donde debe enseñarse como escalas de longitud, tiempo, peso, temperatura, área y volumen permiten una medición en la que los números representan un intento de aproximación a lo real..

4. Aplicación de fórmulas. Es el primer paso para realizar cálculos de medida de área, volumen, perímetros y reglas de equivalencias entre unidades compatibles.

Esta secuencia de medición de cuatro pasos se emplea para desarrollar una conciencia y el conocimiento de los atributos objetivos, es decir, los compartidos como verdaderos por nuestra especie.

La **longitud** es un existencial del espacio, la medida de algo entre extremos y es quizá el primer atributo de la existencia de dimensiones espaciales en los niños, se medirán longitudes rectas, en perímetros curvos de planos. El primer concepto bidimensional es el del **área** de un cuadrado, esta experiencia anima al niño a investigar las superficies disponibles en su contexto y comparar dimensiones calculando cuántos cuadrados con un **cm** de lado caben en ellas. De esta manera, se logra observar la necesidad de fórmulas más precisas para calcular áreas como atributos en las actividades de medición. Es ahora el turno de saltar a lo tridimensional, así **volumen** y capacidad que ocupa un objeto en el espacio es introducido como un atributo de todo lo que existe en este universo. La experiencia de capacidad, es referida a unidad de litro y cuántos de estos caben en diferentes objetos, para solo más tarde reconocer la necesidad de fórmulas más precisas para cálculos de volumen. Pero hay otro ingrediente en el espacio, es cuando se reconoce el ángulo como la longitud de abertura entre dos líneas unidas en relación a un círculo graduado en grados. El atributo de **ángulo** es necesario introducirlo cuando se expone que en el espacio hay atributos de simetría en mucho de lo que nos rodea. Al explorar los conceptos de ángulo reconocemos que es un patrón que determina por mucho los atributos de las formas que nos rodean.

En un salto al mundo de la física, el niño de manera innata distingue que las cosas tienen diferentes pesos. Es el momento de introducir el atributo de **masa**, como cantidad de materia contenida en las diferentes sustancias sólidas, líquidas y gaseosas. Al medir el atributo peso se sientan las bases del concepto de gravedad y se compara peso con volumen. Las escalas de referencia de peso, gramos, kilogramos, le permiten a la imaginación de los niños reconocer que la realidad de volumen no coincide con la de peso. El primer atributo físico que un niño reconoce, sin embargo, no es el de masa, sino el de **tiempo**. Su cerebro tiene un acumulador a partir de que registra el paso del tiempo. Los diferentes eventos los categoriza en presente, pasado y futuro, cuando cuenta hacia el futuro la recta numérica avanza en el sentido de números enteros positivos, caso contrario cuando cuenta hacía el pasado, avanza en sentido a la izquierda con números negativos, de este modo el cero es referido como el presente. El siguiente paso es reconocer la necesidad de una escala para medir los eventos temporales, es aquí donde se aprenden las escalas de tiempo: segundo, minuto, hora, día, semana, mes, año, década, siglo. Otro atributo evidente es el calor de las cosas, como frías, templadas o calientes, se explica que la temperatura es la cantidad de movimiento interno de la materia y que hay objetos que emiten y otros que absorben este tipo de energía, un tipo de luz infrarroja. Sin más, se desarrolla la medición de este atributo introduciendo el concepto de termómetro y escalas de **temperatura**.

Pasando de los atributos espaciales, la categorización geométrica y los atributos físicos de masa, tiempo y temperatura, un atributo social que de inmediato se le presenta al niño, es el valor monetario de las cosas y servicios. El **dinero** es la unidad para el atributo de valor y costo de algo. Es necesario introducir el concepto de divisas y sus fracciones para realizar la experiencia de calcular valor y costo.

Medir es **estimar** sobre la vida cotidiana, las magnitudes de atributos espaciales, físicos y monetarios. Pero lograr medidas exactas, es reconocido por el estudiante como una ventaja para hacer eficiente la convivencia humana. El niño para valorar la habilidad de medir, debe estar convencido de que estimar el valor es algo útil, relacionado con el modo de vivir el tiempo y los atributos más relevantes para estimar referencias personales que puedan ser entendidas con precisión por otros. La estimación es un proceso en el que se hacen presentes las ideas de instrumento de medición y método de cálculo[52].

Competencia 2: Medir, es la habilidad para estimar la conciencia espacial, física, monetaria y representar situaciones de experiencias sobre magnitudes estandarizadas en unidades de los atributos presentes en la realidad. Se leen escalas, se interpreta la naturaleza de los atributos y se calcula su estimación.

Propiedades geométricas del espacio

Bisectar: dividir en dos partes iguales.
Figuras congruentes: que son exactamente del mismo tamaño y forma.
Disectar: dividir en dos partes.
Borde: el intervalo donde se encuentran dos caras de un sólido.
Cara: una vista de la superficie de un poliedro.
Proyección isométrica: una vista de la esquina de un objeto.
Conciencia espacial: la habilidad de ser consciente de uno mismo en el espacio y sus dimensiones. Implica organizar el conocimiento de los objetos espaciales en relación con nosotros mismos en el espacio, determinado por medidas de longitud para cada dimensión. Además, debemos comprender la relación de estos objetos espaciales cuando cambian de posición respecto a un origen de referencia para un observador.
Objeto tridimensional (3D): se requieren para definir dicho objeto tres dimensiones y tres coordenadas para especificar un punto. Posee volumen.
Transformación: cambio o modificación de forma espacial, por giros, desplazamientos, cambios de escala o ángulos. Posee área.
Objeto bidimensional (2D): se requieren de dos dimensiones, es una superficie plana sin profundidad, que requiere dos coordenadas para especificar un punto.
Objeto unidimensional (1D): se requiere una dimensión, tiene la propiedad de la longitud.
Vértice: lugar donde convergen planos y líneas para formar esquinas.
Visualización: imagen mental que hemos asimilado como propiedad percibida de objetos espaciales.

En la educación elemental, al niño se le enseña a hacer cálculos de longitudes en una sola dimensión, dentro de una recta numérica. El siguiente desafío, es trabajar con figuras 2D en el plano cartesiano y calcular áreas. Y finalmente, se realizan análisis de propiedades espaciales en 3D y cálculos de volumen y capacidad. Así, la conciencia reconoce a la geometría como la exploración del espacio, se trata de atributos de forma y tamaño dimensional, por ejemplo, en las proteínas sus funciones biológicas no están en su proteoma, sino es su configuración geométrica espacial.

El primer paso, en el conocimiento geométrico es reconocer las 1D, 2D y 3D explorando a través de reconocer, descubrir, comparar, construir y desarrollar argumentos geométricos. Es en resumen realizar una visualización, una percepción de forma y cambios de propiedad en los conceptos presentes en el espacio. En este punto, el niño aprende reconocer la línea recta, el cuadrado, el círculo, el triángulo, las esferas y los cubos. Sin embargo, no solo como una lista de objetos, sino que incluye formas de interés para estudiar sus propiedades. Aquí el conocimiento es jerárquico, un estudiante no puede comprender sin entender el nivel anterior dimensional. Es común por ello que se aprenda en este orden 1D, 2D y 3D. Para ello, se generan experiencias de investigación, exploración y discusión de definiciones. Es decir, cada nivel contiene su propio lenguaje y alguno que es común a los otros planos dimensionales. El movimiento de conciencia de un nivel a otro de aprendizaje no es un proceso simple, ocurre una crisis de percepción del espacio y sus propiedades. Por ejemplo, se estudia primero el espacio de funciones escolares, luego vectoriales y finamente tensoriales. Los elementos del proceso elemental de aprendizaje más clásico son:

- Clasificar, describir y nombrar familias de formas y objetos 1D, 2D y 3D.
- Realizar cálculos en la recta numérica (1D) y definir la noción de punto y origen geométrico.
- Construir la noción de ángulo y sus propiedades en las rectas paralelas y diagonales.
- Identificar las propiedades y cálculos necesarios de área y volumen de diferentes objetos.
- Representar objetos de manera gráfica.
- El concepto de coordenada en un sistema geométrico y localizar los puntos relevantes.

- Realizar prácticas tecnológicas con software por ejemplo con URL: www.geogebra.org .
- Construir la idea de un escalar como par ordenado en el espacio y en un cuerpo cerrado bajo una operación binaria de suma y multiplicación.
- Construir la idea de vector como objeto real y matemático.
- Construir la idea de tensor como una realidad hecha de dinámica de campos.

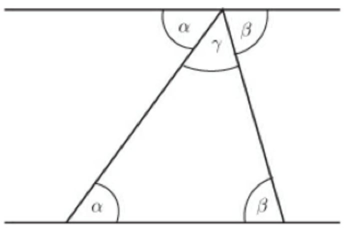
3. ¿Qué es un problema matemático?

Es necesario dar respuesta a esta pregunta si aspiramos a promover el pensamiento matemático en nuestro espacio educativo. Muchas personas ni siquiera quieren acercarse a este tipo de problemas, prefieren verles como paquetes de ejercicios en la transcripción en un pizarrón, en lugar de comprender a los mismos. Ven a las matemáticas como cálculos sin rumbo.

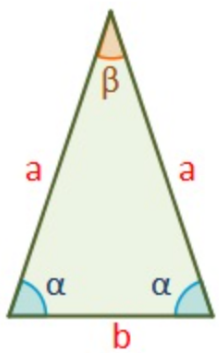
Para responder a la pregunta de este apartado, lo ilustraremos desde la geometría. La tradición preservada en la forma de introducir a los noveles en los problemas matemáticos, en especial a los más jóvenes, es a través de la geometría.

Comenzamos con el conocimiento de las líneas paralelas, las utilizamos para probar que los ángulos internos de un triángulo siempre suman 180º en el espacio euclidiano. Lo podemos observar en la siguiente figura, los ángulos de la base de este triángulo isósceles son iguales y es bastante obvio. En este triángulo dos lados son iguales y el otro desigual.

$$\alpha = \beta$$



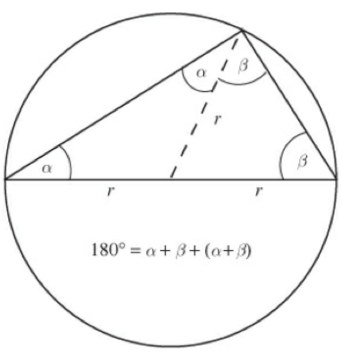
Lo podemos ver así: $\alpha+\gamma+\beta=180^{\circ}$



$2\alpha+\beta=180^{\circ}$

Para el caso de demostrar que el ángulo descrito en un triángulo dentro de un círculo de radio r, a partir del conocimiento anterior de las paralelas podemos deducir que:

$\alpha+\beta+(\alpha+\beta)=180^{\circ}$



Reflexionar esto nos lleva una media hora, en la que podemos demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es 180º. Una de las principales funciones sociales de las matemáticas, sin duda, es que nos ayuden a comprender cómo funciona el mundo, y en particular, para llegar a comprender dónde la intuición física, química o biológica no puede alcanzar empleando lenguaje natural (inglés, español…) la verdad sobre la realidad de estos espacios de conocimiento matemático, solo se revela como dijo Epicuro, viviendo desde dentro a las matemáticas.

¿Reales o imaginarios? A Euler debemos una de las más famosas proposiciones entre los matemáticos, es una conexión entre **pi**, **e**=2.71829818 (base de los logaritmos naturales) e **i**, donde este último es un número imaginario, es decir, la raíz cuadrada de menos uno. Pero no todos los problemas matemáticos están confinados dentro de las propias matemáticas, algunos otros intentan resolver, por ejemplo, hacer confiables los sistemas de comunicación digitales que hoy son tan cotidianos en las redes electrónicas de la Internet y tecnologías móviles con capacidades de procesamiento asombrosas de datos. Los problemas de aplicación matemática son la otra dimensión para comprender ¿Qué es un problema matemático?

Las comunicaciones y sus matemáticas

En estos tiempos casi todos somos usuarios de los mensajes de correo electrónico, SMS y otros como los sistemas Chats. Sin embargo, resulta complejo en lo profundo comprender ¿qué son estos mensajes de datos que se almacenan en los recovecos de la iCloud, bases de datos y ordenadores de usuarios. La velocidad y claridad de la información es lo que hace posible su éxito. Los datos de estos mensajes son trasmitidos por ondas electromagnéticas, pulsos de láser y señales eléctricas digitales, almacenadas en forma de polarización de campos eléctricos, regiones imantadas y muy pronto en forma de ADN. Sin embargo, cualquier medio de almacenamiento y transmisión de datos está expuesto a ruido, es decir, a señales que distorsionan los mensajes. Estas perturbaciones resultan imposibles de evitar en su totalidad, sin embargo, un tratamiento matemático reversible es posible, es decir, se puede emplear la autocorrección o redundancia de códigos para tal efecto.

Resulta que hay una teoría matemática subyacente detrás de todas estas transferencias de información de datos en la Internet y dentro de nuestros propios sistemas móviles de cómputo. Se conoce como mecánica de códigos dentro de la Teoría de la Información. El emisor o fuente de la información, un receptor o destino de los datos, el medio de transmisión, son ejemplos de un sistema punto a punto de comunicación, por ejemplo, trasmitir entre dos teléfonos inteligentes SMS's.

En este modelo, el emisor crea un mensaje en lenguaje natural, es entonces que pasa a un descodificador, que luego lo codifica representándolo como una estructura matemática de símbolos. Ya en el emisor, el receptor descodifica la estructura matemática y verifica la integridad del mensaje y lo intenta autocorregir si detecta que fue corrompido. El primer éxito de este proceso se realizó en 1960 por la NASA con imágenes de blanco y negro procedentes de los exploradores Vikingos que fueron enviados a lo profundo del sistema solar.

Los matemáticos encontraron a este problema matemático de aplicación dos soluciones, emplear redundancia, información añadida al mensaje que permite para cada paquete de datos verificar su integridad y, en caso de ser corrompido pedir de nuevo el reenvío de dicho paquete de datos. Para el caso donde la redundancia no es viable, se hace pasar la estructura del mensaje por matrices matemáticas de codificación y descodificación de autocorrección, este texto, escapa a la complejidad de la matemática elemental, pero esto nos sirve para darnos una idea de que en el terreno tecnológico las matemáticas son un recurso que hace posible la viabilidad, por ejemplo de la Internet.

En 1948 el matemático Claude Elwood Shannon publicó dos documentos, que en conjunto son la teoría matemática de las comunicaciones, para un sistema que describe y analiza la transferencia de información. Shannon demostró que hay límites fundamentales para las tasas de transmisión de datos (hoy referidas a anchos de banda) y el grado de comprensión de esta información. En este concepto, se hace referencia a conceptos de información, entropía e incertidumbre como los implicados en el modelo, en otras palabras, las relaciones entre lo conocido (información), lo posible de ser conocido (información en potencia: entropía) e incertidumbre (lo imprevisto, no controlable o incierto).

En síntesis, los problemas matemáticos puros están orientados a la demostración interna de la base axiomática de las matemáticas, mientras los problemas matemáticos de aplicación están orientados a logros de corte tecnológico y científico. Hasta aquí, en resumen estudiamos un breve paso en la la idea de problema matemático.

Un **axioma** es una declaración que los matemáticos aceptan tratar como verdadero; los axiomas forman parte de una base a partir de la cual desarrollamos una teoría. En análisis, los axiomas se utilizan para capturar nociones intuitivas sobre números, series, funciones…, por lo que su experiencia lo llevará a reconocerlos como verdaderos. Por ejemplo:

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a+b=b+a$
$\exists\ 0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in \mathbb{R},\ a+0=a=0+a$

Donde:
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a+b=b+a$

Para todo ($\forall$), a, b que pertenece a los números reales ($\in \mathbb{R}$), son conmutativos bajo la suma.

$\exists\ 0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in \mathbb{R},\ a+0=a=0+a$

Existe un ($\exists$) cero, que pertenece a los números reales ($\in \mathbb{R}$), tal que ($/$), para todo número **a** contenido en los reales ($\in \mathbb{R}$), cero es el elemento neutro bajo la suma.

Estas proposiciones son parte de los axiomas de los números reales.

Una **definición**, es una declaración precisa del significado de una palabra o símbolo en matemáticas. Analizar las estructuras matemáticas nos implica definir nuevos conceptos y aplicar otros ya familiares. Muchos de los conceptos definidos no coinciden con las ideas intuitivas, son parte de una teoría formal que los explica. Un ejemplo de una definición es:

Una función $f: X \to \mathbb{R}$ está limitada sobre X si y solo si $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in X, f(x) \leq M$.

Donde:
Una función **f** desde el conjunto **X** en los reales está limitada sobre **X** si y solo si existe **M** en los reales, de tal manera que todo **x** en **X**, es menor o igual que **M**.

Definiciones como estas aparecen regularmente en el pensamiento matemático de análisis. Tienen una estructura predecible y hay dos cosas que notar. La primera, cada definición refiere a un único concepto. En segundo lugar, dice que el término se aplica *si y solo si* algo es cierto.

4. Razonamiento objetivo

Las matemáticas puras se refieren a la exploración de conceptos matemáticos derivados inicialmente del estudio del espacio geométrico, la noción de número dentro de un sistema numérico; la habilidad de categorizar dentro de la teoría de conjuntos y el sentido del evento improbable para la explicación de la teoría de probabilidades. Para captar y comunicar ideas matemáticas debemos hacer declaraciones en forma de proposiciones acerca de **objetos matemáticos** y a continuación, determinar si en tales declaraciones existe o no contradicción. Es muy difícil precisar lo que son estas declaraciones matemáticas, dado que solo en el mundo platónico de estas abstracciones, se les reconoce como piezas de estructuras de la razón. Estas declaraciones son propuestas demostrables en su verdad, es buen criterio llamarles proposiciones, sentencias que solo admiten dos estados: falso o verdadero. Escribiremos una lista que en principio, no nos interesa su evaluación de estado:

$$2+1=3$$
$$\pi \neq \sqrt{12}$$
$$a^2+b^2=c^2$$
$$n^2-2n>0$$

En esta última **proposición**, **n** es una variable numérica, es decir, que se le asignan valores a **n**. Esta sentencia se denomina del tipo predicado, dado que los símbolos deben recibir valores con el fin de obtener una proposición producto de variables libres. La palabra **estado** se usará para denotar una proposición o un predicado. Así que la lista anterior son estados. Cuando utilizamos una sola letra en mayúsculas **A** o **P**, se indica el estado de la proposición, cuando se expresa como **A(n)** o **P(m,n**) se indica un estado del predicado con variables libres, indicadas entre paréntesis.

Generalmente los matemáticos agregan la leyenda "donde **n** y **m** son", especificando las variables en su naturaleza.

Por ejemplo, en particular es muy difícil definir al número pi (π), originalmente fue definido geométricamente, como el cociente de la longitud de la circunferencia de un círculo entre la longitud del diámetro del círculo. Esta definición debió ser justificada al definir lo que es la longitud de un círculo y, después demostrar que la relación es independiente del tamaño del círculo. Esto fue alcanzado por nuestra civilización en la época de la Grecia clásica. Un hexágono inscrito dentro de un círculo de diámetro unidad, tiene para este caso pi>3. Arquímedes demostró por medios geométricos en su libro, sobre la medición del círculo de radio **r**, una prueba rigurosa de la fórmula πr^2 (los detalles los podemos encontrar en textos de análisis matemáticos).

Esto quiere decir, que las proposiciones son la unidad de razonamiento, pero no solo del pensamiento matemático, sino de todas las estructuras de razón de la ciencia, estas estructuras son cadenas de proposiciones y operadores (una **lógica de conectores** también llamados partículas discursivas) dentro de la técnica, la ciencia, el arte... En matemáticas también las proposiciones están en forma de cadenas de razón, son proposiciones eslabonadas con operadores, en otras palabras, podemos verlas como **cláusulas o declaración más operadores**. Muchas declaraciones (cadenas de razón) son complejas estructuras de estados, conectadas lógicamente por varios operadores. Por el momento, citamos algunos operadores:

$$\pm, \times, \therefore, \geq, \cong, \otimes, \odot, \int, \in, \sum, \wedge, \lim_{x \to \infty}, \ldots$$

En resumen, una declaración matemática tiene forma de cadena de proposiciones y operadores, al modo de una lógica conceptual de Frege. Sin embargo, la matemática en su tarea sustantiva, establece la verdad de las declaraciones, mediante la demostración de pruebas generalmente hipotético-deductivas y de implicación.

Una **demostración** es esencialmente una secuencia de sentencias (proposiciones) a partir de declaraciones de verdad, terminando con la prueba de la declaración inicial. Cada declaración es verdadera porque es afirmada por las anteriores en la secuencia del proceso lógico. La justificación de estas medidas, generalmente hace uso del concepto de **implicación**, este concepto refiere a la afirmación de que si una declaración es verdadera, entonces otra declaración particular también será verdadera.

El símbolo generalmente utilizado para denotar implicación en matemáticas puras es $\Rightarrow$, hay una variedad de frases que trasmiten el mismo significado. Por ejemplo, $Q \Rightarrow P$, se lee si **P** es verdadera entonces es verdadero **SQ**, un estado de **Q**, que a menudo se lee como **P** implica a **Q**. El significado se hará preciso por medio de una tabla de verdad. Podemos ver esto sobre un número **n** entero.

Supongamos que **P(n)** es el estado $n > 3$, y **Q(n)** la declaración de estado $n > 0$. Donde **n** es un número entero. Entonces la declaración:
$P(n) \Rightarrow Q(n)$, Por ejemplo:

$n > 3 \Rightarrow n > 0$

Es la afirmación, sí un número **n** es mayor que 3, entonces es mayor que 0, que es ciertamente una declaración verdadera. Observe que esta declaración es verdadera para cada entero **n** a pesar de la declaración $n > 3$ es verdadera y falsa para **n** valores del estado $n < 0$. Es decir, considere las posibilidades:

	$P(n)$	$Q(n)$
$n < 0$	F	F
$n = 0$	F	F
$n = 1$	F	T
$n = 2$	F	T
$n = 3$	F	T
$n > 3$	F	T
	T	T

En el discurso cotidiano cuando decimos que **P** implica a **Q**, esto sugiere que el estado **P** causa que **Q** sea verdadera. La idea de **causalidad** es difícil de conceptualizar con precisión, por lo que se elimina del uso matemático, en su lugar, se usa la palabra **implica**. Esta diferencia de uso ordinario se clarifica en la lógica matemática donde una declaración de la forma $P \Rightarrow Q$, se conoce como una instrucción condicional en lugar de una implicación.

Otra forma de motivar el uso de la implicación, es considerar su forma negativa, la declaración que **P** no implica a **Q**, escrita como $P \not\Rightarrow Q$. Esto será cierto precisamente en la circunstancia cuando queremos decir que **P** no implica a **Q**. Note que esto significa que los estados $P \not\Rightarrow Q$ y $P \ \ not \Rightarrow Q$ son lógicamente equivalentes. Esta equivalencia se emplea en el discurso cotidiano. Por ejemplo, "No leer las notas del libro" o "no comprender las notas del libro", esto tiene el mismo significado que "si no lees las notas del libro, entonces no comprendes las notas del libro". Aquí, **P** es la declaración "si no lees las notas del libro" y **Q** "no comprender las notas del libro".

Implicaciones universales. En un sentido estricto las declaraciones:

$n > 3 \Rightarrow n > 0$
$n = 1 \Rightarrow (n-1)(n-2)$

Estos predicados dan diferentes proposiciones para cada valor de **n**. Sin embargo, utilizamos a menudo declaraciones de esta forma para significar que el predicado conlleva a una proposición verdadera para cualquiera que sea el valor asignado a la variable libre **n**; a esto se llama **estado universal**. El posible rango de valores para las variables libres se puede explicar en el texto con una frase como "para todo entero **n**" o "donde **n** es un entero". Por lo general es una buena práctica hacer el rango de valores explícito.

Una declaración de este tipo es falsa si no es un estado universal, en otras palabras, por lo menos hay un valor posible para que la variable falle. Considere la declaración para los números verdaderos **x**. Podemos construir una tabla de la verdad que a continuación se presenta.

	$x > 0$	$x \geq 1$	$x > 0 \Rightarrow x \geq 1$
$x \leq 0$	F	F	T
$0 < x < 1$	T	F	F
$x \geq 1$	T	T	T

Aquí, las entradas en la última columna están determinadas por las entradas en las anteriores dos columnas, usando la tabla de verdad de la implicación anterior. Vemos en esto que hay valores de **x** para **x>0** y $x \not\geq 1$, por ejemplo **x=1/2**, no es universalmente cierto para $x > 0 \Rightarrow x \geq 1$. Esto significa que, para números reales **x, x>0** no implica que $x \geq 1$, se puede escribir:

$x > 0 \not\Rightarrow x \geq 1$

Se trata de un **estado de existencia**: dice que hay un valor **x** para los cuales la hipótesis es verdadera, pero, es falsa la conclusión. Tenga en cuenta que empleamos letras del alfabeto como **n** para denotar enteros y letras del final de alfabeto como **x**, para expresar variables para entradas de números reales.

Consideremos la siguiente declaración acerca de un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales, como: x^2+3 o x^3-x^2-x

Para los números reales **a**, si $f(a)=0$ entonces **a** es positiva, es decir, **a>0**.

La negación de esto, es la afirmación de que la implicación es falsa para algún número real **a**, en otras palabras, $f(a)=0$ y $a \not> 0$ para algún número real **a**. Este es precisamente el estado que identificamos como negación.

Hay muchas maneras de leer a la implicación $P \Rightarrow Q$, que también puede escribirse como $P \Leftarrow Q$ y algunas de las más comunes se enumeran a continuación:

1. Si **P** entonces **Q**.
2. **P** implica **Q**.
3. **Q** si **P**.
4. **P** solo sí **Q**.
5. **Q** cada vez que **P**.
6. **Q** es necesaria para **P**.

Tenga cuidado con la tercera, la cuarta y también con las dos últimas, para ello es importante apreciar la diferencia entre $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. El estado $Q \Rightarrow P$ es llamado **converso** de un estado $P \Rightarrow Q$. Es el estado converso y conversos entre si, cuando ambas implicaciones se cumplen las escribimos $P \Leftrightarrow Q$ por lo tanto la definimos como:

$P \Leftrightarrow Q$ *significa* $P \Rightarrow Q$ *y* $Q \Rightarrow P$

Se pueden leer:

1. **P** es equivalente **Q**.
2. **P** es necesaria y suficiente para **Q**.
3. **P** es y solo es **Q**.
4. **P** precisamente cuando **Q**.

La verdad matemática

Es razonable preguntar cómo podemos empezar para establecer la verdad como estado de las proposiciones. Si se trata de axiomas, estas proposiciones son verdaderas por ser evidentes para nuestra especie, en caso contrario, las proposiciones son un tipo derivadas de axiomas, estas deben ser demostradas por otras vías proposicionales cerrando un círculo de coherencia. La verdad matemática, para todo objeto matemático estructurado en su más profundo origen es axiomática, es decir, se encuentra solo en el espacio matemático, es producto de una mente que realiza la demostración, no es producto de ningún consenso entre individuos. En el mundo de los objetos matemáticos también hay fisuras lógicas con las que hay que lidiar, tal como la división entre cero.

Demostración

Una demostración, es sobre una proposición matemática, es una argumentación coherente en cada paso lógico que establece la verdad de su declaración. Los pasos de la discusión lógica son proporcionados por implicaciones. Estudiar demostraciones para Usted, le proporcionará un pensamiento coherente, le entrenará para que pueda mirar por atrás de los objetos matemáticos las piezas de objetos que le permiten estructurar su forma final. Puede pensar usted a la demostración, como una forma de erigirse en la construcción de la verdad matemática. Sin embargo, la dificultad para el novel que se introduce por primera vez en la demostración, es real, dado que su razonamiento no está educado para el rigor lógico de las proposiciones matemáticas.

Cuando aplicamos técnicas matemáticas, por simplicidad, generalmente los libros de texto no conservan las piezas de demostración de los objetos matemáticos, con ello, el pensamiento de aplicación se debilita y se desordena, la alternativa es proporcionar suficiente información de los pasos que siguieron los maestros de las matemáticas que llegaron por vez primera a dichas demostraciones y otros, que las hicieron más elegantes o por caminos más eficaces. En muchas ocasiones, solo se le presentan al aprendiz las verdades que fueron demostradas en forma de **Teoremas**, de este modo se pretende reducir la complejidad de pasos y dirigir el aprendizaje a su aplicación y habilidad de resolver ejercicios matemáticos.

Algunos docentes argumentan, que se elimina la excesiva precisión de las demostraciones por hacer más fáciles de leer las verdades matemáticas a las que se ha llegado. Pero esto ocasiona que el estudiante no desarrolle la tolerancia que exigen las matemáticas en materia mental para lograr coherencia, esa que en extremo caracteriza al pensamiento matemático. Es decir, el estudiante frente al pensamiento matemático asume una actitud pedante dado que los "por qué" no son explícitos, y esto es enemigo de su aprendizaje[53].

El pensamiento matemático, para desarrollarse con éxito en el novel, es necesario dar por anticipado a cada demostración todos los ladrillos que permiten la construcción formal de las demostraciones de orden superior, las propias piezas que sostienen al objeto matemático superior, son una forma de reconstruir cada demostración matemática. Las demostraciones las hay por implicación directa; por pruebas de contradicción; por pruebas de casos o por pruebas reversibles.

5. Matemática elemental

En el libro intitulado "pensamiento matemático[54]", en él se discutieron las diferentes matemáticas que se consideran en el siglo XXI como elementales. Son enseñadas en la primaria, secundaria y bachillerato de la mayor parte del mundo, aunque no todas estas en cada grado escolar. Sin embargo, esto plantea la pregunta de ¿hasta dónde está la frontera de las matemáticas elementales? Por desgracia no está claro el límite entre la **matemática elemental y la universitaria** (avanzada). Las elementales más obvias las discutiremos en esta obra. Sin duda que en este espacio de pensamiento están objetos matemáticos y conceptos como el infinito, la abstracción, la demostración, geometría, álgebra arábiga, topología, cero, pi, número, operadores…

Algunos matemáticos consideran a las temáticas de matemáticas elementales al número, aritmética, geometría, álgebra, cálculo y algunos temas de probabilidad y estadística. Sin embargo, en muchos países desarrollados, para sus sociedades consideran además la matemática computacional y el álgebra lineal. Está claro que la matemática computacional tiene que ver en como la sociedad de hoy organiza sus comunicaciones, economía, educación y cultura; mientras el álgebra lineal por su enorme potencial para modelar lo complejo en forma relativamente más simple.

El problema de los numerales

La computación siempre ha sido parte de la técnica de las matemáticas, pero no se convierte en un concepto matemático elemental hasta el siglo XX. La definición más conocida de este concepto, la realizó en 1936 Turing, en función de los cálculos de cómputo utilizados en la aritmética elemental. Llevar a cabo los cómputos de la aritmética estimula al aprendiz a sistematizar pasos algorítmicos necesarios para emplear o aplicar la tecnología programable de nuestro tiempo.

Sí un problema puede ser resuelto por un ordenador y si el cómputo es factible para acelerar el aprendizaje del pensamiento matemático, se vuelve este tema más que relevante para el aprendizaje de las nuevas generaciones, en este mismo sentido Conrad Wolfram opina:

> "Conrad Wolfram (Oxford, 1970) piensa que tenemos un problema con las matemáticas. Nadie está contento: los estudiantes creen que es una asignatura difícil y sin interés, los maestros están frustrados con los resultados de sus alumnos y los gobiernos se dan cuenta de que son determinantes para la economía pero no saben cómo actualizar los programas académicos. Cada vez vivimos en un mundo más matemático y sin embargo, la educación está estancada, opina Wolfram, físico y matemático por la Universidad de Cambridge y fundador de Computer Based Math, una compañía centrada en rediseñar la asignatura de matemáticas"…"**Respuesta**. Los matemáticos me odiarán por decir esto, pero antes de los ordenadores las matemáticas no eran muy útiles para el día a día, en la vida en general. Para cualquier campo en el que se usen muchos datos, como la física, la biología o la salud, la computación ha elevado las matemáticas a un estadio nuevo. Los problemas reales del siglo XXI solo se pueden resolver usando los ordenadores y por eso deben entrar en el sistema educativo como parte fundamental de la asignatura de matemáticas. Tener a los niños en las aulas calculando a mano ecuaciones de segundo grado ya no tiene sentido; hay que enseñarles a interpretar los datos y a sacar utilidad de las matemáticas. Enseñarles el funcionamiento básico está bien, pero complicarlo hasta la extenuación es una estrategia errónea que les aleja para toda la vida. Suelo poner el ejemplo de la conducción; no hace falta entender el funcionamiento de los motores para manejar un vehículo[55]".

Agregar a la clase de matemáticas de las nuevas generaciones, procedimientos sistemáticos que toman gran cantidad de tiempo, intensifica la frustración en el caso de verificar soluciones y rápidamente descomponer en factores algebraicos una gran cantidad de procedimientos de problemas matemáticos. Sin embargo, el rol del pensamiento matemático se vuelve relevante cuando se asiste por ordenador el aprendizaje de las matemáticas, por favor, invierta un tiempo a conocer por ejemplo, el Wolfram Alpha (https://www.wolframalpha.com), poderosa herramienta de conocimiento computacional matemático.

Muchos datos interesantes de los números, se discuten en la sección "¿qué es un número", sin embargo, demostrar que son infinitos los números primos por ejemplo, no depende de los números decimales. Pero cuando se trata de cómputo incluso operaciones simples tales como la adición y la multiplicación, la notación para números para ingeniería y ciencia, o cambios de base numérica con exponenciales; este cambio hace necesario el conocimiento informático.

En base 1, un número es representado por **n** copias del dígito 1. Así el numeral en base 1 con longitud **n** dígitos, en esta notación simple de la aritmética, se vuelve geometría más que aritmética. Por ejemplo, decimos que si **m** es menor que **n**, está claro que es el caso:

$11111 < 111111111$

5<9 en notación base 10.

La suma es igual de fácil:

$11111 + 111111111 = 11111111111111$
$5 + 9 = 14$

Es trivial observar que la base 1, no es práctica para tratar con números grandes. Multiplicar **n** por **m**, aumenta la longitud del número resultante, por lo que uno rápidamente se queda sin espacio para escribir el resultado de multiplicaciones repetidas. Necesitamos una notación más compacta y esto lo logramos mediante el uso de dos o más dígitos.

Un numeral de base 10 como todos sabemos, es una cadena de dígitos elegidos entre el conjunto 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 y con un dígito más a la izquierda diferente de cero podemos extender la capacidad de contar hasta 10^n cadenas de números que podemos representar con n dígitos, cada uno de ellos representando un número diferente. Para las cadenas comenzamos con cero a la izquierda, solo que ignoramos por economía estos ceros en la primera cadena de un solo dígito. Así, la notación base 10 es más compacta con 10 símbolos, si además la expresamos en forma exponencial, la longitud 10^n se presenta en forma más compacta para números grandes. Pero hay un precio a pagar con notación compacta. En comparación con las sumas y multiplicaciones simples de la notación base 1, algunas operaciones son apenas factibles para nosotros sin asistencia de un ordenador. Si deseamos encontrar qué número es más pequeño para el caso siguiente, tenemos que buscar para el dígito más a la izquierda dónde se diferencian, y el número más pequeño es el que en la cifra es menor:

$5478123\underline{0}163846 \qquad 5478123\underline{1}163845$

$5478123\underline{0}163846 < 5478123\underline{1}163845$

Esta regla para ordenar numerales es llamada orden lexicográfico, ya que es como la regla para ordenar palabras de la misma longitud en un diccionario. Igual que uno necesita saber del orden alfabético para buscar palabras en las entradas de diccionario, lo que debemos saber es el orden de dígitos con el fin de comparar su peso de cada número en base 10.

El más simple alfabeto para escribir números compactos es el alfabeto binario o de base 2. Que consiste en dos símbolos, 0 y 1. Base 2 es digna de su estudio, no solo porque toda tecnología digital depende de ello, sino por su simpleza y compactación que nos ayuda a tomar conciencia del funcionamiento de la base 10, que la mayoría de nosotros ha olvidado por la lejanía de los estudios de educación primaria.

Un número de base 2, es decir, 101001 representa un número como la suma de las ponencias de los pesos de cada posición del numeral dígito, por ejemplo: donde los pesos son $2^0, 2^1, 2^3, 2^4, 2^5$, para cada posición.

Base-2 digit value	Place	→	Base-10 equivalent		Value
1	2^5	→	1×2^5		32
0	2^4	→	0×2^4	+	0
1	2^3	→	1×2^3	+	8
0	2^2	→	0×2^2	+	0
0	2^1	→	0×2^1	+	0
1	2^0	→	1×2^0	+	1
				=	41

Así que el número binario 101001 es en base 10 el 41.

Caso contrario, para pasar de base 10 a binaria un número, por ejemplo: 7901

Power	$Base^{Power}$	Place value
13	2^{13}	8192
12	2^{12}	4096
11	2^{11}	2048
10	2^{10}	1024
9	2^9	512
8	2^8	256
7	2^7	128
6	2^6	64
5	2^5	32
4	2^4	16
3	2^3	8
2	2^2	4
1	2^1	2
0	2^0	1

1111011011101_2

Podemos ver que para saber el numeral binario requerimos operaciones de multiplicación y exponenciación. Por lo tanto, necesitamos un conjunto más sofisticado de conceptos para encontrar “nombres” más convenientes para los números. No es de extrañar que la aritmética de números sea un tema profundo. De hecho, algunas de las preguntas más difíciles en teoría de números implican la representación decimal o binaria, por ejemplo, ¿Cuántos números primos hay cuyos dígitos binarios todos sean 1? No sabemos si esto es como intentar saber si hay infinitos números primos de la forma 2n + 1.

El problema de la adición de grandes números

Para comprender lo que sucede con la base 10 cuando añadimos números a cifras, considere por ejemplo, 7924 + 6803. Si ampliamos los números como sumas de potencias de 10 y los escribimos en coeficientes, entonces:

$$
\begin{aligned}
&= 7 \bullet 10^3 + 9 \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0 + 6 \bullet 10^3 + 8 \bullet 10^2 + 0 \bullet 10^1 + 3 \bullet 10^0 = \\
&= (7+6) \bullet 10^3 + (9+8) \bullet 10^2 + (2+0) \bullet 10^1 + (4+3) \bullet 10^0 = \\
&= 13 \bullet 10^3 + 17 \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 7 \bullet 10^0 =
\end{aligned}
$$

La última línea no se traduce inmediatamente en una base 10, porque los coeficientes no son menores a 10. Aquellos mayores de 10, como 13=10+3, crean un desbordamiento de potencias mayores de 10, que deben ser acarreados a la izquierda y agregados a los coeficientes ya presentes. En este caso, obtenemos una potencia extra a la de 10^3, es decir, 10^4. Porque:

$$
\begin{aligned}
&= 13 \bullet 10^3 + 17 \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 7 \bullet 10^0 = \\
&= (10+3) \bullet 10^3 + (10+7) \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 7 \bullet 10^0 = \\
&= (10+3+1) \bullet 10^3 + (7) \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 7 \bullet 10^0 = \\
&= 1 \bullet 10^4 + 4 \bullet 10^3 + (7) \bullet 10^2 + 2 \bullet 10^1 + 7 \bullet 10^0
\end{aligned}
$$

= 14,727

El acarreo de números comenzó con el ábaco chino. Este método permite emplear máquinas para procesar este tipo de operaciones. Esto es muy deseable para cuando el tiempo y la eficiencia computacional requerida es más corto que el que al cerebro humano le toma en hacerlo.

El problema de la multiplicación de grandes números

La dificultad de la multiplicación, por un lado, es el no verla como resultado de una matriz de dos dimensiones cuyos cuadrados son de tamaño unidad, y por otro, el análisis de multiplicar números grandes. El primer caso escapa al nivel de este texto, pero se enseña a nivel de educación primaria. El segundo plantea problemas como el de multiplicar los números 44227 y 935. Que hace implícito trabajar los dígitos individuales de 935 por 44227.

Tradicionalmente:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 4 & 4 & 2 & 2 & 7 \\
\times & & & 9 & 3 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 3} & \\
 & & 4 & 4 & 2 & 2 & 7 \\
\times & & & & 9 & 3 & 5 \\
\hline
 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 2} & \\
 & & 4 & 4 & 2 & 2 & 7 \\
\times & & & & 9 & 3 & 5 \\
\hline
 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\
1 & 3 & 2 & 6 & 8 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 6} & \\
 & & & 4 & 4 & 2 & 2 & 7 \\
\times & & & & & 9 & 3 & 5 \\
\hline
 & & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\
 & 1 & 3 & 2 & 6 & 8 & 1 & 0 \\
3 & 9 & 8 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
44227 \\
\times \qquad 935 \\
\hline
221135 \\
1326810 \\
+\ 39804300 \\
\hline
41352245
\end{array}
$$

44227x9=398043

44227x3=132681

44227x5=221135

De esto concluimos que por la posición del numeral:

4227x900=39804300

4227x30 =1326810

4227x5.   =221135

De la que obtenemos 4227x935 mediante la suma de los tres numerales:

$$
\begin{array}{r}
44227 \\
\times \qquad 935 \\
\hline
221135 \\
1326810 \\
+\ 39804300 \\
\hline
41352245
\end{array}
$$

El número de dígitos en la tabla es una medida de la razonable dificultad y tiempo necesario para el cómputo, ya que el tiempo razonable se obtiene para cada dígito como una constante. Las constantes reflejan la cantidad máxima de aritmética mental necesaria para cada dígito que multiplicamos y el número de sumas para el resultado final.

Muchos lectores no saben lo que es un teorema y que es fácil de solucionar: un teorema es una declaración matemática verdadera, a menudo uno que expresa algo verdadero sobre cada caso de cierto tipo. Por ejemplo:

Teorema: Un número es divisible por 9, sí y solo sí la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Por ahora no examinaremos el teorema, solo pretendemos que no sea aquí un concepto esotérico que nadie entiende. Algunos teoremas son fáciles de comprender y otros son difíciles de ver su verdad que expresan. El de Pitágoras es de los sencillos y el de Fermat de los difíciles. Para la multiplicación, es relevante la relación bidimensional de una matriz que proporciona la idea de cómo funciona. El trabajo de memoria con ayuda de la matriz es más reducido para el cálculo y ver a la multiplicación como unidades derivadas de un cuadrado LxL, con L=1.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Así, el pensamiento matemático no es memorizar información fáctica, es preferible reconstruirlo usando las relaciones generales o teoremas. La matriz puede tratarse como genérica en el sentido que 3 y 7, tendrán una misma propiedad que otros pares de números.

La división

Cuando **a** y **b** son enteros positivos, **a** no es usualmente divisible por **b**, así que la operación de la división en general expresa un resto. Es decir, para a y b deseamos encontrar el cociente $q \geq 0$ y el resto $r \geq 0$ tal que:

$$a = qb + r$$

Con $r < b$

Si dividimos 34781 entre 26. La idea es analizar las cifras de 34781 de izquierda a derecha, en cada paso de división por 26 a su vez. Cada coeficiente es un número dígito, por lo que no es realmente necesario saber dividir por 26 -solo ahora multiplicar 26 por cada número de una cifra . Aquí están los cinco pasos en el cálculo de este ejemplo:

Divide 3 por 26	obtiene cociente 0 y resto 3,
Entonces divide 34 por 26	obtiene cociente 1 y resto 8,
Entonces divide 87 por 26	obtiene cociente 3 y resto 9,
Entonces divide 98 por 26	obtiene cociente 3 y resto 20;
Entonces divide 201 por 26	obtiene cociente 7 y resto 19.

El cociente de 34781 por 26 es entonces la secuencia de cifras del cociente, 1337 y el resto es 19. Uno puede ver cómo funciona la interpretación de las cifras 34781, como número de unidades, decenas, centenas y así sucesivamente. Por ejemplo, 34 supera los miles, por lo que el cociente de 26 es 1 mil con resto 8 mil. Colocar este resto a la cifra siguiente, 7, que significa cientos, 87 cientos. Así que su cociente de 26 es 3 cientos con 9 cientos de resto y así sucesivamente.

En general, si utilizamos el método de dividir un número **a** de **m** dígitos por un número **b** de **n** dígitos hay **m** pasos necesarios, cada uno de los cuales, el número de dígitos del número **b** multiplicado por un dígito y restado de un número obtenido previamente con el fin de obtener un resto **<b**. Puesto que solo hay 10 dígitos posibles a ser juzgados, el tiempo de cada m paso está delimitado por un múltiplo constante de **mn**, como se afirma.

Exponenciación

El caso más sencillo es elevar 10 a la potencia N, da un 1 seguido de N ceros. Por ejemplo, la base numeral 10 para $10^{1000000}$ es un 1 seguido de un millón de ceros. Así, solo se escribe el numeral 11 base para M^N como exponencial de los números M y N. La situación es similar con números de base 2. Así, el hecho de que números de base 10 pueden representar completamente a números muy grandes tiene un inconveniente, la exponenciación de números muy cortos resulta en números muy largos. Así que no es factible la exponenciación para calcular la adición y la multiplicación. Independiente de cómo computamos M^N, el tiempo para escribir el resultado generalmente impide completar el cómputo.

Máquinas de Turing

Como hemos visto, se han utilizado varios tipos de computación aritmética durante miles de años. Sin embargo, la necesidad de un concepto general de cálculo no se consideró hasta principios del siglo XX. Se presentó de otra forma de cómputo: lógica simbólica. La idea de lógica simbólica, era el sueño de Leibniz en el siglo XVII, consiste en hacer del razonamiento una forma de cálculo. Entonces, para resolver un problema simplemente diríamos "vamos a calcular". Como él idealizo, el sueño no se realizó aún parcialmente hasta el siglo XIX, y sigue siendo un problema hoy en día, por razones tales como el misterio de P y NP. Sin embargo, encontramos el significado de la lógica simbólica y su cálculo.

Un problema **P** se dice que tiene solución en el tiempo de cálculo, es en relación al número de símbolos que contiene. Cuando un problema cuyas respuestas son difíciles de encontrar, sin embargo, fáciles de verificar, están por todas partes, su tiempo es no determinista (**NP**).

El punto principal a entender es como reducir todas las formas concebidas de razonamiento al cálculo. Los primeros en captar este punto, tuvieron aparición en 1921. Propusieron una definición de computación: generalización de los sistemas de lógica simbólica. Sin embargo, Turing llegó a su concepto de máquina mediante el análisis de cómo lo calcula un ser humano. Como mínimo, el cómputo humano requiere una cantidad limitada de entradas mentales para guiar el lápiz, y un papel. El papel fue una cinta dividida en cuadritos, cada uno de los cuales puede llevar un solo símbolo. El lápiz también llamado cabeza lectura/escritura, es un dispositivo que puede reconocer y escribir un número finito de símbolos $\square, S_1, S_{2,} \ldots S_n$, donde $\square$ denotan el vacío gráfico. Por último, la máquina tiene un número finito de estados internos $q_{1,} q_2, \ldots, q_n$ que corresponden a los estados mentales necesarios para el cómputo dado. Como hemos visto, los cómputos pueden realizarse utilizando solo un número finito de estados mentales y Turing sostuvo que ningún cálculo podría requerir infinitamente muchos estados mentales, algunos de ellos serían tan similares que serían confundidos. Por lo mismo, un cálculo no implica infinitamente muchos símbolos diferentes.

> ...una ilimitada capacidad de memoria obtenida en la forma de una cinta infinita marcada con cuadrados, en cada uno de los cuales podría imprimirse un símbolo. En cualquier momento hay un símbolo en la máquina; llamado el símbolo leído. La máquina puede alterar el símbolo leído y su comportamiento está en parte determinado por ese símbolo, pero los símbolos en otros lugares de la cinta no afectan el comportamiento de la máquina. Sin embargo, la cinta se puede mover hacia adelante y hacia atrás a través de la máquina, siendo esto una de las operaciones elementales de la máquina. Por lo tanto, cualquier símbolo en la cinta puede tener finalmente una oportunidad[56].

Por esta razón, una máquina de Turing tiene finitos q_i y S_j. ¿Cómo funciona la máquina? Realiza una serie de pasos, en cada paso la cabeza de lectura/ escritura se observa el símbolo S_j actualmente a la vista y dependiendo de su q_i estado interno actual, sustituye a S_j por un símbolo S_k, por lo que, se mueve un cuadro a la izquierda o la derecha y entra en un estado q_l. Así, una máquina M es especificada por una tabla de quíntuples, instando la acción a ser realizada por determinados pares de q_i, S_j.

Ejemplo[57]:

Definimos una máquina de Turing sobre el alfabeto $\{0, 1\}$, donde 0 representa el símbolo blanco. La máquina comenzará su proceso situada sobre un símbolo "1" de una serie. La máquina de Turing copiará el número de símbolos "1" que encuentre hasta el primer blanco detrás de dicho símbolo blanco. Es decir, posiciona el cabezal sobre el 1 situado en el extremo izquierdo, doblará el número de símbolos 1, con un 0 en medio. Así, si tenemos la entrada "111" devolverá "1110111", con "1111" devolverá "111101111", y sucesivamente.

El conjunto de estados es $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ y el estado inicial es s_1. La tabla que describe la función de transición es la siguiente:

Estado	Símbolo leído	Símbolo escrito	Mov.	Estado sig.
s_1	1	0	R	s_2
s_2	1	1	R	s_2
s_2	0	0	R	s_3
s_3	0	1	L	s_4
s_3	1	1	R	s_3
s_4	1	1	L	s_4
s_4	0	0	L	s_5
s_5	1	1	L	s_5
s_5	0	1	R	s_1

El funcionamiento de una computación de esta máquina puede mostrarse con el siguiente ejemplo (en negrita se resalta la posición de la cabeza lectora/escritora):

Paso	Estado	Cinta
1	s_1	**1**1
2	s_2	0**1**
3	s_2	01**0**
4	s_3	010**0**
5	s_4	01**0**1
6	s_5	0**1**01
7	s_5	**0**101
8	s_1	1**1**01
9	s_2	10**0**1
10	s_3	100**1**
11	s_3	1001**0**
12	s_4	100**1**1
13	s_4	10**0**11
14	s_5	1**0**011
15	s_1	11**0**11
Parada		

La máquina realiza su proceso por medio de un bucle, en el estado inicial s_1, reemplaza el primer 1 con un 0, y pasa al estado s_2, con el que avanza hacia la derecha, saltando los símbolos 1 hasta un 0 (que debe existir), cuando lo encuentra pasa al estado s_3, con este estado avanza saltando los 1 hasta encontrar otro 0 (la primera vez no habrá ningún 1). Una vez en el extremo derecho, añade un 1. Después comienza el proceso de retorno; con s_4 vuelve a la izquierda saltando los 1, cuando encuentra un 0 (en el medio de la secuencia), pasa a s_5 que continúa a la izquierda saltando los 1 hasta el 0 que se escribió al principio. Se reemplaza de nuevo este 0 por 1, y pasa al símbolo siguiente, si es un 1, se pasa a otra iteración del bucle, pasando al estado s1 de nuevo. Si es un símbolo 0, será el símbolo central, con lo que la máquina se detiene al haber finalizado el cómputo.

Diseñar una máquina de Turing para realizar un determinado cálculo, aunque tedioso, es básicamente una cuestión de pensamiento de cómo hacer si se ve solamente un símbolo a la vez. Con algo de práctica, uno se convence de que cualquier cálculo es posible, por lo que, es intuitivamente plausible que máquinas de Turing puedan calcular cualquier cosa que sea computable. Se ha comprobado que todos los modelos propuestos de cómputo pueden ser simulados por maquinas Turing.

La **Tesis de Church-Turing** establece que cualquier **función** que sea procesada por un cierto algoritmo es una función computable; son exactamente las funciones que pueden ser calculadas con una máquina. **Algoritmo**, muchos autores, lo refieren como listas de instrucciones para resolver un cálculo o un problema abstracto, es decir, son un número finito de pasos que convierten los datos de un problema (entrada) en una solución (salida[58]). Todo algoritmo es equivalente a una máquina de Turing.

Definiendo el concepto de máquina informática, se reconoce la existencia de un algoritmo, como un **P** problema solucionable. Así, una máquina de Turing es esencialmente un programa, escrito en un lenguaje de programación. Esto es claro en la formulación de Post en 1936, que mejora la comprensión, al llamar números de instrucciones al conjunto, en vez de estados internos como lo refirió Turing.

El descubrimiento de la notación compacta para los números y los métodos para calcular sus sumas y productos, se remontan a miles de años. En Europa y el lejano Oriente fueron inicialmente implementados en el ábaco. El cálculo escrito se convirtió en práctica después de la invención de un símbolo para el cero en la India alrededor siglo quinto A.C., notación posicional para extender los números que fue adoptada por el mundo árabe (números arábigos) y luego en Europa con los moros en España. Pero fue con los Mayas y su indeterminación de cantidad $\frac{1}{\infty}$ que se define al cero como número y no solo como auxiliar en un sistema numérico. Así, el cómputo fue sinónimo de ábaco. Pero realmente el cálculo simbólico avanzó con el álgebra del siglo XVI.

Newton, Euler y Gauss dieron forma al cálculo numérico y simbólico. Tan pronto como Leibniz previó la posibilidad de un razonador de cálculo, un lenguaje simbólico para el razonamiento se hizo una tarea en el horizonte del cómputo. El primer paso concreto hacia este sueño fue realizado por Boole en 1847, que creó un simbolismo algebraico por lo que ahora llamamos **lógica proposicional**. Boole manejó suma (+), multiplicación (·) y los operadores "o", y "y", 0 y 1 para falso y verdadero. Entonces su suma (+) y multiplicación (·) satisficieron leyes similares a las de la aritmética ordinaria, y uno puede decir si ciertos tipos de declaraciones son verdaderas por cálculo algebraico. De hecho, si **p+q** se toma para significar " p o q pero no ambos", entonces las reglas algebraicas de la lógica proposicional se convierten exactamente en las del **mod 2** aritmético. La lógica proposicional de Boole reduce la lógica básica del cálculo inspirado por Frege en 1870, Peano 1895 y Russell 1910 para desarrollar sistemas simbólicos completos para las matemáticas. El objetivo de estos sistemas formales, era evitar errores inconscientes por sesgos cognitivos. Se pueden seguir los pasos de una prueba formal sin saber el significado de los símbolos por lo que, en principio, una prueba formal puede comprobarse por una máquina. De hecho, las demostraciones formales pueden en principio ser generadas por una máquina, mediante la combinación que generan todas las posibles cadenas de símbolos con que se prueba sin una cadena dada es valida.

En el momento cuando se desarrollan los primeros sistemas formales, tales máquinas no habían sido construidas, así la compatibilidad fue imaginada como un concepto matemático. Pero la idea despertó poco a poco que los sistemas formales incluyendo todos los procesos de cómputo posibles, podrían ser manipulados como símbolos más generales concebibles en sistemas formales que lograron simplificar la lógica al punto mecánico de establecer verdad o falsedad como Leibniz había imaginado. Cualquier problema inservible NP, implica una cantidad infinita de incompletitud. Gödel fue capaz de demostrar la incompletitud de los sistemas formales en matemáticas, es decir, cualquier sistema en su aritmetización del cálculo simbólico o lógico, puede ser simulado por números, en última instancia, definibles en términos de operaciones suma

(+) y multiplicación (·), en cierto sentido todos los cálculos son ábacos o cómputos suma (+) y multiplicación (·) inherentes a la solución.

En resumen, el cómputo es ahora uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas. El concepto de máquina de Turing es el modelo más sencillo y más convincente de la informática. El concepto es muy simple, no es mucho más complicado que los algoritmos para la suma y la multiplicación de números decimales. A pesar de su sencillez, solo hasta hace 15 años aproximadamente los países desarrollados introdujeron este conocimiento en los niños de entre 8 y 13 años, como base de su formación aritmética y soporte para desarrollar el edificio mental de la lógica matemática y ampliar su rol conceptual con la computación moderna presente en telefónica celular, autos y ordenadores de todo propósito.

Durante miles de años los matemáticos han hecho cálculos, así que siempre ha habido un concepto de computación aunque algo vago en sus inicios. Esto comenzó con la formalización de Euclides del concepto de “geometría” en “Elements”, y la recolección de pasos alrededor de 1900 cuando Peano (1889) formalizó la aritmética con axiomas para los números naturales y Zermelo (1908) formalizó la teoría de conjuntos con una base axiomática para ellos. Pero esta formalización recibió un duro revés por Gödel (1931), demostrando que todo sistema de axiomas de la teoría de números y de conjuntos es incompleto, probando que la formalización de la aritmética no es posible, después de todo Gödel creía que su argumento mostraría que el concepto de compatibilidad no puede ser formalizado. Era incorrecto verlo como máquina de Turing. Pero más tarde reconoció su error en un libro de 1946, dijo “es una especie de milagro”, sí es posible formalizar la computabilidad. Así, computabilidad es realmente un concepto más preciso y absoluto que el concepto de la aritmética. Esto es un descubrimiento que abre la puerta a crear la inteligencia artificial.

6. El cálculo

Después de descubrir el número y desarrollar los sistemas numéricos, surgió una curiosidad de la civilización ¿cómo podía emplear la idea de número como estilo de pensar al mundo como algo numerable? Richard Feynman refirió a esta pregunta, del fondo de la respuesta a esta así nació el cálculo, como un truco para revelar el diseño de Dios de esta realidad. Tal vez, el diseño del universo alberga vida inteligente con la capacidad de observar su propia base axiomática que le permite poseer conciencia de sí. En cualquier caso, es un misterio que la naturaleza obedezca a los axiomas de nuestra razón, que además expresa su predictibilidad con cálculos de lenguaje artificial (matemático).

Las ecuaciones diferenciales que son estructuradas con derivadas, integrales, funciones, infinitos, ceros, límites, espacios geométricos…, son infinitamente muy próximas a la coherencia con la realidad. Esta idea parte que algo así, es como revelar el diseño del arquitecto del orden de este universo. Donde las ecuaciones fundamentales son el sistema operativo donde corren otras arquitecturas matemáticas de la realidad, donde estas últimas son subyacentes al sistema operativo. Calcular es aprovechar esta propiedad que el orden matemático de la naturaleza expresa.

Las ecuaciones de Newton son un conjunto pequeño de ecuaciones diferenciales con simetrías en su contenido, con ellas la gravedad y el movimiento en la tierra y el mismo universo quedó conectado como un patrón en el que se postula que todas estas matemáticas son válidas en cada uno de los lugares espacio-temporal de nuestra realidad. El cálculo se nos reveló como un lenguaje que fusiona las nociones de número, espacio geométrico, probabilidad, categorización y lógica como un poder de predicción. Lo hemos usado en el mundo ahora mismo para crear lo no dado en este universo, elementos químicos, anticuerpos, fármacos, música y toda clase de lo sintético. La habilidad de calcular se educa en los más jóvenes para que desarrollen el pensamiento profundo exigido por los secretos revelados de un Big Bang matemático.

¿Qué es el cálculo? Quizá es un habla del **conocedor predictor**, de la más avanzada experiencia matemática, entendido como el arte de modelar. La búsqueda de la existencia resulta la estimulación perfecta para el desarrollo del cálculo. El infinito como accesible espacio para realizar cálculos en sus fronteras, nos animó a grandes ideas en la aventura del cálculo. Si todo lo real en su diseño es un orden matemático, cómo podremos saber las ecuaciones de diseño.

Por favor si tienes miedo al infinito, esta lectura no es para ti

El infinito captura la fascinación de la humanidad por alcanzar a conocer, capturando con su imaginación algo tan monstruoso en su tamaño. El infinito es una cuenta numérica que parece imposible, un sueño de lo que el tiempo y el espacio pudieran ser. El infinito es una biblioteca con libros por escribir que resultan inesperados para dioses humanos jugando a fracturar lo imposible. El infinito es una secuencia de programación en un ciclo interminable de posibilidad eterna. Pero nuestra existencia es finita, nuestra capacidad neuronal es finita, nuestro mundo es finito, pero quizá habitemos una realidad circular en sus líneas de tiempo. Pero, un juego de trompos todavía ocurre en esa calle empedrada de mi pueblo en 1976 y ese sueño con nuestra primera musa en la escuela secundaria, significa que el flujo de la historia persigue pasos circulares para siempre y cada uno de esos eventos es infinito.

El fractal, pequeños programas que regresan sobre sí mismos, como autorreferencia de lo infinito. Son formas construidas a partir de una huella geométrica heredable a partir de copias de sí mismo, por lo que acercarse a ellos es descubrir como las plantas y los animales construyen sus detalles geométricos a partir de indefinidas divisiones de copias geométricas. Lo que significa, que un árbol es un fractal, lo que podemos reconocer como un programa de ciclo infinito en su huella geométrica. Nuestro ojo puede ver esto.

Cuando colocas una cámara frente a un espejo, descubres una imagen dentro de otra imagen igual y así sucesivamente hasta que el sistema colapsa ante la imposibilidad de alcanzar el infinito al que tiende. Estos fractales parecen estar también presentes en las grandes obras literarias[59]. Las posibilidades del lenguaje natural y artificial son infinitas. El arte, el conocimiento científico, la combinación de nuevas emociones, los genotipos, la música, la poesía…, son infinitas posibilidades creativas.

> Visualizamos al infinito de lazos y autorreferencia de todas las posibilidades sociales de nuestro enjambre humano, como las historias morales posibles para nuestra existencia. Los niños preguntan si un infinito dentro de otro infinito no solo es algo extraño, sino nuestra propia condición natural. Me gustaría mirar cuando dos rectas paralelas se unen en el infinito, me gustaría entender cómo seres finitos están condenados a habitar universos infinitos como una forma de realización cultural.

El infinito parece ser para siempre, división de la materia que tiende a la frontera de la nada, que en nuestro mundo moderno de violencia y virtud extrema parece proclamar para la vida humana: humildad y rebeldía. Un compañero nos dijo que algunas cosas indeseables son infinitas, tal como que el poder infinito corrompe al hombre, así que las formas déspotas y autoritarias de lo irracional siempre estarán para recordarnos que la razón por siempre estará en franco peligro de extinguirse. Nuestro campo como profesores escritores, tiene la forma en que poseemos al discurso literario del texto académico, como infinitas innovaciones discursivas para persuadir, seducir y lograr progreso ético en mentes de jóvenes que para serlo, tienen que ser rebeldes ante los intentos del fin de la historia de las ideas.

Escribir provoca paradojas, de que una gramática finita, reglas ortográficas, puntuado y un alfabeto finito permitan crear al mismo tiempo infinitas expresiones poéticas, científicas y de mundos posibles en el arte. No hacer frente a las pruebas de rigurosidad lógica del infinito, provoca en la mente de los más jóvenes, de acuerdo con nuestra experiencia como profesor universitario, que su imaginación se reduzca hasta el absurdo de no concebir lados en un objeto matemático tal como un polígono regular de **n** número de lados, llamado círculo. No hacer frente a este desafío de la imaginación, instala a los estudiantes en el vertido del cálculo, en la frontera de los infinitos en el terror de sus existencias finitas.

Uno de los papeles de la intuición matemática es explicar cómo nuestra existencia finita está condenada a desarrollarse en un escenario infinito. Sí, una idea similar permite entender que no hay nada más natural en este mundo que el infinito y que este está en todas partes donde miramos en la realidad.

El infinito es una idea escurridiza para pensar y precisar. Lo infinito es un ciclo para siempre. Lo infinito es más grande que lo finito. Si sumamos uno al infinito el resultado es infinito. Si agregamos un infinito al infinito sigue siendo igual de infinito. Pero quizás existen infinitos más grandes que otros. Si dividimos una pieza de materia entre infinito, quizá allí está un puerto para alcanzar la absoluta nada. Estas ideas los niños las encuentran fascinantes, pero son los profesores de su educación básica los que por grave error los obligan a no pensar en ellas, dado que en sus mentes hay miedo al abordar esta empresa de conocimiento matemático.

Cuando el niño realiza una cuenta de uno en uno, no importa lo que muchos digan, siempre podríamos agregar un uno más y obtener una nueva frontera para el infinito, esta idea de que no hay número más grande que infinito es la esencia del cálculo avanzado. Aproximaciones infinitas al cero, ángulos infinitos, áreas infinitas, divisiones del volumen infinitas, arcos de curvas infinitamente pequeños, es cuando la idea de infinito emerge como la pieza del cálculo algebraico exacto. En una película de juguetes animados los niños descubren la frase "al infinito y más allá", es una expresión desafiante y a la vez, una invitación intelectual a reconocer lo abstracto de nuestra realidad física y biológica en sus posibilidades infinitas en la genética, en la arquitectura de elementos químicos, de anticuerpos sintéticos…; una vez que estos niños piensan en el infinito, el pensamiento matemático surge como experiencia emocional fascinante y es nuestra obligación pedagógica no permitir que algunos docentes limiten su potencial intelectual, de ello dependerá que al ser adultos cuajen como artistas, músicos, matemáticos, científicos, escritores de poesía o ingenieros, así que este humilde texto pretende una empresa humanista de promover el pensamiento matemático como expresión de dignidad humana, de la más alta justicia social posible.

La empresa pedagógica de promover el pensamiento matemático, desde la misma frontera conceptual del finito en la probabilidad, la lógica, el número, en la geometría, la categorización, es solo el mejor pretexto para ir al infinito y más allá; rogamos y hacemos votos porque la educación en nuestra comunidad haga enormes esfuerzos por cultivar el pensamiento matemático como estrategia medular del desarrollo de la razón, como medio para la justicia social más plena posible, esa que reduzca la violencia en México. En línea con la evidencia científica que Steven Pinker apunta como la mejor forma del declive de los índices de la violencia[60].

Octavio Paz definió en el "Arco y la lira[61]" la relación del infinito en la poesía como posibilidad creativa, colocó en un extremo del espacio del conocimiento a las proposiciones matemáticas y en el otro a la metáfora, y fuera de este la infinita posibilidad creativa representada como un límite expansible sobre la nada. Lo infinito, lo finito y la nada es el sistema donde el creativo desarrolla su mayor expresión de dignidad humana. Desde esta perspectiva la creatividad es todo lo que no la esclavice, la censure y la violente con sus brazos corruptos, de lo contrario no puede ser llamada educación. Esta conclusión apoyada en Octavio Paz, nos anima a promover el proyecto del pensamiento matemático y, como dice Christopher Daniels, es un aspecto de lo más importante en el aprendizaje innovador desde Aristóteles. Aprendemos preguntando paso a paso ¿por qué?, esto es más importante que aprender hechos y técnicas, en matemáticas siempre hay estimulantes y fascinantes preguntas por contestar, y en ellas hay un proyecto de vida de lo más emocionante y fascinante para nuestra juventud[62].

¿Por qué importa el infinito para valorar el cálculo?

Es sin duda un camino a la abstracción. Este camino tiene el sentido de descubrir acerca de algo con lo que convivimos intensamente. Quisiéramos subir alto la vista para obtener una perspectiva sobre las extrañas cosas que se pueden reconocer entre el infinito y la facultad intelectual de realizar cálculos. Seguro hay alegría para este esfuerzo mental y la emoción que conspira a lo mejor del pensamiento abstracto. Las matemáticas deberían ser un viaje con la intensidad de lo imaginado al modo cuando tomamos un libro de Julio Verne.

El infinito es un tipo de número de gran tamaño, algo abstracto para medir el tiempo, el espacio, y cualquier otra cosa infinita. Partimos que tratamos al infinito como pensado como un número. Si agregamos 1 a un infinito, esto es como resultado infinito. Pero esto considera por error al infinito como un número ordinario.

Los matemáticos usan a la lógica para comprender cosas como el infinito y esto nos lleva a extraños lugares conceptuales a los que no pretendimos ir. Los matemáticos juegan con ideas para delimitar lo que son los objetos matemáticos justo antes de definir su maravillosa esencia.

Una de las cosas que es tentadora sobre el infinito es que están fácil toparse con ideas extrañas como el *Hotel de Hilbert*, con un número infinito de habitaciones, el cual se comporta muy distinto a uno normal. Sabemos que no podemos manipular el infinito en ecuaciones, como lo hacemos con números naturales. Parece que el infinito no puede ser un número natural. Pero qué significa esto:

Si agregamos uno al infinito es infinito. Esto es:

$$\infty + 1 = \infty$$

Si tratamos esta ecuación como con los números naturales y restamos de ambos lados infinito:

$$1 = 0$$

Evidentemente este resultado es contradictorio. Pero si sumamos infinitos:

$$\infty + \infty = \infty$$

Resulta que:

$$2\infty = \infty$$
$$2 = 1$$

Resulta igual de contradictorio. Pero en la multiplicación pasa lo mismo:

$$\infty \times \infty = \infty$$

Si dividimos ambos lados entre infinito:

$$\infty = 1$$

El problema es que manipulamos al infinito como si fuera un número natural sin saber si lo es. Parece que podemos concluir que el infinito no es un número natural. Pero los números parecen ser los cimientos de las matemáticas, cómo es posible que el infinito no sea un número natural, sería mejor pensar qué son los números antes de afirmar esto. Parece que hemos durante mucho tiempo usado números sin saber qué son. Es como en la física usar la masa como algo que no sabemos qué es en su más profunda realidad. El punto es este. Los números enteros negativos y fraccionarios son tan malos unos como otros para definir el infinito, la cosa cambia cuando empleamos a los irracionales, allí las cosas se ponen aún más difíciles pero también más interesantes. Este desbloqueo en el pensamiento matemático es el que condujo al desarrollo del cálculo que a su vez, llevó a grandes saltos hacia adelante en la precisión y la comprensión de la ciencia y la ingeniería en estos dos últimos siglos. Pero para entender estos números irracionales tenemos que regresar a los principios axiomáticos y desde allí resolver este misterio.

Se preguntará, porque no simplemente declarar al infinito como un número incontable. Para entender esto, tenemos que comprender cómo funciona la matemática. Esto podría sentirse como ir al diccionario y buscar una definición a la palabra "infinito". Para entender al infinito debemos antes comprender a los números y esto nos lleva a los cimientos de las matemáticas. Al parecer las matemáticas solo pueden estudiar cosas que siguen las reglas de la lógica. Cuando decimos que algo es un objeto matemático, podemos decirlo que pertenece a una lista de elementos coherentes con la lógica. Para ello, debemos mostrar sus propiedades de manera que nos permitan mirar racionalmente al objeto. Entonces, el desafío es construir una lista, que para nada está terminada y que por mucho está agotando el conocimiento de estos objetos matemáticos. Para saber si el infinito es un número, debemos probar que se comporta como un número.

Las matemáticas parecen ser un proceso del que nunca se consigue llegar a ningún lugar que se quiere. Porque cada vez que nos aproximamos se nos revelan otras cosas que no sabemos. Definitivamente, a través de los números naturales no llegamos al infinito. Podemos darnos cuenta que con cada nuevo tipo de número que se construye, se forma con uno previo que ya se conocía. Así, en el edificio de la matemática se construyen nuevos objetos matemáticos siempre de cosas anteriores. Construir de esta manera tiene la ventaja además de ahorrar capacidad intelectual, nos ayuda a ver las relaciones entre los diferentes conceptos y cómo encajan para hacer a la matemática algo coherente. Si damos a los símbolos matemáticos conceptos abstractos, esto nos ayuda a la manipulación simbólica.

Regresando a nuestra búsqueda del infinito, podemos emplear a los números enteros, que resultan ser más útiles que los naturales. Lo primero que cambia es que integramos al cero, un número que es neutral bajo la suma y la resta. En matemáticas decimos que cada número tiene un inverso aditivo, un número por el cual deshace el número original, es decir, esto nos lleva de nuevo a cero. 1-1 o 2-2. Pero esto nos conduce al infinito sin aportar nada nuevo.

Para los números fraccionarios **a/b** las cosas son más prometedoras, por ejemplo, desde nuestra educación primaria nos dijeron que no está definida la división entre cero. Pero quizá al dividir la unidad entre cero es una manera de llegar al infinito.

$$\frac{1}{0} = \infty$$

Es como decir que vamos a repartir un pastel entre cero personas. Esto no es lógico, no parece sensato. Sin duda la división es la más compleja de las operaciones básicas. Podríamos pensar que cada número tiene un inverso multiplicativo. Pero cómo sería el inverso del cero. No podemos definir al infinito como:

$$\frac{1}{0} = \infty \quad ,$$

porque no hay manera de dividir infinito entre cero, porque simplemente no podemos interpretar esto. Pero nos da conocimiento de que fraccionarios permiten construir a los enteros.

Un número irracional es un número que no puede describirse como una relación de enteros **a/b**. La construcción de estos números resulta complicada, pero la idea de que son necesarios para llenar los huecos entre la recta numérica de racionales, es un hecho que esta recta real se forma de racionales y enteros. Lo contradictorio es que hay más números irracionales que racionales. Esta es otra cosa misteriosa que sucede cuando pensamos en el infinito. La unión entre números racionales e irracionales en la recta real no resuelve **1=0** al tratar de definir al infinito como un real.

Quizá ya se ha dado cuenta que esta búsqueda de infinito parece inútil ¿Qué tipo de número podría ser infinito? Hasta ahora cada tipo de número lo hemos definido como algo que se permite restar, rellenar huecos como bloques de construcción. Necesitamos cambiar nuestra perspectiva sobre los números y encontrar que son los infinitos. Hemos intentado contar hasta infinito y no funcionó. Pero aquí hay una sorpresa, cuando los niños aprenden a contar no lo hacen añadiendo uno repetidamente, lo hacen contando con sus dedos al modo de conjuntos que se suman. Contar con los dedos es muy profundo y esto podría llevarnos hasta infinito, aunque nuestros dedos lo hagan solo hasta 10.

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1

Pero si nosotros no conocemos previamente el concepto de diez, cómo podríamos encontrar a diez o nada. Con esto, es cuando los matemáticos finalmente se dan cuenta que definir un número rigurosamente no conduce a nada nuevo. El niño intenta asociar sus dedos con un número y lo hace para cada cosa que hay en la realidad.

Abordar esto con rigor, es lo que permite a los matemáticos estar de acuerdo entre sí sobre lo que consideran verdadero. En lugar de argumentar sobre ideas de teorías, los matemáticos se basan en las reglas de la lógica, la idea es que si solo se utilizan objetos que se comportan estrictamente de acuerdo con las reglas lógicas, ningún desacuerdo puede surgir. Sin embargo, que sucede si utilizamos objetos que no se comportan con la lógica y pudieran producir diferentes respuestas válidas. El mundo en general, no se comporta de acuerdo con la lógica estricta. Si le das a un niño los recursos para despojarse de las ambigüedades, solo manipulará las cosas coherentes con las reglas de la lógica. El punto es, porqué intentar lidiar con el infinito. Es reconsiderar a los números finitos de una manera diferente que nos permita pensar desde un acercamiento diferente a los números por conteo.

El conteo es esencialmente un proceso de emparejar un conjunto de cosas con otro conjunto de cosas que definen el número en cuestión. Si vemos a los números no como índice de cosas, sino como un conjunto. Podemos pensar a los números como conjuntos de elementos.

Para cero, podrías referirlo como un conjunto vacío, contiene un vacío como elemento. Un conjunto para el número uno, contiene a uno y al vacío, es decir dos elementos. A este proceso de emparejar números con cosas es a lo que se llama en matemáticas función. Esta idea de emparejar las cosas nos va a dar nuestra primera definición válida de infinito, así que vamos a ver cómo funciona esto para algunas situaciones matemáticas. Contar en matemáticas no es un ***uno más uno*** nombrando cada número. Significa emparejar los objetos que se están contando con los objetos en un índice de números. El infinito es un conjunto que contiene a todos los conjuntos de los números naturales, significa emparejar objetos con los índices infinitos dentro de una relación biyectiva o función. Un conjunto infinito es contable si es posible que sus objetos sean emparejados con el índice de números naturales. Así que, lo que estamos diciendo es que el conjunto infinito se llama contable si los objetos pueden ser emparejados con los números naturales. O formalmente, si hay una función biyectiva a los números naturales. Este conjunto infinito se llama simplemente infinito. Pero, ¿hay conjuntos infinitos que son incontables infinitos?

Ahora que estamos comenzando a tener pistas de que hay diferentes infinitos, deberíamos empezar a tener más cuidado de cómo escribimos infinito. El símbolo ∞ solo significa cualquier cosa no finita. Sin embargo, ahora tenemos una noción muy específica de infinito, que corresponde a nuestro conjunto de índice de números naturales. Por otro lado, pareciera imposible pensar en algo más grande que el infinito. Hemos descubierto que dos infinitos no son más grandes que el infinito, e incluso el infinito al cuadrado. Así que, al final debemos encontrar un infinito que sea más infinito que otro. Qué hay más infinito que los números naturales. La primera idea es tratar de contar a los irracionales.

En lugar de iniciar demostrando que los irracionales son números incontables, debemos demostrar que los números reales son incontables y de esta manera los segundos también lo serán.

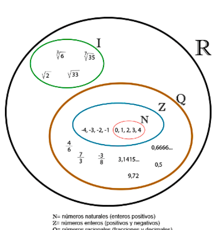
Ya sabemos que los racionales son contables si ponemos dos conjuntos contables juntos, obtenemos otro conjunto contable. Los números reales son difíciles de anclar, pero por ahora digamos que son todos los números decimales posibles, donde los decimales pueden seguir para siempre.

A estas alturas ya entendemos la importancia de lo preciso de un lenguaje. La historia de las matemáticas es, entre otras cosas, una historia sobre la invención de un lenguaje cada vez más preciso y técnicas para explorar las ideas abstractas requeridas para modelar el mundo físico. Las nuevas ideas nos obligan a mirar hacia atrás y más precisamente redefinir nuestro antiguo vocabulario. Esto puede sonar como retroceso tedioso, pero ha sido una fuerza impulsora que ha provocado algunos de los mayores avances en matemáticas. Ya es hora de que retrocedamos. Comencemos nuestra historia por definir la simetría de un objeto como un movimiento rígido que deja el objeto aparentemente sin cambios. Ahora es finalmente el momento de definir con más precisión el término "movimiento rígido". Históricamente, esto fue necesario para probar muchos de los teoremas.

Además, dado que el retroceso implica encontrar nuevas formas de pensar en viejas ideas, nos llevará a descubrimientos inesperados y otras verdades.

¿Hasta dónde debemos retroceder? Antes de decidir qué es un movimiento rígido del plano o del espacio, debemos decidir qué es el “plano” y " el espacio". Dado que el plano está hecho de pares de números y el espacio de los tripletes de números, nosotros primero debemos decidir qué es un número.

Hasta ahora, hemos introducido los siguientes conjuntos importantes.
de números:



¿Cuál de estos conjuntos es el más grande? Podría responder que R es el más grande porque contiene a los otros. O puede responder que todos tienen el mismo tamaño, es decir, infinito. Hasta hace poco más de un siglo, los matemáticos estaban contentos con la decisión de que cada conjunto infinito tiene el mismo tamaño que cualquier otro conjunto infinito. No estaban en lo correcto ni en lo incorrecto: esto es simplemente lo que significaron con la frase "mismo tamaño".

DEFINICIÓN DE MODA ANTIGUA DE "MISMO TAMAÑO": se dice que un par de conjuntos tienen el mismo tamaño si cualquiera de los dos es finito y tiene el mismo número de miembros o ambos son infinitos.

Esta definición probablemente parece razonable, pero estás a punto de aprender una hermosa verdad sobre el infinito a la que esta definición te ciega. Los matemáticos que usaron esta definición, no entendían su punto ciego más que los matemáticos griegos antiguos que entendían las verdades a las que estaban cegados cuando definían "número" como "número racional". En la historia del pensamiento matemático, este "infinito" el punto ciego era tan importante como el punto ciego "número", y su eliminación desató un mundo rico de ideas fundamentalmente nuevas.

¿Qué más podría significar la frase "mismo tamaño"? Para responder a esta pregunta, pensemos más detenidamente acerca de cómo comparamos los tamaños de los conjuntos. Cuando mi hijo era pequeño, le di diez vasos y diez ciruelas, y le pregunté si había tantas ciruelas como vasos. Un adulto habría contado por separado las ciruelas y los vasos y compararía las respuestas, pero mi hijo aún no sabía cómo contar hasta diez. Así que en lugar de eso, simplemente colocó una ciruela en cada vaso. Como las ciruelas y los vasos se combinaban perfectamente, sabía que había un número igual de cada uno.

Si le dan dos juegos infinitos y le preguntan si tienen el mismo tamaño, entonces su situación es muy análoga a la de mi hijo. No tiene la capacidad de contar por separado cada conjunto porque no sabe cómo "contar hasta el infinito". Su solución más razonable es la que usó mi hijo: debe tratar de encontrar una correspondencia uno a uno (un apareo) entre los miembros de los dos conjuntos. Esta idea no es un juego de niños, es tan importante que se convertirá en nuestro nuevo significado de "mismo tamaño".

DEFINICIÓN MODERNA DE “MISMO TAMAÑO”: se dice que un par de conjuntos tienen el mismo tamaño si sus miembros pueden ser emparejados con una correspondencia uno a uno.

Es hora de olvidar la definición antigua, y de ahora en adelante, usar solo la definición moderna. Para decidir si dos conjuntos tienen el mismo tamaño, su único trabajo es determinar si sus miembros pueden ser emparejados con una correspondencia de uno a uno. Por ejemplo, para decidir si tiene la misma cantidad de dedos que el desconocido que acaba de encontrar en la escuela, no puede contar y comparar; más bien, debe intentar hacer coincidir los dedos al acercar las manos. A menudo es muy natural comparar tamaños haciéndolos coincidir en lugar de contar.

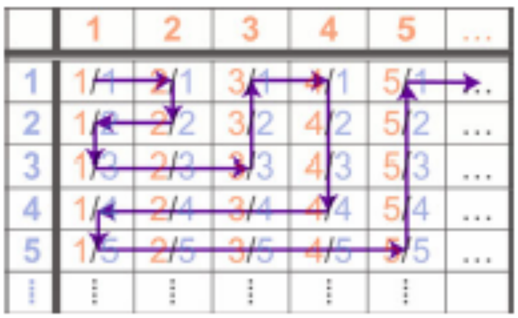
Encontrar una correspondencia uno a uno puede requerir inteligencia y persistencia.

DEFINICIÓN: Un conjunto infinito se llama contable sí tiene el mismo tamaño de N (el conjunto de números naturales).

Demostración de que los números racionales son contables: Este es un método alternativo para enumerar todos los números racionales positivos. Esto significa organizarlos en una lista infinita, pero primero nos conformamos con organizarlos en una cuadrícula infinita que (como la cuadrícula de una hoja de cálculo de una computadora) tiene un borde superior y un borde izquierdo, pero se extiende indefinidamente hacia abajo y hacia la derecha. La disposición más natural es así, con la columna que determina el numerador y la fila que determina el denominador:

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	...
:	:	:	:	:	:	

Ahora organizamos las celdas de esta cuadrícula infinita en una lista infinita serpenteando a través de la cuadrícula de esta manera:



Si registramos las fracciones que visitamos a lo largo de este serpenteante camino púrpura, y eliminamos las redundantes a medida que avanzamos, nuestra lista comenzará así:

1/1, 2/1, ~~2/2~~, 1/2, 1/3, 2/3, ~~3/3~~, 3/2, 3/1, 4/1, ~~4/2~~, 4/3, ~~4/4~~, 3/4,…

Ahora que hemos enumerado con éxito todos los números racionales positivos, podemos insertar cero en el frente e intercalar los negativos como antes.

Nuestro próximo objetivo es decidir si R (el conjunto de todos los números reales) es contable. Para apreciar la pregunta, intente construir una lista infinita {1st real, 2nd real, 3rd real…}. Puede comenzar con una lista de los números racionales y luego insertar algunos números irracionales famosos como **Pi** y **raíz de 2** al principio de su lista. Pero, ¿qué hay de los irracionales menos famosos? Cuantos más agregue a su lista, más descubrirá que falta algo. ¿Hay demasiados números reales para incluir en una sola lista infinita? La respuesta a esta difícil pregunta fue descubierta por Georg Cantor alrededor de 1872.

TEOREMA DE CANTOR: El conjunto de números reales, R, NO es contable (por eso lo llamamos incontable).

Conozco muchas formas de construir una lista infinita de números reales en la que ninguna los incluye a todos. Pero esto no prueba el teorema de Cantor, ya que alguien más inteligente que yo podría algún día tener éxito en incluirlos a todos. Para probar su teorema, Cantor tuvo que demostrar sin NINGUNA lista, no importa lo ingeniosamente que resulte construirla, que no podría tener éxito en incluir todos los números reales. En otras palabras, tuvo que probar que cada intento de listado está condenado por adelantado. Así es como lo hizo:

DENOSTRACIÓN: probaremos que cualquier lista de números reales está incompleta. No importa cuán escrupulosamente se organizó la lista, algunos números reales definitivamente se dejaron de lado. Más precisamente, describiremos un procedimiento concreto para identificar un número real que falta en cualquier lista de números reales.

Imagina una lista de números reales. Tal vez fue creado por su alumno, quien hizo todo lo posible para incluir todos los números reales. Tal vez comienza así:

1^{st}	$\leftrightarrow$	3.1415926635···	(π)
2^{nd}	$\leftrightarrow$	0.3333333333···	(1/3)
3^{rd}	$\leftrightarrow$	1.41421356237···	($\sqrt{2}$)
4^{th}	$\leftrightarrow$	256655643.0000000000···	(Aunt Clair's SSN)
5^{th}	$\leftrightarrow$	509.73737373737···	(Her favorite number)
6^{th}	$\leftrightarrow$	5.04749726737···	($\pi^{\sqrt{2}}$)

Aquí hay un procedimiento concreto para identificar un número real que falta en la lista. Llamaremos a este número faltante M. Estará entre 0 y 1, por lo que tendrá la forma:

$$M = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \cdots$$

donde cada dn es un dígito (0-9). ¿Cómo debemos elegir estos dígitos para asegurarnos de que M NO esté en la lista? La respuesta es ingeniosa, y se indica con los dígitos en rojo en la lista del alumno. Aquí está: Elija el primer dígito de M, d1, para que no sea el primer dígito (después del punto decimal) del primer número en la lista. Esto asegura que M sea diferente del primer número en la lista, ya que tiene un primer dígito diferente. Elija el segundo dígito de M, d2, para que no sea el segundo dígito del segundo número de la lista. Esto asegura que M sea diferente del segundo número en la lista, ya que tiene un segundo dígito diferente. ¿Ves la idea? Elija el enésimo dígito de M, dn, para que sea cualquier otra cosa que el noveno dígito del enésimo número en la lista, lo que asegura que M sea diferente del enésimo número en la lista, ya que tiene un noveno dígito diferente.

En el ejemplo del alumno, la diagonal roja incluye los números {1, 3, 4, 0, 7, 7, ...}, por lo que debemos elegir

$$M = 0.(\text{not } 1)(\text{not } 3)(\text{not } 4)(\text{not } 0)(\text{not } 7)(\text{not } 7) \cdots.$$

Esto nos deja mucha libertad. M = 0.258163 ... funciona bien, al igual que muchas otras opciones. Con cada dígito, hay diez opciones (0–9), y solo una opción no está permitida, lo que aún nos deja nueve opciones. Para estar en el lado seguro, también evitaremos los números 0 y 9, que aún dejan al menos siete opciones para cada dígito.

En resumen, podemos usar este procedimiento diagonal para construir un número real, M, que falta en cualquier lista de números reales. Por lo tanto, ningún listado de números reales podría estar completo. Por lo tanto, los números reales nunca podrían organizarse en una sola lista, son incontables.

El Teorema de Cantor dice que, en un sentido muy preciso, los conjuntos infinitos N y R NO tienen el mismo tamaño. Por lo tanto, la definición moderna de "mismo tamaño" lleva a esta verdad: no todos los conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño, ¡algunos son genuinamente más grandes que otros! Este es un fenómeno sorprendente y notable. En la escritura popular, se describe con frases como "diferentes tamaños de infinito" o "más infinito que infinito".

Durante la vida de Cantor, su trabajo fue criticado por teólogos que lo consideraron un desafío a la noción de Dios como el único infinito y también por matemáticos que se sentían incómodos con sus conclusiones contra intuitivas. Pero al final, no se puede discutir con una prueba sólida. Las conclusiones de Cantor fueron finalmente aceptadas, provocando un cambio de paradigma en la forma en que los matemáticos pensaban sobre conceptos fundamentales de los números y los conjuntos.

Demostramos que estos decimales interminables son incontables usando el truco de Cantor, que ahora se conoce como el argumento diagonal de Cantor. De hecho, los números reales entre 0 y 1 son incontables por sí mismos. Otra manera en que algo puede ser "más infinito" que los números naturales es más sutil y tal vez, se relaciona con la palabra incontable. Hemos demostrado que los números reales son más infinitos que los numeres naturales, pero ¿Cuánto más infinitos son? ¿A qué distancia está del infinito el infinito más grande? Para ello se requiere del conteo abstracto.

Conteo abstracto

El cálculo es uno de los logros globales entre culturas más inspirador para la humanidad como una unidad de civilización. No es necesario hacer cálculos para apreciar su poder, así como no es necesario conocer el funcionamiento electrónico de un teléfono celular para disfrutarlo. Requerimos de fenómenos matemáticos que guíen nuestras preguntas matemáticas para imaginar lo que sucede con estos objetos matemáticos. El cálculo es esencial para entender la cuarta revolución industrial que nos da el mundo como el que hoy conocemos.

El primer hito del cálculo como desarrollo industrial, se da en las máquinas de vapor y la mecánica de motores y medios mecánicos para herramientas industriales. Pero quizá el mayor logro para intensificar la socialización humana ocurrió con las comunicaciones inalámbricas. La historia de Maxwell ilustra un tema que se va viendo una y otra vez como un logro del cálculo. A menudo se dice que las matemáticas son el lenguaje de la ingeniería y la ciencia. Hay mucho de verdad en ello. En el caso de ondas electromagnéticas, fue un paso clave para Maxwell traducir las leyes que habían sido descubiertas por Faraday, Coulomb y otros de manera experimental a ecuaciones expresadas en lenguaje de cálculo diferencial y luego tensorial.

Pero la analogía del lenguaje es incompleta, es un sistema asombroso de razonamiento en la frontera del infinito en lo macro y en el microcosmos. Nos permite transformar una ecuación simbólica en otras, solo sujetándonos a operaciones de ciertas reglas profundamente enraizadas en la lógica, los números, la geometría… El cálculo es construir largas cadenas de símbolos, que son cadenas de inferencias lógicas. Es un pensamiento hipotético deductivo, si somos suficientemente hábiles y afortunados de transformar las ecuaciones de manera correcta, podemos conseguir que revelen sus implicaciones ocultas y por ende a los objetos que hacen referencia en la realidad. Para un matemático y un poeta es como adoptar un estilo de pensamiento. Los mensajes que producen el poeta y el matemático, son creados para revelar los secretos de la vida humana y de la lógica oculta en la arquitectura de la realidad. Para aprender poesía no hay un manual, se debe aprender en contacto con la lectura del universo de propuestas en la literatura. Para aprender cálculo debemos aprender de los ya desarrollados cálculos publicados en una amplia literatura internacional. En el caso de Maxwell hay innumerables formas para transformar sus ecuaciones. Sin embargo, afortunadamente hay un secreto clave para su aprendizaje.

El punto es que cuando Maxwell traduce sus ecuaciones de la electricidad y el magnetismo calculó que la propagación de estas ondas juntas de energía invisible se mueven a la velocidad de la luz. En cuestión de décadas, esta revelación cambió el mundo cuando Einstein introduce en su relatividad este límite cosmológico de la velocidad de la luz. Es extraño que el cálculo sea un experimento mental en el dominio imaginario de símbolos y de la lógica. Sin embargo, la lógica del cálculo puede utilizarse como una verdad del mundo real para generar otro artificial en que se experimenta con modelos ideales. El cálculo hacia el mundo real plantea que lo que este determina podría ser una verdad empírica que aguarda verificación experimental. De esta manera, el cálculo le permitió a Albert Einstein predecir la existencia de agujeros negros y ondas de gravedad cien años antes de que existiera tecnología para medir estos existenciales. El cálculo es una poderosa herramienta de imaginación objetiva para la ciencia y la ingeniería.

Pero, por qué la realidad de nuestro universo debería respetar el funcionamiento de la lógica matemática del cálculo. Esto es un misterio sorprendente del que el mundo esté hecho en su organización matemática de lo mismo que está hecho nuestra base axiomática que es cimientos del cálculo. La adecuación del lenguaje del cálculo matemático a las ecuaciones fundamentales de la realidad es un regalo maravilloso que no entendemos por qué no lo merecemos[63].

Pero la historia de este regalo se remonta a Pitágoras, cuando descubrió que la música es gobernada por el cociente de números enteros. Lo que distingue al cálculo del resto de las matemáticas es solo una idea de principio a fin. Cuando nos damos cuenta de esta idea, la estructura del cálculo cae en su lugar como un tema unificador. Por desgracia los profesores comunes entierran esto debajo de muchas fórmulas. Se trata del principio del infinito.

7. Estructuras

Dentro de las muchas estructuras de interés físico, químico o biológico describimos el término número como un escalar generado por una función escalar. Incluimos como **cantidades escalares (espacio escalar)** a la masa, el volumen, la energía y el número de moléculas de gases entre muchas otras. Las cantidades de este tipo se denominan escalares. Sin embargo, los escalares no son suficientes para describir muchas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, al orientar a alguien sobre nuestra ubicación, requerimos proporcionar dos piezas de información, la dirección y la distancia. La estructura que contiene en su naturaleza matemática estas dos piezas, es el "vector", este combina longitud, codifica la geometría de la distancia y la dirección respectivamente. Las **cantidades vectoriales** juegan un papel importante en la física, la química, la biología y en las ciencias económicas entre otras.

Un espacio vectorial, lo definimos como una clase importante de conjuntos de vectores que se denominan espacio vector. Los espacios se pueden mirar desde perspectivas diferentes, primero son espacios vectoriales por propio derecho, segundo proporcionan un lenguaje en el que se pueden describir las propiedades de los espacios. Esta definición puede sernos muy útil para considerar como una cantidad vectorial está asociada a las propiedades físicas en el espacio: campo de gravedad, campo eléctrico, campo de Higgs.

Dado un sistema de coordenadas en dos dimensiones, un vector describe la posición de dos puntos en relación entre sí, específica a través de dos números la separación entre los puntos en las direcciones de coordenadas. Estos números definen los componentes del vector en el sistema de coordenadas elegido. Un vector se representa gráficamente mediante una flecha que conecta sus puntos definitorios. La longitud de la flecha mide la distancia entre los puntos y su dirección u orientación relativa. Tenga en cuenta que se obtiene la misma flecha para dos puntos que tienen la misma distancia relativa y orientación, independientemente de su ubicación real.

Los vectores se pueden concatenar para definir un nuevo vector. Se dan por la suma de los componentes respectivamente. También, un vector puede multiplicarse por un escalar para cambiar su longitud. Se llama espacio a todos los vectores en dos dimensiones (**x,y**) en $\mathbb{R}^2$. Esto muestra diferentes maneras de ver a los vectores y su representación a través de sus componentes. Podemos pensar a los vectores como objetos geométricos definidos como clases de flechas en el plano, $\mathbb{R}^2$. Las flechas son únicas hasta la descripción una vez que se ha elegido un sistema de coordenadas, cada vector puede presentarse en sus componentes dimensionales, en este caso $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, tenga en cuenta que la descripción cambia si se eligen más dimensiones para el sistema de coordenadas, por ejemplo (**x,y,z**) en $\mathbb{R}^3$. Sumar vectores o estirarlos al multiplicar por un escalar, son operaciones que corresponden a vectoriales operados geométricamente, esta situación algebraica y geométrica son equivalentes. Un vector puede ser escrito de maneras diferentes:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left[a_x, a_y, a_z \right] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Un vector en un espacio estándar está definido por $\mathbb{R}^n$, **n** un número arbitrario de dimensiones espaciales. Definimos al espacio vectorial como el conjunto de todos los vectores multicomponentes:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \middle| [x^1, x^2, x^3, \cdots x^n] \in \mathbb{R} \right\}$$

Los elementos **x** son $\mathbb{R}^n$ vectores componentes. En la parte introductoria de este texto, los vectores los denotamos en negritas. Los componentes del vector **x** son referidos por x^i. Para ahorrar tiempo el espacio lo podemos expresar en la línea como $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3, \cdots x^n)^T$, donde T se habla de trasponer. Finalmente, **n** se llama dimensión en $\mathbb{R}^n$.

Un espacio vectorial es más que un grupo de elementos unido a reglas de composición, es un conjunto de objetos multicomponentes. Los vectores se pueden multiplicar por números reales **ax**, sumar y restar, $ax \pm bx = cx$. Sin embargo, note que los vectores no pueden multiplicarse o dividirse simplemente entre sí. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial dentro de muchos tipos de espacios en física y matemáticas.

Definimos un espacio vectorial como geométrica de flechas y en términos algebraicos como los generados por adición y multiplicación por un número escalar. El enfoque algebraico está determinado por su generalidad y de hecho, los vectores relevantes para la física tienen una interpretación gráfica geométrica visual. No el caso de vectores de **n** dimensiones usados en el criptograma de códigos en la teoría de la información, que solo son expresados en forma algebraica al modo de grupos.

Los vectores son objetos que se pueden agregar entre sí y multiplicar por elementos de un campo de números **F**. Donde F=$\mathbb{R}$.

Un **F** vector espacio es un triplete $(V, +, \bullet)$, consiste de un conjunto V, un rol de adición vectorial:

$+: V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$,

Y el rol de multiplicación por un escalar:

$\bullet: F \times V \to V$, $(a,v) \mapsto a \bullet v \equiv av$

Donde **v,w** son vectores y **a** un escalar.

Axiomas del espacio vectorial. La adición de vectores (**v**,+), se define como un grupo abeliano. El elemento neutro para la adición es el vector **0, o llamado vector nulo. El elemento inverso** de un vector es el negativo **-v**. La multiplicación por un escalar satisface los roles:

$\forall a,b \in F, \quad v,w \in V$:

$(a+b)v = av + bv$

$a(v+w) = av + aw$

$(ab)v = a(bv)$

$1v = v$

$v + 0 = v$

La primera parte de la definición $+: V \times V \to V$, formaliza la adición de vectores. En el caso del vector nulo 0 en $\mathbb{R}^n$ $0 = (0,0,0,0,0,\cdots 0)^T$. Nosotros podemos pensar en ello como un vector flecha encogido hasta un punto y por lo tanto, no apunta a ningún lado. La adición de este objeto a otro vector no hace nada. El vector **-v** negativo, puede ser interpretado como un vector que apunta en la dirección opuesta al vector **v**. Así que; $v + (-v) = 0$

Equivale a pensar:

$(-1)v = -v$

$0v = (1-1)v = v - v = 0$

8. Geometrías

Las geometrías euclidianas y otras se distinguen por las transformaciones que conservan sus propiedades esenciales. Utilizando el álgebra lineal y los grupos de transformación, son legibles de cómo estas geometrías clásicas se diferencian y se conectan. Las geometrías proyectivas e inversas para construir geometrías lineales y circulares, incluyen espacios métricos reales como euclidianos, hiperbólicos, elípticos y esféricos, así como sus contrapartes unitarias.

La invención de las coordenadas se atribuye a Pierre de Fermat (1601-1665), y a René Descartes (1596-1650), unieron lo que se había visto como los reinos separados de la geometría y el álgebra. Las conexiones aún más profundas fueron reveladas por el desarrollo posterior de nuevos tipos de geometría y la sistematización del álgebra. Antes de proceder a examinar algunas de esas conexiones, será útil establecer algunos hechos básicos sobre la geometría y los sistemas algebraicos. La obra "Elementos" de Euclides se ocupa de puntos, líneas y planos, además de propiedades de figuras geométricas como triángulos, círculos y esferas. Entre los conceptos fundamentales de la geometría del plano euclidiano se encuentran la colinealidad, la congruencia, la perpendicularidad y el paralelismo. Un tratamiento riguroso también implica relaciones de orden y continuidad no tratadas explícitamente en Elementos. Al omitir o modificar algunos de estos conceptos, se puede construir una variedad de otras geometrías: los planos afín y proyectivo real, la esfera inversa real y las llamadas geometrías no euclidianas. Todos estos sistemas alternativos tienen extensiones a espacios de dimensiones más altas.

Dos puntos en el plano euclidiano están unidos por una línea única y la línea es de extensión infinita. Distancias y áreas pueden medirse con una unidad de longitud elegida arbitrariamente. Los ángulos rectos proporcionan un estándar para la medida angular. El postulado euclidiano es equivalente a la afirmación de que a través de cualquier punto que no esté en una línea dada no se puede dibujar una sola línea que no la intersecte (los otros postulados implican la existencia de al menos una de esas líneas). De estas suposiciones se deduce, que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a dos ángulos rectos y que (el área de) el cuadrado en la hipotenusa de un triángulo recto es igual a la suma de (las áreas de) los cuadrados en los dos lados.

En el plano afín Real R^2 es el plano euclidiano sin perpendicularidad. No hay forma de medir ángulos y, las distancias solo se pueden comparar para puntos en una línea o en líneas paralelas. Sin embargo, todavía se puede determinar las áreas. Hasta el tamaño, todos los triángulos son equivalentes, al igual que todos los paralelogramos; no existe tal cosa como un triángulo recto o cuadrado. Las cónicas solo se pueden distinguir como elipses, parábolas e hipérbolas, no hay círculos.

Al adoptar la convención de que todas las líneas afines paralelas en una dicción determinada se encuentran en un punto en el infinito único y que todos esos puntos se encuentran en una sola línea en el infinito, eliminamos el paralelismo. Cuando admitimos los nuevos puntos y la nueva línea en el pliegue con los mismos postulados y privilegios que todas las demás, tenemos el plano Proyectivo P^2. Las incidencias ahora exhiben un principio de dualidad: los dos puntos se unen con una línea única y, las dos líneas se encuentran en un punto único. La medida angular, la distancia y el área son identificadas. No todos los cuadriláteros son iguales y solo hay un tipo de cónico no degenerado. La congruencia, la perpendicularidad y el paralelismo han desaparecido, solo queda la noción de colinealidad.

Alternativamente, el plano euclidiano puede recibir la topología de una esfera mediante un único punto excepcional común a todas las líneas. Una línea puede entonces ser considerada como una especie de círculo. Las líneas extendidas y los círculos ordinarios juntos forman un conjunto de círculos inversivos en la esfera inversa real I^2. Cualesquiera tres puntos que se encuentran en un círculo inversivo único; son concíclicos. Dos círculos pueden encontrase en dos, uno o ningún punto real. La distancia entre dos puntos no se puede medir, pero el ángulo entre dos círculos intersectantes puede ser. Por lo tanto, la colinealidad ha sido reemplazada por la concíclica y la perpendicularidad sigue siendo significativa, pero la congruencia y el paralelismo han sido eliminados.

Aunque durante mucho tiempo se sospechaba de un teorema disfrazado, el postulado paralelo finalmente se demostró que era independiente de las otras suposiciones que rigen al plano euclidiano. Reemplazándolo con la hipótesis contraria, que a través de cualquier punto que no está en una línea dada hay más de una línea que no lo intersecta; obtenemos el plano hiperbólico de Bolyai y Lobachevsky. Además, si no suponemos que las líneas son de longitud infinita, podemos construir una geometría métrica en la que no hay líneas no intersecantes: en el plano elíptico (el plano proyectivo con una métrica), las dos líneas se encuentran en un punto.

En la esfera elíptica (o simplemente la esfera), los puntos vienen en pares antípodos, y el papel de las líneas es jugado por grandes círculos; dos puntos no antipodales se encuentran en un gran círculo único, y dos grandes círculos cualesquiera se encuentran en un par de puntos antipodales. Cuando se identifican puntos antípodos, los grandes círculos de la esfera elíptica se convierten en líneas del plano elíptico (las dos geometrías a veces se les distingue como planos doble elípticos y único elíptico). Otra posibilidad es la esfera hiperbólica, que comprende dos hemisferios antípodos separados por un círculo ecuatorial de puntos autoantipodales. Dos grandes círculos se encuentran en un par de puntos antípodas, son tangentes a un punto ecuatorial o no se encuentran. La identificación de puntos antípodas convierte grandes círculos de la esfera hiperbólica en líneas del plano hiperbólico.

Los planos hiperbólicos, elípticos y esferas elípticas constituyen las geometrías clásicas no euclidianas. Junto con la esfera hiperbólica, el plano euclidiano comparte la noción de colinealidad (o concíclica), congruencia y perpendicularidad. Una diferencia notable es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo no euclidiano depende de su área, siendo proporcionalmente mayor que dos ángulos rectos para un triángulo elíptico (esférico) o proporcionalmente menor par uno hiperbólico. Aunque, cada geometría puede basarse en un conjunto seleccionado de postulados, un enfoque más instructivo caracteriza a las geometrías en grupos de transformación.

Referencias

---

[1] https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/NCTM-Position-Statements/

[2] Penrose, R. (2016). The Road to Reality. Random House.

[3] Baddeley, A. (2012). Working Memory: Theories, Models, and Controversies. Annual Review of Psychology, 63(1), 1–29. doi:10.1146/annurev-psych-120710-100422

[4] Stokes, M. G. 'Activity-silent'working memory in prefrontal cortex: a dynamic coding framework. Trends Cogn. Sci. 19, 394–405 (2015).

[5] Fletcher, P. C. & Henson, R. N. A. Frontal lobes and human memory: insights from functional neuroimaging. Brain 124, 849–881 (2001).

[6] D'Esposito, M., Postle, B. R. & Rypma, B. In Executive control and the frontal lobe: Current issues 3–11 (Springer, Berlin, 2000).

[7] Jonides, J. et al. The role of parietal cortex in verbal working memory. J. Neurosci. 18, 5026–5034 (1998).

[8] Desimone, R., & Duncan, J. (1995). Neural Mechanisms of Selective Visual Attention. Annual Review of Neuroscience, 18(1), 193–222.

[9] Christophel, T. B., Klink, P. C., Spitzer, B., Roelfsema, P. R., & Haynes, J.-D. (2017). The Distributed Nature of Working Memory. Trends in Cognitive Sciences, 21(2), 111–124.

[10] Wager, T. D. & Smith, E. E. Neuroimaging studies of working memory. Cogn., Affect. Behav. Neurosci. 3, 255–274 (2003).

[11] https://www.genome.gov/glossarys/index.cfm?id=91

[12] Kucian, K. & von Aster, M. Developmental dyscalculia. *Eur. J. Pediatr.* **174,** 1–13 (2015).

[13] Ritchie, S. J. & Bates, T. C. Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. Psychol. Sci. 24, 1301–8 (2013).

[14] Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*(6389), 749.

[15] Tobia, V., Bonifacci, P., & Marzocchi, G. M. (2016). Concurrent and longitudinal predictors of calculation skills in preschoolers. *European journal of psychology of education*, *31*(2), 155-174.

[16] Baillargeon, R., & Wang, S.-h. (2002). Event categorization in infancy. *Trends in cognitive sciences*, *6*(2), 85-93.

[17] Goel, V., Gold, B., Kapur, S., & Houle, S. (1998). Neuroanatomical correlates of human reasoning. *Journal of cognitive neuroscience*, *10*(3), 293-302.

[18] O'Brien, D. P., & Manfrinati, A. (2010). The mental logic theory of conditional proposition. *Cognition and Conditionals: Probability and Logic in Human Thinking*, 39-54.

[19] Docherty, S. J. *et al*. A genome-wide association study identifies multiple loci associated with mathematics ability and disability. *Genes. Brain. Behav*. **9,** 234–47 (2010).

[20] Chen, H., Gu, X.-h., Zhou, Y., Ge, Z., Wang, B., Siok, W. T., . . . Tan, L.-H. (2017). A genome-wide association study identifies genetic variants associated with mathematics ability. *Scientific reports*, *7*, 40365.

[21] Houdé, O., & Tzourio-Mazoyer, N. (2003). Neural foundations of logical and mathematical cognition. *Nature Reviews Neuroscience*, *4*(6), 507.

[22] Jansen, A. R., Marriott, K., & Yelland, G. W. (2003). Comprehension of algebraic expressions by experienced users of mathematics. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology: Section A*, *56*(1), 3-30.

[23] Pallier, C., Devauchelle, A.-D., & Dehaene, S. (2011). Cortical representation of the constituent structure of sentences. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 201018711.

[24] Nakai, T., & Okanoya, K. (2018). Neural Evidence of Cross-domain Structural Interaction between Language and Arithmetic. *Scientific reports*, *8*(1), 12873.

[25] Liu, D., Cai, D., Verguts, T., & Chen, Q. (2017). The time course of spatial attention shifts in elementary arithmetic. *Scientific reports*, *7*(1), 921.

[26] Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, *9*(4), 278.

[27] Boysen, S. T., & Berntson, G. G. (1989). Numerical competence in a chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Comparative Psychology*, *103*(1), 23.

[28] Cantlon, J. F., & Brannon, E. M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. Psychological science, 17(5), 401-406.

[29] Simon, T. J. (1999). The foundations of numerical thinking in a brain without numbers. *Trends in cognitive sciences*, *3*(10), 363-365.

[30] Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in cognitive sciences*, *7*(11), 483-488.

[31] Dehaene, S., Tzourio, N., Frak, V., Raynaud, L., Cohen, L., Mehler, J., & Mazoyer, B. (1996). Cerebral activations during number multiplication and comparison: a PET study. *Neuropsychologia*, *34*(11), 1097-1106.

[32] Tall, D. (2004). *The three worlds of mathematics.* For the Learning of Mathematics, 23(3), 29–33.

[33] Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). *APOS: A constructivist theory of learning.* In D. Holton (Ed.), The teaching

[34] Tall, D. O. (2008). *The transition to formal thinking in mathematics.* Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5–24.

[35] Kimhi, I. (2018). *Thinking and Being*. Harvard University Press.

[36] Foner, E. (2012). *The Fiery Trial: Abraham Lincoln and American Slavery* (Reprint ed.). W. W. Norton & Company.

[37] Lawvere, F. W. (2011). *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories* (2 ed.). Cambridge University Press.

[38] Penrose, R. (2016). *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics (Oxford Landmark Science)* (Revised ed.). OUP Oxford.

[39] Inglis, M., & Attridge, N. (2016). *Does Mathematical Study Develop Logical Thinking?: Testing the Theory of Formal Discipline.* World Scientific Publishing Europe Ltd.

[40] Hayes, B. (2017). *Foolproof, and Other Mathematical Meditations (MIT Press)*. The MIT Press.

[41] Knudsen, J., Stevens, H., Lara-Meloy, T., Kim, H.-J., & Shechtman, N. (2017). *Mathematical Argumentation in Middle School-The What, Why, and How: A Step-by-Step Guide With Activities, Games, and Lesson Planning Tools (Corwin Mathematics Series)* (1 ed.). Corwin.

[42] Tent, M. B. W. (2008). *The Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss* (1 ed.). Routledge.

[43] Antognazza, M. R. (2016). *Leibniz: A Very Short Introduction (Very Short Introductions)* (Reprint ed.). OUP Oxford.

[44] Tent, M. B. W. (2008). *The Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss* (1 ed.). Routledge.

[45] Aberdein, A., & Inglis, M. (2019). Advances in Experimental Philosophy of Logic and Mathematics., 296.

[46] Nuccetelli, S., & Seay, G. (2007). *Philosophy of Language: The Central Topics*. Rowman & Littlefield Publishers.

[47] Frege, G. (2007). *Gottlob Frege: Foundations of Arithmetic: (Longman Library of Primary Sources in Philosophy)* (1 ed.). Routledge.

[48] Bolzano, B. (2015). *Paradoxes of the Infinite (Routledge Revivals)* (1 ed.). Routledge.

[49] Noonan, H. W. (2001). *Frege: A Critical Introduction (Key Contemporary Thinkers)*. Polity Press.

[50] Siemon, D., Bleckly, J., & Neal, D. (2012). Working with the big ideas in number and the Australian Curriculum: Mathematics. *2012). Engaging the Australian National Curriculum: Mathematics–Perspectives from the Field. Online Publication: Mathematics Education Research Group of Australasia*, 19-45.

[51] Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2004). Elementary and middle school mathematics. *Boston: Allyn and Bacon*.

[52] Carroll, S. (2019). *Something Deeply Hidden: Quantum Worlds and the Emergence of Spacetime*. Oneworld Publications.

[53] Tall, D. (2008). *Advanced Mathematical Thinking (Mathematics Education Library)* (1991 ed.). Springer.

[54] https://cieumich.mx/EbookLetras3/elements/TablaContenido.html

[55] El País (2017) Conrad Wolfram, físico que está cambiando la forma de enseñar matemáticas en Estonia, apuesta por eliminar el cálculo a mano.

[56] Bernhardt, C. (2017). Turing's Vision: The Birth of Computer Science (The MIT Press) (Reprint ed.). The MIT Press.

[57] https://es.wikipedia.org/wiki/Máquina_de_Turing#cite_note-2

[58] Brassard, Gilles; Bratley, Paul (1997). Fundamentos de Algoritmia. Madrid: PRENTICE HALL.

[59] *C. Prun, J. Quantitative Linquistics 4, 244 (1997). https://arxiv.org/pdf/cs/0408041.pdf*

[60] Pinker, S. (2018). Los ángeles que llevamos dentro: El declive de la violencia y sus implicaciones (Spanish Edition).

[61] Paz, O. (2005). *El Arco y La Lira: El Poema, La Revelacion Poetica, Poesia E Historia (Seccion de Lengua y Estudios Literarios)*. Fondo de Cultura Economica, Mexico.

[62] Danielson, C. (2010). Writing papers in math class: A tool for encouraging mathematical exploration by preservice elementary teachers. *School Science and Mathematics*, *110*(8), 374-381.

[63] Hillery, M. O. S. M., O'Connell, R. F., Scully, M. O., & Wigner, E. P. (1984). Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics reports*, *106*(3), 121-167.